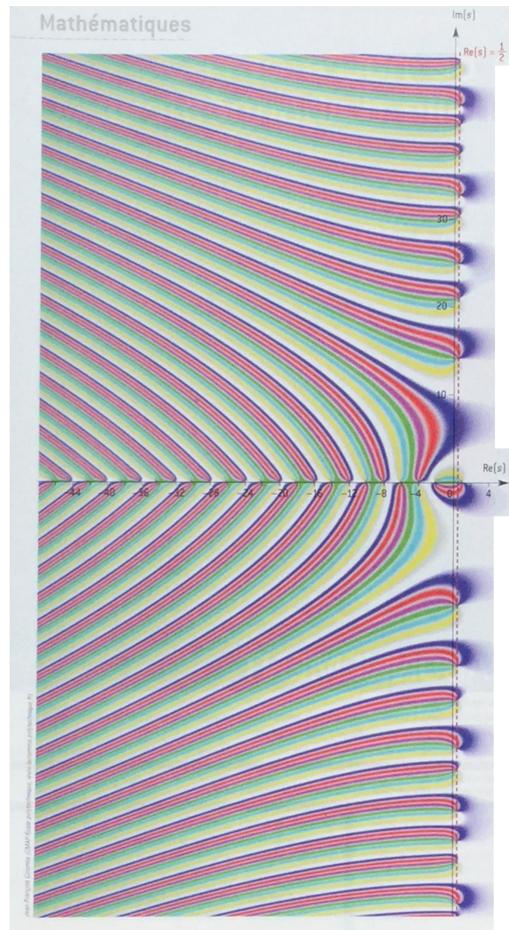


Couleur (Denise Vella-Chemla, 30.3.2018)

On observe la représentation colorée de la fonction zêta qu'on trouve dans certains articles de vulgarisation <sup>1</sup>. On lit que la couleur correspond à l'argument (l'angle) du complexe image tandis que l'intensité correspond à son module (sa longueur). On discerne les regroupements de 7 couleurs qui aboutissent chacun à un zéro (et qu'on appelle les dendrites).



On a envie d'associer certaines couleurs : le bleu foncé avec le violet, séparés par le rouge, ce groupe de 3 couleurs étant séparé par le vert du groupe des deux couleurs cyan et jaune. On trouve cette séparation par la couleur verte plus pertinente qu'une autre possibilité envisagée initialement <sup>2</sup> parce que la couleur verte "traverse" l'axe des abscisses au niveau des zéros triviaux, alors que les autres couleurs ne "traversent" pas cet axe (on voit au niveau des zéros triviaux deux sous-dendrites par dendrite (l'une regroupant (bleu, rouge, violet) et l'autre regroupant (cyan, jaune))).

Ce qui est intrigant, côté droite critique, c'est qu'on se serait attendu à une symétrie des couleurs : puisque le bleu foncé est en haut des dendrites et le jaune en bas dans le demi-plan supérieur, le bleu foncé devrait se retrouver en bas et le jaune en haut des dendrites dans le demi-plan inférieur. Or les dendrites ont les couleurs dans le même ordre dans les demi-plans inférieur et supérieur pour deux zéros non triviaux conjugués. On peut exprimer cela par cette formule qui semble s'appliquer sur la droite critique :

$$\zeta(a - i(b + k)) = \zeta(a + i(b - k))$$

On a pour objectif de trouver une transformation (un opérateur) qui aurait, comme axes invariants (i.e. un point de ces axes a son image sur ces axes), l'axe des abscisses (qui contient les zéros triviaux) et son orthogonal la droite critique (qui contient les zéros non-triviaux). On se dit que cet opérateur devrait peut-être inverser les couleurs par symétrie dans chaque dendrite de chaque demi-plan puis réaliser une symétrie des couleurs par conjugaison complexe habituelle (telle que si  $\zeta(a + ib) = c + id = \rho e^{i\theta}$  alors  $\zeta(a - ib) = c - id = \rho e^{-i\theta}$ ) pour obtenir cette propriété d'ordre des couleurs de l'arc-en-ciel identique dans les deux demi-plans supérieur et inférieur, peut-être.

