L'hypothèse de Riemann

Louis de Branges

13 avril 2017

Résumé. On doit obtenir une preuve de l'hypothèse de Riemann pour les fonctions zeta construites à partir d'un espace vectoriel discret de dimension finie sur les corps gauches (algèbres à division) des quaternions de coordonnées des nombres rationnels en analyse hyperbolique sur les groupes abéliens localement compacts obtenus par complétion. Les fonctions zeta sont générées par un groupe discret de transformations symplectiques. Les coefficients d'une fonction zeta sont les valeurs propres des opérateurs de Hecke définis par le groupe. Dans le cas non singulier, l'hypothèse de Riemann est une conséquence de la propriété accrétive maximale d'une transformation de Radon définie en analyse de Fourier. Dans le cas singulier, l'hypothèse de Riemann est une conséquence de la propriété accrétive maximale de la restriction de la transformation de Radon à un sous-espace défini par parité. L'hypothèse de Riemann pour les fonctions zeta d'Euler est un corollaire.

1. Généralisation de la fonction Gamma

L'hypothèse de Riemann est la conjecture faite par Riemann que la fonction zeta d'Euler n'a aucun zéro dans un demi-plan plus grand que le demi-plan qui n'a aucun zéro par la convergence du produit eulérien. Quand Riemann a fait cette conjecture, on s'intéressait aux zéros des polynômes parce qu'un polynôme est un produit de facteurs linéaires déterminé par ses zéros. Les polynômes qui n'ont aucun zéro dans le demi-plan supérieur ou le demi-plan inférieur apparaissent lorsqu'on munit l'espace vectoriel de tous les polynômes à coefficients complexes d'un produit scalaire défini par intégration selon une mesure non-nulle sur la droite réelle.

L'espace vectoriel a une base orthogonale constituée de polynômes $S_n(z)$ de degré n sur la variable z pour tout entier non négatif n. Les polynômes ont seulement des zéros réels et peuvent être choisis à coefficients réels. Une combinaison linéaire $S_n(z) - iS_{n+1}(z)$ de polynômes consécutifs est un polynôme qui rend soit le demi-plan supérieur soit le demi-plan inférieur sans aucun zéro.

Riemann était familier d'exemples de polynômes orthogonaux construits à partir de séries hypergéométriques. Pour ces fonctions spéciales, il se trouve que les combinaisons linéaires de polynômes orthogonaux consécutifs n'ont pas de zéro dans un demi-plan qui est plus grand que le demi-plan supérieur ou le demi-plan inférieur. La limite d'un demi-plan plus grand est décalée par rapport à l'axe réel d'une distance de un demi.

L'hypothèse de Riemann est incluse dans le problème d'expliquer le décalage observé des zéros. Il n'y a pas de raison de restreindre l'étude aux polynômes orthogonaux puisque les efforts d'Hermite et Stieltjes créent un contexte plus large. La contribution d'Hermite est une classe de fonctions entières qui, comme les polynômes, sont principalement déterminées par leurs zéros. La contribution de Stieltjes est un traitement de l'intégration sur la droite réelle comme une représentation des fonctionnelles linéaires positives sur des polynômes. Sa mort de la tuberculose a empêché l'application de ses idées à la classe de Hermite. L'étape restante [1] est la préparation pour une poursuite de leurs efforts sur l'hypothèse de Riemann.

L'hypothèse de Riemann pour les espaces de Hilbert des fonctions entières [2] est une condition sur les espaces de Stieltjes de fonctions entières qui explique le décalage observé des zéros et qui

Recherche financée par la Fondation nationale pour la Science (NSF).
Article en anglais consultable ici : https://www.math.purdue.edu/ branges/proof-riemann-2017-04.pdf.
Traduction Denise Vella-Chemla, octobre 2021.

implique la conjecture de Riemann si on peut l'appliquer à la fonction zeta d'Euler. Une telle application n'est pas évidente puisque la fonction zeta d'Euler présente une singularité dans le demi-plan d'analyse proposé. On verra que la fonction satisfait une condition de parité qui permet d'enlever la singularité. La fonction zeta d'Euler est une analogue de la fonction gamma d'Euler, dont les propriétés indiquent un traitement réussi de la fonction zeta.

La fonction gamma est la fonction analytique de s dans le plan complexe, à l'exception de singularités aux entiers négatifs, qui satisfait la relation de récurrence

$$s\Gamma(s) = \Gamma(s+1).$$

Une généralisation de la fonction gamma est obtenue en remplaçant le facteur s dans la relation de récurrence par une fonction arbitraire de s qui est analytique et qui a une partie réelle positive dans le demi-plan droit.

Une fonction poids analytique est définie, dénotée $W(z)$ de la variable z qui est analytique et sans zéros dans le demi-plan supérieur.

Les espaces de Hilbert de fonctions analytiques dans le demi-plan supérieur ont été introduits en analyse de Fourier par Hardy. L'espace pondéré de Hardy $\mathcal{F}(W)$ est défini comme l'espace de Hilbert des fonctions analytiques $F(z)$ de z dans le demi-plan supérieur telles que la borne supérieure minimum

$$\|F\|^2_{\mathcal{F}(W)} = \sup \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)/W(x+iy)|^2 dx$$

prise sur tous les y positifs est finie. La borne supérieure minimale est atteinte dans la mesure où y décroît vers zéro. L'espace de Hardy classique est obtenu lorsque $W(z)$ vaut identiquement un.

La multiplication par $W(z)$ est une transformation isométrique de l'espace de Hardy classique sur l'espace de Hardy pondéré avec la fonction poids analytique $W(z)$.

Une transformation isométrique de l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ dans lui-même est définie en envoyant une fonction $F(z)$ de z sur la fonction

$$F(z)(z-w)/(z-w^-)$$

de z lorsque w est dans le demi-plan supérieur. Le domaine de la transformation est l'ensemble des éléments de l'espace qui s'évanouissent en w. Une fonctionnelle linéaire continue de l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ est définie en envoyant une fonction $F(z)$ de z sur sa valeur $F(w)$ en w à chaque fois que w est dans le demi-plan supérieur. La fonction

$$W(z)W(w)^-/[2\pi i(w^- - z)]$$

de z appartient à l'espace quand w est dans le demi-plan supérieur et agit comme une fonction noyau reproduisant pour les valeurs de la fonction en w.

Un espace de Hilbert de fonctions analytiques dans le demi-plan supérieur qui a une dimension plus grande que un est isométriquement égal à un espace de Hardy pondéré si une transformation isométrique de l'espace sur le sous-espace des fonctions qui s'évanouissent en w est défini en envoyant $F(z)$ sur

$$F(z)(z-w)/(z-w^-)$$

quand w est dans le demi-plan supérieur et si une fonctionnelle linéaire continue est définie sur l'espace en envoyant $F(z)$ sur $F(w)$ pour les w du demi-plan supérieur.

Des exemples d'espaces de Hardy pondérés sont construits à partir de la fonction gamma d'Euler.

Une fonction analytique pondérée

$$W(z) = \Gamma(s)$$

est définie par

$$s = \tfrac{1}{2} - iz$$

Une transformation accrétive maximale est définie dans l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ en envoyant $F(z)$ sur $F(z+i)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace.

Une relation linéaire avec domaine et image dans un espace de Hilbert est dite accrétive si la somme

$$\langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle \geq 0$$

des produits scalaires dans l'espace est non négative à chaque fois que (a, b) appartient au graphe de la relation. Une relation linéaire est dite accrétive maximale si elle n'est pas la restriction propre d'une relation linéaire accrétive avec domaine et image dans le même espace de Hilbert. Une transformation accrétive maximale avec domaine et image dans un espace de Hilbert est une transformation qui est une relation accrétive maximale avec domaine et image dans l'espace de Hilbert.

Théorème 1. *Une transformation accrétive maximale est définie dans un espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ en envoyant $F(z)$ sur $F(z+i)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace si, et seulement si, la fonction*

$$W(z - \tfrac{1}{2}i)/W(z + \tfrac{1}{2}i)$$

de z admet un prolongement analytique et a une partie réelle non négative dans le demi-plan supérieur.

Preuve du Théorème 1. Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont les éléments sont des fonctions analytiques dans le demi-plan supérieur est construit lorsqu'une transformation accrétive est définie dans l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ en envoyant $F(z)$ sur $F(z+i)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace. L'espace $\mathcal{H}$ est construit à partir du graphe de l'adjoint de la transformation qui envoie $F(z)$ sur $F(z+i)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace.

Un élément

$$F(z) = (F_+(z), F_-(z))$$

du graphe est une paire de fonctions analytiques de z, qui appartiennent à l'espace $\mathcal{F}(W)$, telles que leur adjoint envoie $F_+(z)$ sur $F_-(z)$. Le produit scalaire

$$\langle F(t), G(t)\rangle = \langle F_+(t), G_-(t)\rangle_{\mathcal{F}(W)} + \langle F_-(t), G_+(t)\rangle_{\mathcal{F}(W)}$$

des éléments $F(z)$ et $G(z)$ du graphe est défini comme la somme des produits scalaires dans l'espace $\mathcal{F}(W)$. Les auto-produits scalaires sont non négatifs dans le graphe puisque l'adjoint d'une transformation accrétive maximale est accrétif.

Un élément $K(w,z)$ du graphe est défini par

$$K_+(w,z) = W(z)W(w - \tfrac{1}{2}i)^- / [2\pi i(w^- + \tfrac{1}{2}i - z)]$$

et

$$K_-(w,z) = W(z)W(w + \tfrac{1}{2}i)^- / [2\pi i(w^- - \tfrac{1}{2}i - z)]$$

quand w est dans le demi-plan

$$1 < iw^- - iw.$$

L'identité

$$F_+(w + \tfrac{1}{2}i) + F_-(w - \tfrac{1}{2}i) = \langle F(t), K(w,t)\rangle$$

est vérifiée pour tout élément

$$F(z) = (F_+(z), F_-(z))$$

du graphe. Un élément du graphe qui est orthogonal à lui-même est orthogonal à tout élément du graphe.

Une transformation isométrique du graphe sur un sous-espace dense de $\mathcal{H}$ est définie en envoyant

$$F(z) = (F_+(z), F_-(z))$$

sur la fonction

$$F_+(z + \tfrac{1}{2}i) + F_-(z - \tfrac{1}{2}i)$$

de z dans le demi-plan

$$1 < iz^- - iz.$$

La fonction noyau reproduisant pour les valeurs de la fonction en w dans l'espace $\mathcal{H}$ est la fonction

$$[W(z + \tfrac{1}{2}i)W(w - \tfrac{1}{2}i)^- + W(z - \tfrac{1}{2}i)W(w + \tfrac{1}{2}i)^-] / [2\pi i(w^- - z)]$$

de z dans le demi-plan quand w est dans le demi-plan.

La division par $W(z+\frac{1}{2}i)$ est une transformation isométrique de l'espace $\mathcal{H}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{L}$ dont les éléments sont des fonctions analytiques dans le demi-plan et qui contient la fonction

$$[\varphi(z) + \varphi(w)^-] / [2\pi i(w^- - z)]$$

de z comme fonction noyau reproduisant pour les valeurs de la fonction en w quand w est dans le demi-plan,

$$\varphi(z) = W(z - \tfrac{1}{2}i)/W(z + \tfrac{1}{2}i).$$

Un espace de Hilbert avec les mêmes fonctions noyau reproduisant est muni d'une caractérisation axiomatique dans le représentation de Poisson [1] des fonctions qui sont analytiques et qui ont une partie réelle positive dans le demi-plan supérieur. L'argument s'applique au présent espace $\mathcal{L}$ dont les éléments sont des fonctions analytiques dans le demi-plan plus petit.

La fonction

$$[F(z) - F(w)]/(z - w)$$

de z appartient à $\mathcal{L}$ à chaque fois que la fonction $F(z)$ de z appartient à $\mathcal{L}$ si w est dans le demi-plan plus petit. L'identité

$$\begin{aligned} 0 = \langle F(t), [G(t) - G(\alpha)]/(t - \alpha)\rangle_{\mathcal{L}} - \langle [F(t) - F(\beta)]/(t - \beta), G(t)\rangle_{\mathcal{L}} \\ -(\beta - \alpha^-)\langle [F(t) - F(\beta)]/(t - \beta), [G(t) - G(\alpha)]/(t - \alpha)\rangle_{\mathcal{L}} \end{aligned}$$

est vérifiée par toutes les fonctions $F(z)$ et $G(z)$ qui appartiennent à $\mathcal{L}$ quand α et β sont dans le demi-plan plus petit.

Une transformation isométrique de l'espace $\mathcal{L}$ dans lui-même est définie en envoyant une fonction $F(z)$ de z sur la fonction

$$F(z) + (w - w^-)[F(z) - F(w)]/(z - w)$$

de z quand w est dans le demi-plan plus petit.

La même conclusion est vérifiée quand w est dans le demi-plan supérieur par préservation de la propriété isométrique sous compositions itérées. Les éléments de $\mathcal{L}$ sont des fonctions qui ont des prolongements analytiques au demi-plan supérieur. Le calcul des fonctions noyau reproduisant s'applique quand w est dans le demi-plan supérieur. La fonction $\varphi(z)$ de z a un prolongement analytique avec partie réelle non négative dans le demi-plan supérieur.

Puisque la multiplication par $W(z + \frac{1}{2}i)$ est une transformation isométrique de l'espace $\mathcal{L}$ dans l'espace $\mathcal{H}$, les éléments de $\mathcal{H}$ ont des prolongements analytiques au demi-plan supérieur. La fonction

$$[W(z + \tfrac{1}{2}i)W(w - \tfrac{1}{2}i)^- + W(z - \tfrac{1}{2}i)W(w + \tfrac{1}{2}i)^-]/[2\pi i(w^- - z)]$$

de z appartient à l'espace quand w est dans le demi-plan supérieur et agit comme une fonction noyau reproduisant pour les valeurs de la fonction en w.