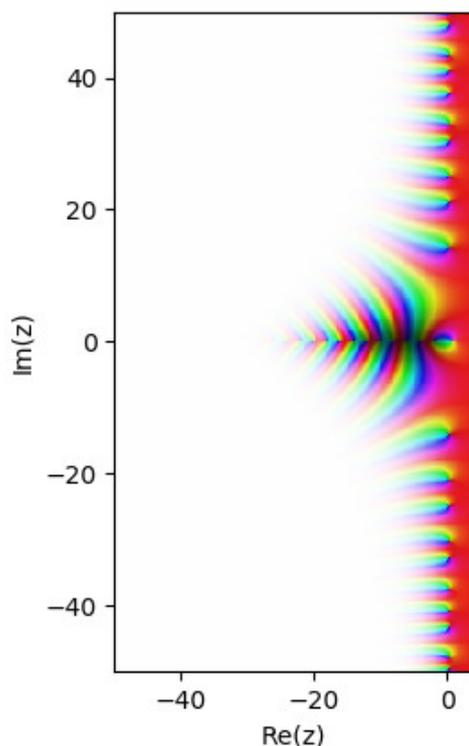
1. image extraite de l'article de Peter Meier et Jörn Steuding du magazine Pour la Science n°377, mars 2009.  
 2. qui reliait bleu à jaune, rouge à cyan et violet à vert.

On expérimente des petits essais en python, en vue de trouver cet opérateur qui permettrait de réobtenir les couleurs de zêta par un procédé qu'on maîtriserait un peu.

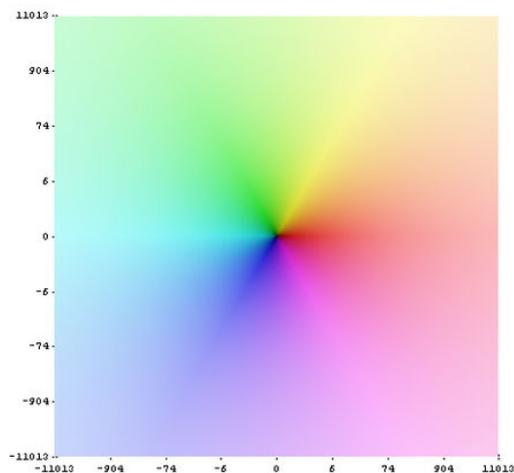
Par les instructions python,

```
1 import mpmath
2 from mpmath import zeta
3
4 mpmath.cplot(zeta, [-50,4], [-50,50], points=100000)
```

on obtient :

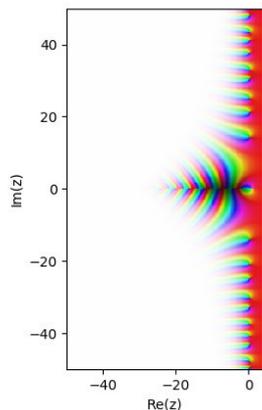


Les couleurs utilisées par python proviennent de la palette :



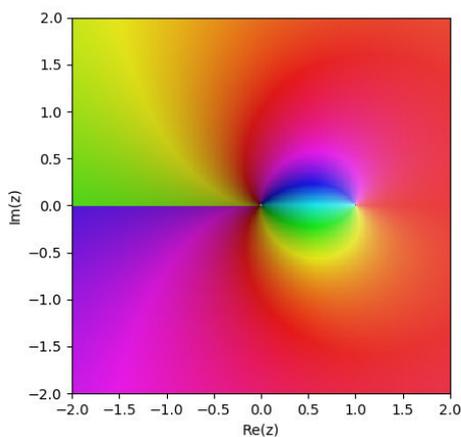
Ce sont les couleurs cyan et rouge qui traverse l'axe des abscisses dans la représentation colorée de zêta par programme python et les arguments (angles) des complexes bleu et vert d'une part, jaune et rose d'autre part, sont opposés.

On se trompait en croyant que les couleurs dans les dendrites devaient être symétriques les unes des autres du demi-plan supérieur au demi-plan inférieur : les couleurs sont dans le même ordre dans les deux demi-plans à cause de la conjugaison des complexes ; on a  $\zeta(z) = \overline{\zeta(\bar{z})}$ . On vérifie qu'on retrouve  $\zeta$  par :

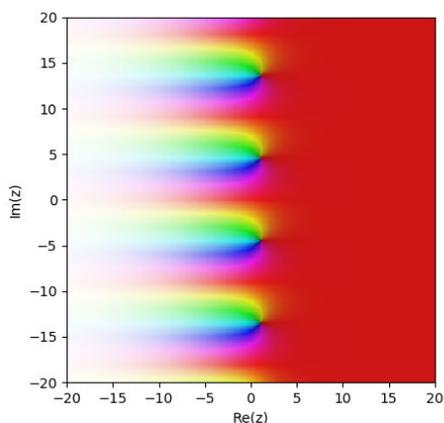


```
import mpmath
from mpmath import zeta
mpmath.cplot(lambda z:(zeta(z.conjugate())).conjugate(),[-50,4],[50,50], points = 100000)
```