Les arguments sont retournés pour construire une transformation accrétive maximale dans l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ quand la fonction $\phi(z)$ de z admet un prolongement analytique et a une partie réelle positive dans le demi-plan supérieur. La représentation de Poisson construit un espace de Hilbert $\mathcal{L}$ dont les éléments sont des fonctions analytiques dans le demi-plan supérieur et qui contient la fonction

$$[\phi(z) + \phi(w)^-]/[2\pi i(w^- - z)]$$

de z comme fonction noyau reproduisant pour les valeurs de la fonction en w quand w est dans le demi-plan supérieur. La multiplication par $W(z + \frac{1}{2}i)$ agit comme une transformation isométrique de l'espace $\mathcal{L}$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont les éléments sont des fonctions analytiques dans le demi-plan supérieur et qui contient la fonction

$$[W(z + \tfrac{1}{2}iW(w - \tfrac{1}{2}i)^- + W(z - \tfrac{1}{2}i)W(w + \tfrac{1}{2}i)^-]/[2\pi i(w^- - z)]$$

de z comme fonction noyau reproduisant pour les valeurs de la fonction en w quand w est dans le demi-plan supérieur.

Une transformation est définie dans l'espace $\mathcal{F}(W)$ en envoyant $F(z)$ sur $F(z + i)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace. Le graphe de l'adjoint est un espace de paires

$$F(z) = (F_+(z), F_-(z))$$

d'éléments de l'espace tels que l'adjoint envoie la fonction $F_+(z)$ de z sur la fonction $F_-(z)$ de z. Le graphe contient

$$K(w, z) = (K_+(w, z), K_-(w, z))$$

avec

$$K_+(w, z) = W(z)W(w - \tfrac{1}{2}i)^-/[2\pi i(w^- + \tfrac{1}{2}i - z)]$$

et

$$K_-(w,z) = W(z)W(w+\tfrac{1}{2}i)^-/[2\pi i(w^- - \tfrac{1}{2}i - z)]$$

quand w est dans le demi-plan

$$1 < iw^- - iw.$$

Les éléments $K(w,z)$ du graphe couvrent le graphe d'une restriction de l'adjoint. La transformation dans l'espace $\mathcal{F}(W)$ est recouverte comme l'adjoint de l'adjoint restreint.

Un produit scalaire est défini sur le graphe de l'adjoint restreint de telle façon qu'une transformation isométrique du graphe de l'adjoint restreint dans l'espace $\mathcal{H}$ est définie en envoyant

$$F(z) = (F_+(z), F_-(s))$$

sur

$$F_+(z+\tfrac{1}{2}i) + F_-(z-\tfrac{1}{2}i).$$

L'identité

$$\langle F(t), G(t)\rangle = \langle F_+(t), G_-(t)\rangle_{\mathcal{F}(W)} + \langle F_-(t), G_+(t)\rangle_{\mathcal{F}(W)}$$

est vérifiée pour tous les éléments

$$F(z) = (F_+(z), F_-(z))$$

et

$$G(z) = (G_+(z), G_-(z))$$

du graphe de l'adjoint restreint. L'adjoint restreint est accrétif puisque les auto-produits scalaires sont non négatifs sur son graphe. L'adjoint est accrétif puisque la transformation dans l'espace $\mathcal{F}(W)$ est l'adjoint de son adjoint restreint.

La propriété accrétive de l'adjoint est exprimée par l'inégalité

$$\|F_+(t) - \lambda^- F_-(t)\|_{\mathcal{F}(W)} \le \|F_+(t) + \lambda F_-(t)\|_{\mathcal{F}(W)}$$

pour les éléments

$$F(z) = (F_+(z), F_-(z))$$

du graphe quand λ est dans le demi-plan droit. Le domaine de la transformation contractive qui envoie la fonction

$$F_+(z) + \lambda F_-(z)$$

de z sur la fonction

$$F_+(z) - \lambda^- F_-(z)$$

de z est un sous-espace fermé de l'espace $\mathcal{F}(W)$. La propriété accrétive maximale de l'adjoint est la condition que la transformation contractive soit partout définie pour un, et par conséquent pour tout, λ dans le demi-plan droit.

Puisque $K(w,z)$ appartient au graphe quand w est dans le demi-plan

$$1 < iw^- - iw$$

un élément $H(z)$ de l'espace $\mathcal{F}(W)$ qui est orthogonal au domaine de la transformation accrétive satisfait l'identité

$$H(w-\tfrac{1}{2}i) + \lambda H(w+\tfrac{1}{2}i) = 0$$

quand w est dans le demi-plan supérieur. La fonction $H(z)$ de z admet un prolongement analytique au plan complexe qui satisfait l'identité

$$H(z) + \lambda H(z+i) = 0$$

Un zéro de $H(z)$ se répète selon la période i. Puisque

$$H(z)/W(z)$$

est analytique et de type borné dans le demi-plan supérieur, la fonction $H(z)$ de z s'évanouit partout si elle s'évanouit quelque part.

L'espace des éléments $H(z)$ de l'espace $\mathcal{F}(W)$ qui sont solutions de l'équation

$$H(z) + \lambda H(z+i) = 0$$

pour un certain λ dans le demi-plan droit a comme dimension zéro ou un. La dimension est indépendante de λ.

Si τ est positif, la multiplication par

$$\exp(i\tau z)$$

est une transformation isométrique de l'espace $\mathcal{F}(W)$ dans lui-même qui envoie les solutions de l'équation pour un certain λ vers les solutions de l'équation dans laquelle λ est remplacé par

$$\lambda \exp(\tau).$$

Une solution $H(z)$ de l'équation pour un certain λ s'évanouit identiquement puisque la fonction

$$\exp(-i\tau z)H(z)$$

de z appartient à l'espace pour tout nombre positif τ et a la même norme que la fonction $H(z)$ de z.

La transformation qui envoie $F(z)$ sur $F(z+i)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace $\mathcal{F}(W)$ est accrétive maximale puisqu'elle est l'adjoint de son adjoint, qui est accrétif maximal.

Cela termine la preuve du théorème.

Le théorème a une formulation équivalente. Une transformation accrétive maximale est définie dans un espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ pour un certain nombre réel h en envoyant $F(z)$ sur $F(z+ih)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace si, et seulement si, la fonction

$$W(z+\tfrac{1}{2}ih)/W(z-\tfrac{1}{2}ih)$$

de z admet un prolongement analytique et a une partie réelle non négative dans le demi-plan supérieur.

Un autre théorème est obtenu dans la limite des petits h. Une transformation accrétive maximale est définie dans un espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ en envoyant $F(z)$ sur $iF'(z)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace si, et seulement si, la fonction

$$iW'(z)/W(z)$$

de z est de partie réelle non négative dans le demi-plan supérieur. La preuve du théorème est similaire à la preuve du théorème 1. Une transformation accrétive maximale est définie dans un espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ en envoyant $F(z)$ sur $iF'(z)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace si, et seulement si, le module de $W(x+iy)$ est une fonction non décroissante de y positif pour tout nombre réel x.

Une fonction entière $E(z)$ de z est dite de classe de Hermite si elle n'a pas de zéros dans le demi-plan supérieur et si le module de $E(x+iy)$ est une fonction non décroissante de y positif pour tout nombre réel x. La classe de Hermite est aussi connue comme classe de Pólya. Les fonctions entières de la classe de Hermite sont les limites de polynômes n'ayant aucun zéro dans le demi-plan supérieur [1]. De tels polynômes apparaissent dans la représentation de Stieltjes des fonctions linéaires positives sur les polynômes.

Une fonction poids d'Euler est définie comme une fonction poids analytique $W(z)$ telle qu'une transformation accrétive maximale est définie dans l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ à chaque fois que h est dans l'intervalle $[-1,1]$ en envoyant $F(z)$ dans $F(z+ih)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace.

Si une fonction $\phi(z)$ de z est analytique et a une partie réelle positive dans le demi-plan supérieur, un logarithme de la fonction est défini continuement dans le demi-plan avec des valeurs dans la bande de largeur π centrée sur la droite réelle. Les inégalités

$$-\pi \leq i\log\phi(z)^{-} - i\log\phi(z) \leq \pi$$

sont satisfaites. Une fonction $\phi_h(z)$ de z qui est analytique et qui a une partie réelle non négative dans le demi-plan supérieur est définie quand h est dans l'intervalle $(-1,1)$ par l'intégrale

$$\log\phi_h(z) = \sin(\pi h)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log\phi(z-t)dt}{\cos(2\pi it)+\cos(\pi h)}$$

Une application de la formule de Cauchy dans le demi-plan supérieur montre que la fonction

$$\frac{\sin(\pi h)}{\cos(2\pi it)+\cos(\pi h)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2\pi itz)\frac{\exp(\pi ht)-\exp(-\pi ht)}{\exp(\pi t)-\exp(-\pi t)}dt$$

de z est la transformée de Fourier d'une fonction

$$\frac{\exp(\pi ht)-\exp(-\pi ht)}{\exp(\pi t)-\exp(-\pi t)}$$

de t positif qui est de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue et qui est bornée par h quand h est dans l'intervalle $(0,1)$.

L'identité

$$\phi_{-h}(z) = \phi_h(z)^{-1}$$

est satisfaite. La fonction

$$\phi(z) = \lim\phi_h(z)$$

de z se retrouve dans la limite lorsque h décroît vers un. L'identité

$$\phi_{a+b}(z) = \phi_a(z-\tfrac{1}{2}ib)\phi_b(z+\tfrac{1}{2}ia)$$

quand a, b, et $a{+}b$ appartiennent à l'intervalle $(-1,1)$ est une conséquence de l'identité trigonométrique

$$\frac{\sin(\pi a+\pi b)}{\cos(2\pi iz)+\cos(\pi a+\pi b)}=\frac{\sin(\pi a)}{\cos(2\pi iz+\pi b)+\cos(\pi a)}+\frac{\sin(\pi b)}{\cos(2\pi iz-\pi a)+\cos(\pi b)}.$$

Une fonction poids d'Euler $W(z)$ est définie selon un facteur constant par la limite

$$iW'(z)/W(z)=\lim\frac{\log\phi_h(z)}{h}=\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log\phi(z-t)dt}{1+\cos(2\pi it)}.$$

lorsque h décroît vers zéro. L'identité

$$W(z+\tfrac{1}{2}ih)=W(z-\tfrac{1}{2}ih)\phi_h(z)$$

s'applique quand h est dans l'intervalle $(-1,1)$. L'identité se lit

$$W(z+\tfrac{1}{2}i)=W(z-\tfrac{1}{2}i)\phi(z)$$

dans la limite lorsque h croît vers un.

Une fonction poids d'Euler $W(z)$ est construite qui satisfait l'identité

$$W(z+\tfrac{1}{2}i)=W(z-\tfrac{1}{2}i)\phi(z)$$

pour une fonction non triviale donnée $\phi(z)$ de z qui est analytique et qui a une partie réelle non négative dans le demi-plan supérieur.

Une factorisation des fonctions poids d'Euler est une conséquence de la construction des fonctions poids d'Euler. Si $W(z)$ est une fonction poids d'Euler, il existe des fonctions poids d'Euler $W_+(z)$ et $W_-(z)$ telles que

$$W(z)=W_+(z)/W_-(z)$$

et telles que la partie réelle de

$$W_+(z-\tfrac{1}{2}ih)/W_+(z+\tfrac{1}{2}ih)$$

et de

$$W_-(z-\tfrac{1}{2}ih)/W_-(z+\tfrac{1}{2}ih)$$

est supérieure ou égale à un lorsque z est dans le demi-plan supérieur et lorsque h est dans l'intervalle $[0,1]$. Les fonctions

$$|W_+(x+iy)|$$

et

$$|W_-(x+iy)|$$

d'y positif sont non décroissantes pour tout nombre réel x.

Si une transformation accrétive maximale est définie dans un espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ en envoyant $F(z)$ sur $F(z+i)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace, alors l'identité

$$W(z+\tfrac{1}{2}i)=W(z-\tfrac{1}{2}i)\phi(z)$$

est vérifiée pour une fonction $\phi(z)$ de z qui est analytique et qui a une partie réelle non négative dans le demi-plan supérieur. La fonction poids analytique $W(z)$ est le produit d'une fonction poids d'Euler et d'une fonction entière qui est périodique de période i et qui n'a aucun zéro.

Si $W(z)$ est une fonction poids d'Euler, la transformation accrétive maximale définie pour h dans l'intervalle $[0,1]$ en envoyant $F(z)$ sur $F(z+ih)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace est sous-normale : la transformation est la restriction à un sous-espace invariant d'une transformation normale dans l'espace de Hilbert plus grand $\mathcal{H}$ des (classes d'équivalence des) fonctions de Baire $F(x)$ de x réel pour lesquelles l'intégrale

$$\|F\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)/W(t)|^2 dt$$

converge. Le passage à des fonctions à valeur bornée envoie isométriquement l'espace $\mathcal{F}(W)$ dans l'espace $\mathcal{H}$.

Une fonctionnelle linéaire de polynômes à coefficients complexes est dite non négative si elle a des valeurs non négatives sur les polynômes dont les valeurs sur l'axe réel sont non négatives.