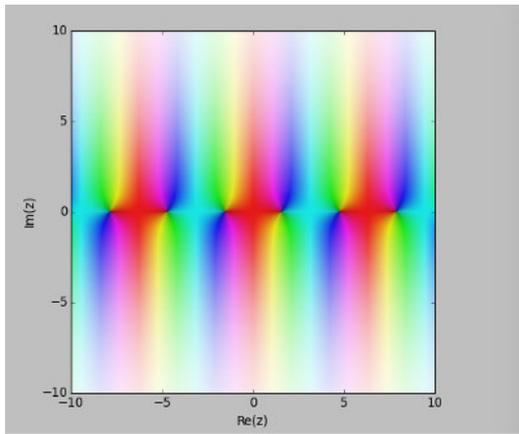
Zêta semble être un mélange d'éléments similaires à ceux qu'on retrouve en faisant calculer les fonctions suivantes :  $f_1(z) = z/\ln z$  pour ce qui se passe aux alentours de 0 et 1,  $f_2(z) = 2^{-z} + 0.5$  pour ce qui se passe aux alentours de chaque zéro non trivial (aux extrémités des dendrites) et  $f_3(z) = \cos z$  pour la vue qu'on a au niveau de l'axe des abscisses, sur lequel se trouvent les zéros triviaux, si ce n'est que les dendrites de zêta semblent toutes orientées asymptotiquement en  $-\infty$  vers  $+\infty$  dans le demi-plan supérieur et vers  $-\infty$  dans le demi-plan inférieur.



```
import mpmath
from mpmath import ln
mpmath.cplot(lambda z:z/ln(z),[-2,2],[2,2], points = 100000)
```



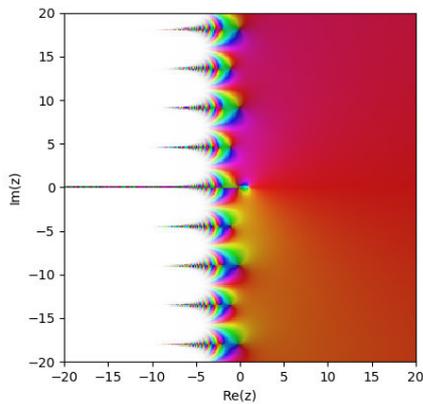
```
import mpmath
from mpmath import ln
eee=2.71828
mpmath.cplot(lambda z:2**(-z)+0.5,[-20,20],[20,20], points = 100000)
```



```
import mpmath
from mpmath import *
mpmath.cplot(lambda z:cos(z),[-10,10],[-10,10], points =100000)
```

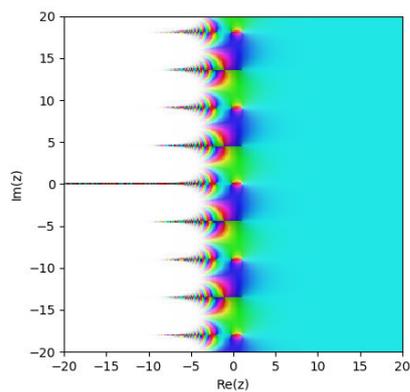
Par curiosité, on combine ces 3 fonctions des 6 manières possibles ( $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ ,  $f_1 \circ f_3 \circ f_2$ ,  $f_2 \circ f_1 \circ f_3$ , ...). Les résultats sont hasardeux.

Graphique associé à  $f_2 \circ f_3 \circ f_1(z) = \cos(2^{-z} + 0.5)/\ln(\cos(2^{-z} + 0.5))$



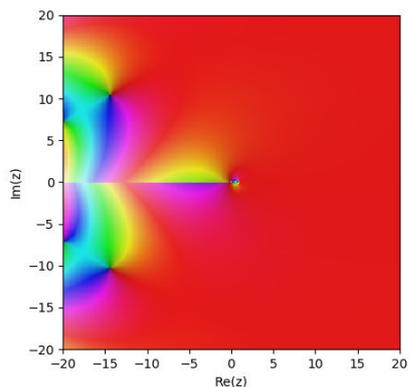
```
import mpmath
from mpmath import cos
from mpmath import ln
mpmath.cplot(lambda z:cos(2**(-z)+0.5)/ln(z),[-20,20],[-20,20], points = 100000)
```