Similairement, une fonctionnelle linéaire positive sur des polynômes est une fonctionnelle linéaire non négative sur les polynômes qui ne s'évanouit pas. Une fonctionnelle linéaire non négative sur les polynômes est représentée comme une intégrale par rapport à une mesure non négative μ sur les sous-ensembles de Baire de la droite réelle. La fonctionnelle réelle envoie un polynôme $F(z)$ sur l'intégrale

$$\int F(t) d\mu(t).$$

Stieltjes examine l'action d'une fonctionnelle linéaire positive sur des polynômes de degré inférieur à r pour r un entier positif. Un polynôme qui a des valeurs non négatives sur la droite réelle est le produit

$$F^*(z)F(z)$$

d'un polynôme $F(z)$ et du polynôme conjugué

$$F^*(z) = F(z^-)^-.$$

Si la fonctionnelle linéaire positive n'annule pas

$$F^*(z)F(z)$$

pour un polynôme $F(z)$ non trivial de degré moindre que r, il existe un espace de Hilbert dont les éléments sont les polynômes de degré moindre que r et dont le produit scalaire

$$\langle F(t), G(t) \rangle$$

est défini comme l'action de la fonctionnelle linéaire positive sur le polynôme

$$G^*(z)F(z).$$

Stieltjes montre que l'espace de Hilbert des polynômes de degré moindre que r est isométriquement contenu dans un espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ dont la fonction poids analytique $W(z)$ est un polynôme de degré r n'ayant aucun zéro dans le demi-plan supérieur.

Une axiomatisation des espaces de Stieltjes a été énoncée dans un contexte général [1]. Les espaces de Hilbert dont les éléments sont des fonctions entières et qui ont les propriétés ci-dessous ont été examinés :

(H1) À chaque fois qu'une fonction entière $F(z)$ de z appartient à l'espace et possède un zéro non réel w, la fonction entière

$$F(z)(z - w^{-})/(z - w)$$

de z appartient à l'espace et a la même norme que $F(z)$.

(H2) Une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace est définie en envoyant une fonction $F(z)$ de z sur sa valeur $F(w)$ en w pour tout nombre non réel w.

(H3) La fonction entière

$$F^{*}(z) = F(z^{-})^{-}$$

de z appartient à l'espace et a la même forme que $F(z)$ à chaque fois que la fonction entière $F(z)$ de z appartient à l'espace.

Un exemple d'espace de Hilbert des fonctions entières qui satisfait les axiomes est obtenu quand une fonction entière $E(z)$ de z satisfait l'inégalité

$$|E(x - iy)| < |E(x + iy)|$$

pour tout réel x quand y est positif. Un espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ est défini avec une fonction poids analytique

$$W(z) = E(z).$$

Un espace de Hilbert $\mathcal{H}(E)$ qui est isométriquement contenu dans l'espace $\mathcal{F}(W)$ est défini comme l'ensemble des fonctions entières $F(z)$ de z telles que les fonctions entières $F(z)$ et $F^{*}(z)$ de z appartiennent à l'espace $\mathcal{F}(W)$. La fonction entière

$$[E(z)E(w)^{-} - E^{*}(z)E(w^{-})]/[2\pi i(w^{-} - z)]$$

de z appartient à l'espace $\mathcal{H}(E)$ pour tout nombre complexe w et agit comme fonction noyau reproduisant pour les valeurs de la fonction en w.

Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ des fonctions entières qui satisfont les axiomes (H1), (H2), et (H3) est isométriquement égal à l'espace $\mathcal{H}(E)$ s'il contient un élément non nul. La preuve s'applique aux fonctions noyau reproduisant qui existent par l'axiome (H2).

Pour tout nombre non réel w, il existe une fonction entière unique $K(w, z)$ de z qui appartient à l'espace et qui agit comme une fonction noyau reproduisant pour des valeurs de fonction en w. La fonction ne s'évanouit pas identiquement puisque l'axiome (H1) implique qu'un certain élément de l'espace ait une valeur non nulle en w lorsqu'un certain élément de l'espace ne s'évanouit pas identiquement. L'auto-produit scalaire $K(w, w)$ de la fonction $K(w, z)$ de z est positif. L'axiome (H3) implique la symétrie

$$K(w^{-}, z) = K(w, z^{-})^{-}.$$

Si λ est un nombre non réel, l'ensemble de l'espace qui s'évanouit en λ est un espace de Hilbert de fonctions entières qui est contenu isométriquement dans l'espace donné. La fonction

$$K(w, z) - K(w, \lambda)K(\lambda, \lambda)^{-1}K(\lambda, z)$$

de z appartient au sous-espace et agit comme une fonction noyau reproduisant pour les valeurs de la fonction en w. L'identité

$$\begin{aligned} &[K(w,z) - K(w,\lambda)K(\lambda,\lambda)^{-1}K(\lambda,z)](z-\lambda^-)(w^- - \lambda) \\ &= [K(w,z) - K(w,\lambda^-)K(\lambda^-,\lambda^-)^{-1}K(\lambda^-,z)](z-\lambda)(w^- - \lambda^-) \end{aligned}$$

est une conséquence de l'axiome (H1).

Il existe une fonction entière $E(z)$ de z telle que l'identité

$$K(w,z) = [E(z)E(w)^- - E^*(z)E(w^-)]/[2\pi i(w^- - z)]$$

est vérifiée pour tout nombre complexe z lorsque w n'est pas réel. La fonction entière peut être choisie avec un zéro en λ quand λ est dans le demi-plan inférieur. La fonction est alors unique avec un facteur constant de valeur absolue un. Un espace $\mathcal{H}(E)$ existe et est isométriquement égal à l'espace donné $\mathcal{H}$.

Des exemples [1] d'espaces de Hilbert de fonctions entières qui satisfont les axiomes (H1), (H2), et (H3) sont construits à partir de la fonction poids analytique

$$W(z) = \Gamma(\tfrac{1}{2} - iz)/\Gamma(h - iz)$$

quand $h \geq \frac{1}{2}$. L'espace est contenu isométriquement dans l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ et contient toute fonction entière $F(z)$ telle que les fonctions $F(z)$ et $F^*(z)$ de z appartiennent à l'espace $\mathcal{F}(W)$. L'espace des fonctions entières est isométriquement égal à un espace $\mathcal{H}(E)$ dont la fonction de définition $E(z)$ est calculée [1]. Les propriétés de l'espace motivent la définition d'une classe d'espaces de Hilbert de fonctions entières.

Un espace d'Euler de fonctions entières est un espace de Hilbert de fonctions entières qui satisfait les axiomes (H1), (H2), et (H3) tel qu'une transformation accrétive maximale est définie dans l'espace pour tout h dans l'intervalle $[-1,1]$ en envoyant $F(z)$ sur $F(z+ih)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace.

Théorème 2. *Une transformation accrétive maximale est définie dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}(E)$ de fonctions entières pour un nombre réel h en envoyant $F(z)$ sur $F(z+ih)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace si, et seulement si, il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de fonctions entières qui contient la fonction*

$$\begin{aligned} &[E(z+\tfrac{1}{2}ih)E(w-\tfrac{1}{2}ih)^- - E^*(z+\tfrac{1}{2}ih)E(w^-+\tfrac{1}{2}ih)]/[2\pi i(w^- - z)] \\ &+[E(z-\tfrac{1}{2}ih)E(w+\tfrac{1}{2}ih)^- - E^*(z-\tfrac{1}{2}ih)E(w^- - \tfrac{1}{2}ih)]/[2\pi i(w^- - z)] \end{aligned}$$

de z comme fonction noyau reproduisant pour les valeurs de la fonction en w pour tout nombre complexe w.

Preuve du Théorème 2. L'espace $\mathcal{H}$ est construit à partir du graphe de l'adjoint de la transformation qui envoie $F(z)$ sur $F(z+ih)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace. Un élément

$$F(z) = (F_+(z), F_-(z))$$

du graphe est une paire de fonctions entières de z, qui appartiennent à l'espace $\mathcal{H}(E)$, telles que l'adjoint envoie $F_+(z)$ sur $F_-(z)$. Le produit scalaire

$$\langle F(t), G(t)\rangle = \langle F_+(t), G_-(t)\rangle_{\mathcal{H}(E)} + \langle F_-(t), G_+(t)\rangle_{\mathcal{H}(E)}$$

des éléments $F(z)$ et $G(z)$ du graphe est défini comme la somme des produits scalaires dans l'espace $\mathcal{H}(E)$. Les auto-produits scalaires sont non négatifs puisque l'adjoint d'une transformation accrétive maximale est accrétif.

Un élément
$$K(w,z) = (K_+(w,z), K_-(w,z))$$
du graphe est défini pour tout nombre complexe w par
$$K_+(w,z) = [E(z)E(w - \tfrac{1}{2}ih)^- - E^*(z)E(w^- + \tfrac{1}{2}ih)]/[2\pi i(w^- + \tfrac{1}{2}ih - z)]$$
et
$$K_-(w,z) = [E(z)E(w + \tfrac{1}{2}ih)^- - E^*(z)E(w^- - \tfrac{1}{2}ih)]/[2\pi i(w^- - \tfrac{1}{2}ih - z)]$$
L'identité
$$F_+(w + \tfrac{1}{2}ih) + F_-(w - \tfrac{1}{2}ih) = \langle F(t), K(w,t)\rangle$$
est vérifiée pour tout élément
$$F(z) = (F_+(z), F_-(z))$$
du graphe. Un élément du graphe qui est orthogonal à lui-même est orthogonal à tout élément du graphe.

Une transformation partiellement isométrique du graphe sur un sous-espace dense de l'espace $\mathcal{H}$ est définie en envoyant
$$F(z) = (F_+(z), F_-(z))$$
sur la fonction entière
$$F_+(z + \tfrac{1}{2}ih) + F_-(z - \tfrac{1}{2}ih)$$
de z. La fonction noyau reproduisant pour les valeurs de la fonction en w dans l'espace $\mathcal{H}$ est la fonction
$$\begin{aligned}&[E(z + \tfrac{1}{2}ih)E(w - \tfrac{1}{2}ih)^- - E^*(z + \tfrac{1}{2}ih)E(w^- + \tfrac{1}{2}ih)]/[2\pi i(w^- - z)]\\ +&[E(z - \tfrac{1}{2}ih)E(w + \tfrac{1}{2}ih)^- - E^*(z - \tfrac{1}{2}ih)E(w^- - \tfrac{1}{2}ih)]/[2\pi i(w^- - z)]\end{aligned}$$
de z pour tout nombre complexe w.

Cela complète la construction d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de fonctions entières avec les fonctions noyau reproduisant désirées quand la transformation accrétive maximale existe dans l'espace $\mathcal{H}(E)$. L'argument est renversé pour construire la transformation accrétive maximale dans l'espace $\mathcal{H}(E)$ quand l'espace de Hilbert des fonctions entières avec les fonctions noyau reproduisant désirées existent.

Une transformation est définie dans l'espace $\mathcal{H}(E)$ en envoyant $F(z)$ sur $F(z + ih)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace. Le graphe de l'adjoint est un espace de paires
$$F(z) = (F_+(z), F_-(z))$$
tel que l'adjoint envoie la fonction $F_+(z)$ de z sur la fonction $F_-(z)$ de z. Le graphe contient
$$K(w,z) = (K_+(w,z), K_-(w,z))$$
avec
$$K_+(w,z) = [E(z)E(w - \tfrac{1}{2}ih)^- - E^*(z)E(w^- + \tfrac{1}{2}ih)]/[2\pi i(w^- + \tfrac{1}{2}ih - z)]$$

et

$$K_+(w,z) = [E(z)E(w - \tfrac{1}{2}ih)^- - E^*(z)E(w^- - \tfrac{1}{2}ih)]/[2\pi i(w^- - \tfrac{1}{2}ih - z)]$$

pour tout nombre complexe w. Les éléments $K(w,z)$ du graphe couvrent le graphe d'une restriction de l'adjoint. La transformation dans l'espace $\mathcal{H}(E)$ est recouverte comme l'adjoint de son adjoint restreint.

Un produit scalaire est défini sur le graphe de l'adjoint restreint de telle façon qu'une transformation isométrique du graphe de l'adjoint restreint dans l'espace $\mathcal{H}$ soit définie en envoyant

$$F(z) = (F_+(z), F_-(z))$$

sur

$$F_+(z + \tfrac{1}{2}ih) + F_-(z - \tfrac{1}{2}ih)$$

L'identité

$$\langle F(t), G(t)\rangle = \langle F_+(t), G_-(t)\rangle_{\mathcal{H}(E)} + \langle F_-(t), G_+(t)\rangle_{\mathcal{H}(E)}$$

est vérifiée pour tous les éléments

$$F(z) = (F_+(z), F_-(z))$$

du graphe de l'adjoint restreint. L'adjoint restreint est accrétif puisque les auto-produits scalaires sont non négatifs sur son graphe. L'adjoint est accrétif puisque la transformation dans l'espace $\mathcal{H}(E)$ est l'adjoint de son adjoint restreint.

La propriété accrétive de l'adjoint est exprimée par l'inégalité

$$\|F_+(t) - \lambda^- F_-(t)\|_{\mathcal{H}(E)} \leq \|F_+(t) + \lambda F_-(t)\|_{\mathcal{H}(E)}$$

pour les éléments

$$F(z) = (F_+(z), F_-(z))$$

du graphe quand λ est dans le demi-plan droit. Le domaine de la transformation contractive qui envoie la fonction

$$F_+(z) + \lambda F_-(z)$$

de z sur la fonction

$$F_+(z) - \lambda^- F_-(z)$$

de z est un sous-espace fermé de l'espace $\mathcal{H}(E)$. La propriété accrétive maximale de l'adjoint est la contrainte nécessaire que la transformation contractive soit partout définie pour un certain, et par conséquent pour tout, λ dans le demi-plan droit.