Graphique associé à  $f_2 \circ f_1 \circ f_3(z) = \cos(2^{-z} + 0.5)/\ln(2^{-z} + 0.5)$



```
import mpmath
from mpmath import cos
from mpmath import ln
mpmath.cplot(lambda z:cos(2**(-z)+0.5)/ln(2**(-z)+0.5),[-20,20],[-20,20], points = 100000)
```

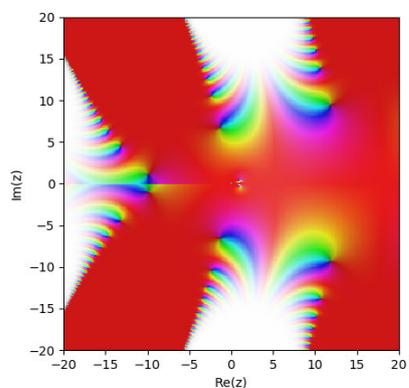
Graphique associé à  $f_1 \circ f_2 \circ f_3(z) = \cos(2^{-z/\ln(z)} + 0.5)$



```
import mpmath
from mpmath import cos
from mpmath import ln

mpmath.cplot(lambda z:cos(2**(-z/ln(z))+0.5),[-20,20],[-20,20], points = 100000)
```

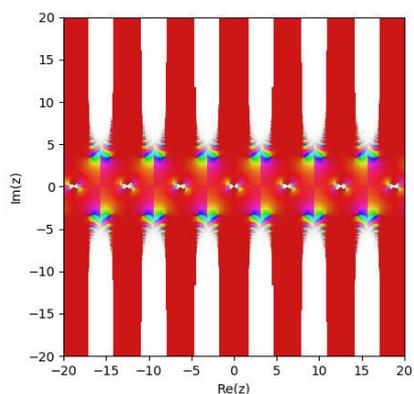
Graphique associé à  $f_1 \circ f_3 \circ f_2(z) = 2^{-(\cos(z/\ln(z)))} + 0.5$



```
import mpmath
from mpmath import cos
from mpmath import ln

mpmath.cplot(lambda z:2**(-1*(cos(z/ln(z))))+0.5,[-20,20],[-20,20], points = 100000)
```

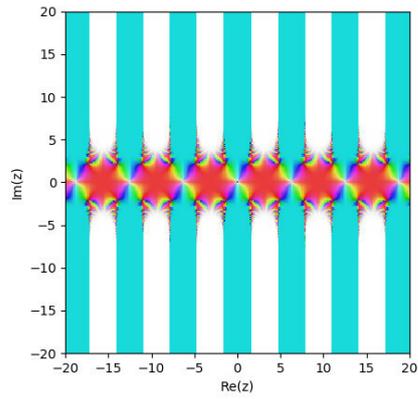
Graphique associé à  $f_3 \circ f_1 \circ f_2(z) = 2^{-\cos(z)/\ln(\cos(z))} + 0.5$



```
import mpmath
from mpmath import cos
from mpmath import ln

eee=2.71828
mpmath.cplot(lambda z:2**(-1*(cos(z)/ln(cos(z))))+0.5,[-20,20],[-20,20], points = 100000)
```

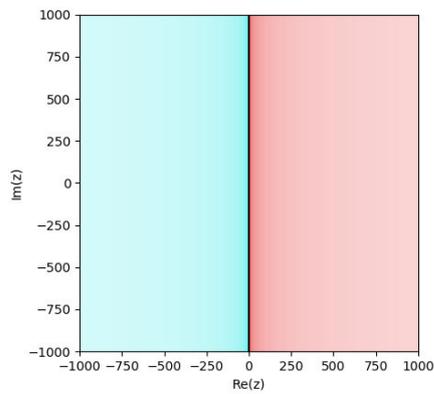
Graphique associé à  $f_3 \circ f_2 \circ f_1(z) = (2^{-\cos(z)} + 0.5)/\ln(2^{-\cos(z)} + 0.5)$



```
import mpmath
from mpmath import cos
from mpmath import ln

mpmath.cplot(lambda z:(2**((-1)*cos(z))+0.5)/ln(2**((-1)*cos(z))+0.5),[-20,20],[-20,20], points = 100000)
```

On a trouvé par hasard une manière d'implémenter la fonction layette  $z \mapsto z + \bar{z}$ .



```
import mpmath
[]
mpmath.cplot(lambda z:z+z.conjugate(),[-1000,1000],[-1000,1000], points=100000)
```