Puisque $K(w,z)$ appartient au graphe pour tout nombre complexe w, une fonction entière $H(z)$ de z qui appartient à l'espace $\mathcal{H}(E)$ et est orthogonale au domaine est une solution de l'équation

$$H(z) + \lambda H(z + i) = 0.$$

La fonction s'évanouit identiquement si elle a un zéro puisque les zéros sont répétés périodiquement avec la période i et puisque la fonction

$$H(z)/E(z)$$

de z est de type borné dans le demi-plan supérieur. L'espace des solutions a pour dimension zéro ou un. La dimension est égale à zéro puisqu'elle est indépendante de λ.

La transformation qui envoie $F(z)$ sur $F(z+ih)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace $\mathcal{H}(E)$ est accrétive maximale puisqu'elle est l'adjoint de son adjoint, qui est accrétif maximal.

Cela termine la preuve du théorème.

La fonction définissante $E(z)$ d'un espace d'Euler de fonctions entières est de classe Hermite puisque la fonction

$$E(z - \tfrac{1}{2}ih)/E(z + \tfrac{1}{2}ih)$$

de z est de type borné et de type à moyenne non positive dans le demi-plan supérieur quand h est dans l'intervalle $(0,1)$. Puisque la fonction est bornée par un sur l'axe réel, elle est bornée par un dans le demi-plan supérieur. Le module de $E(x+iy)$ est une fonction non décroissante de y positif pour tout nombre réel x. Une fonction entière $F(z)$ de z qui appartient à l'espace $\mathcal{H}(E)$ est de classe Hermite si elle n'a pas de zéros dans le demi-plan supérieur et si l'inégalité

$$|F(x - iy)| \leq |F(x + iy)|$$

est vérifiée pour tout nombre réel x quand y est positif.

Dans un espace de Stieltjes donné $\mathcal{H}(E)$, la multiplication par z est la transformation qui envoie $F(z)$ sur $zF(z)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace. La multiplication par z n'a pas besoin d'être une transformation densément définie dans l'espace, mais si elle ne l'est pas, le complément orthogonal du domaine de multiplication par z a pour dimension un. Si $E(z) = A(z) - iB(z)$ pour les fonctions entières $A(z)$ et $B(z)$ de z qui sont réelles pour un réel z, une fonction entière

$$S(z) = A(z)u + B(z)v$$

de z qui appartient au complément orthogonal du domaine de multiplication par z est une combinaison linéaire de $A(z)$ et $B(z)$ avec coefficients complexes u et v. Ce résultat est une conséquence de l'identité

$$[K(w,z)S(w) - K(w,w)S(z)]/(z-w) = [K(w^-,z)S(w^- - K(w^-,w^-)S(z)]/(z-w^-)$$

qui caractérise les fonctions $S(z)$ de z qui appartiennent à l'espace et sont des combinaisons linéaires de u et v. L'identité

$$v^-u = u^-v$$

est alors satisfaite.

Quand la multiplication par z n'est pas densément définie dans un espace de Stieltjes avec la fonction définissante

$$E(b,z) = A(b,z) - iB(b,z)$$

et quand le domaine de multiplication par z contient un élément non nul, la fermeture du domaine de multiplication par z est un espace de Stieltjes avec la fonction définissante

$$E(a,z) = A(a,z) - iB(a,z)$$

qui est isométriquement contenue dans l'espace donné. La fonction définissante peut être choisie de telle façon que l'équation matricielle

$$(A(b,z), B(b,z)) = (A(a,z), B(a,z)) \begin{pmatrix} 1 - \pi u v^- z & \pi u u^- z \\ -\pi v v^- z & 1 + \pi v u^- z \end{pmatrix}$$

soit vérifiée par les nombres complexes u et v tels que

$$v^- u = u^- v$$

Un espace de Stieltjes de dimension r dont les éléments sont des polynômes de degré moindre que r a un polynôme

$$E(r,z) = A(r,z) - iB(r,z)$$

de degré r comme fonction définissante. Un espace de Stieltjes de dimension n dont les éléments sont les polynômes de degré moindre que n et qui est contenu isométriquement dans l'espace donné existe pour tout entier positif n inférieur à r. La fonction définissante

$$E(n,z) = A(n,z) - iB(n,z)$$

de l'espace peut être choisie de telle façon que l'équation matricielle

$$(A(n+1,z), B(n+1,z)) = (A(n,z), B(n,z)) \begin{pmatrix} 1 - \pi u_n v_n^- z & \pi u_n u_n^- z \\ -\pi v_n v_n^- z & 1 + \pi v_n u_n^- z \end{pmatrix}$$

soit satisfaite. La fonction définissante initiale peut être choisie de telle façon que l'équation soit vérifiée quand n est nul avec

$$(A(0,z), B(0,z)) = (1, 0).$$

Un espace de Stieltjes est défini par la fonction

$$E(t,z) = (n+1-t)E(n,z) + (t-n)E(n+1,z)$$

quand $n \le t \le n+1$. L'espace est contenu contractivement dans l'espace de Stieltjes avec comme fonction définissante $E(n+1,z)$ et il contient isométriquement l'espace de Stieltjes de fonction définissante $E(n,z)$.

Une fonction matricielle non décroissante

$$m(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \beta(t) & \gamma(t) \end{pmatrix}$$

de t dans l'intervalle $[0,r]$ est définie par

$$m(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$m(n+1) - m(n) = \begin{pmatrix} \pi u_n u_n^- & \pi v_n u_n^- \\ \pi v_n u_n^- & \pi v_n v_n^- \end{pmatrix}$$

pour tout entier non négatif n moindre que r, et

$$m(t) = (n+1-t)m(n) + (t-n)m(n+1)$$

quand $n < t < n+1$.

L'équation différentielle

$$(A'(t,z), B'(t,z))I = z(A(t,z), B(t,z))m'(t)$$

est satisfaite quand t est dans un intervalle $(n, n+1)$ avec le symbole prime indiquant la différentiation selon t et avec

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $A(t,z)$ et $B(t,z)$ sont des fonctions continues de t, l'équation intégrale

$$(A(b,z), B(b,z))I - (A(a,z), B(a,z))I = z\int_a^b (A(t,z), B(t,z))dm(t)$$

est satisfaite quand a et b sont dans l'intervalle $[0, r]$.

L'équation intégrale pour les espaces de Stieltjes de dimension finie admet une généralisation aux espaces de Stieltjes de dimension infinie. La généralisation s'applique à une fonction continue de t positif dont les valeurs sont les matrices

$$m(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \beta(t) & \gamma(t) \end{pmatrix}$$

à entrées réelles telles que l'inégalité matricielle

$$m(a) \leq m(b)$$

est satisfaite quand a est inférieur à b. On suppose que $\alpha(t)$ est positif quand t est positif, que

$$\lim \alpha(t) = 0$$

lorsque t décroît vers zéro, et que l'intégrale

$$\int_0^1 \alpha(t)d\gamma(t)$$

converge.

Quand a est positif, l'équation intégrale

$$M(a,b,z)I - I = z\int_a^b M(a,t,z)dm(t)$$

admet une unique solution continue

$$M(a,b,z) = \begin{pmatrix} A(a,b,z) & B(a,b,z) \\ C(a,b,z) & D(a,b,z) \end{pmatrix}$$

comme fonction de b supérieur ou égal à a pour tout nombre complexe z. Les entrées de la matrice sont des fonctions entières de z qui sont auto-conjuguées et de classe de Hermite pour tout b. La matrice est de déterminant un. L'identité

$$M(a,c,z) = M(a,b,z)M(b,c,z)$$

est satisfaite quand $a \leq b \leq c$.

Une barre est utilisée pour dénoter la transposée de la conjuguée

$$M^{-} = \begin{pmatrix} A^{-} & C^{-} \\ B^{-} & D^{-} \end{pmatrix}$$

d'une matrice carrée

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$

à entrées complexes et aussi pour le transposé du conjugué

$$c^{-} = (c_{+}^{-}, c_{-}^{-})$$

d'un vecteur colonne

$$c = \begin{pmatrix} c_{+} \\ c_{-} \end{pmatrix}$$

à entrées complexes. L'espace des vecteurs colonnes à entrées complexes est un espace de Hilbert de dimension deux avec pour produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = v^{-} u = v_{+}^{-} u_{+} + v_{-}^{-} u_{-}.$$

Quand a et b sont positifs avec a inférieur ou égal à b, il existe un unique espace de Hilbert $\mathcal{H}(M(a,b))$ dont les éléments sont les paires

$$F(z) = \begin{pmatrix} F_{+}(z) \\ F_{-}(z) \end{pmatrix}$$

de fonctions entières de z telles que la transformation continue de l'espace en un espace de Hilbert de vecteurs colonnes est définie en envoyant $F(z)$ sur $F(w)$ pour tout nombre complexe w et telle que l'adjoint envoie un vecteur colonne c sur l'élément

$$[M(a,b,z) I M(a,b,w)^{-} - I] c / [2\pi (z - w^{-})]$$

de l'espace.

Il existe une fonction entière

$$E(c,z) = A(c,z) - iB(c,z)$$

de z qui est de classe de Hermite pour tout nombre positif c tel que les fonctions entières auto-conjuguées $A(c,z)$ et $B(c,z)$ satisfont l'identité

$$(A(b,z), B(b,z)) = (A(a,z), B(a,z)) M(a,b,z)$$

quand a est inférieur ou égal à b et tel que les fonctions entières

$$E(c,z) \exp[\beta(c) z]$$

de z convergent vers un uniformément sur les sous-ensembles compacts du plan complexe lorsque c décroît vers zéro.

Il existe un espace $\mathcal{H}(E(c))$ pour tout nombre positif c. L'espace $\mathcal{H}(E(a))$ est contenu contractivement dans l'espace $\mathcal{H}(E(b))$ quand a est inférieur ou égal à b. L'inclusion est isométrique sur le complément orthogonal dans l'espace $\mathcal{H}(E(a))$ des éléments qui sont des combinaisons linéaires

$$A(a,z)u + B(a,z)v$$

avec coefficients complexes u et v. Ces éléments forment un espace de dimension zéro ou un puisque l'identité

$$v^- u = u^- v$$

est satisfaite.

Un nombre positif b est dit singulier par rapport à la fonction $m(t)$ de t s'il appartient à un intervalle (a,c) tel que l'égalité est vérifiée dans l'inégalité

$$[\beta(c) - \beta(a)]^2 \leq [\alpha(c) - \alpha(a)][\gamma(c) - \gamma(a)]$$

avec $m(b)$ non égal à $m(a)$ et non égal à $m(c)$. Un nombre positif est dit régulier par rapport à $m(t)$ s'il n'est pas singulier par rapport à la fonction de t.

Si a et c sont des nombres positifs tels que a est inférieur à c et si un élément b de l'intervalle (a,c) est régulier par rapport à $m(t)$, alors l'espace $\mathcal{H}(M(a,b))$ est contenu isométriquement dans l'espace $\mathcal{H}(M(a,c))$ et la multiplication par $M(a,b,z)$ est une transformation isométrique de l'espace $\mathcal{H}(M(b,c))$ sur le complémentaire orthogonal de l'espace $\mathcal{H}(M(a,b))$ dans l'espace $\mathcal{H}(M(a,c))$.

Si a et b sont des nombres positifs tels que a est inférieur à b et si a est régulier par rapport à $m(t)$, alors l'espace $\mathcal{H}(E(a))$ est contenu isométriquement dans l'espace $\mathcal{H}(E(b))$ et une transformation isométrique de l'espace $\mathcal{H}(M(a,b))$ sur le complémentaire orthogonal de l'espace $\mathcal{H}(E(a))$ dans l'espace $\mathcal{H}(E(b))$ est définie en envoyant

$$\begin{pmatrix} F_+(z) \\ F_-(z) \end{pmatrix}$$

sur

$$\sqrt{2}\,[A(a,z)F_+(z) + B(a,z)F_-(z)].$$

Il existe une fonction $\tau(t)$ de t positif à valeurs réelles telle que la fonction

$$m(t) + Iih(t)$$

de t positif à valeurs matricielles est non décroissante pour une fonction $h(t)$ de t à valeurs réelles si, et seulement si, les fonctions

$$\tau(t) - h(t)$$

et

$$\tau(t) + h(t)$$

de t positif sont non décroissantes. La fonction $\tau(t)$ de t, qui est continue et non décroissante, est dite plus grande fonction non décroissante telle que

$$m(t) + Ii\tau(t)$$

est non décroissante. La fonction est unique à addition d'une constante près.

Si a et b sont des nombres positifs tels que a est inférieur à b, la multiplication par

$$\exp(ihz)$$

est une transformation contractive de l'espace $\mathcal{H}(E(a))$ dans l'espace $H(E(b))$ pour un nombre réel h si, et seulement si, les inégalités

$$\tau(a) - \tau(b) \leq h \leq \tau(b) - \tau(a)$$

sont satisfaites. La transformation est isométrique quand a est régulier par rapport à $m(t)$.

Il peut exister une fonction poids analytique $W(z)$ telle que la multiplication par

$$\exp(i\tau(c)z)$$

soit une transformation isométrique de l'espace $\mathcal{H}(E(c))$ dans l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ pour tout nombre positif c qui est régulier par rapport à $m(t)$. La fonction poids analytique est unique à un facteur constant de valeur absolue un près si la fonction

$$\alpha(t) + \beta(t)$$

de t positif est bornée dans la limite de t grand. La fonction

$$W(z) = \lim E(c, z)\exp(i\tau(c)z)$$

peut être choisie comme une limite lorsque c croît à l'infini uniformément sur les sous-ensembles compacts du demi-plan supérieur.

Si la multiplication par

$$\exp(i\tau z)$$

est une transformation isométrique d'un espace $\mathcal{H}(E)$ dans l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ pour un certain nombre réel τ et si l'espace $\mathcal{H}(E)$ contient une fonction entière $F(z)$ à chaque fois que son produit par un polynôme non constant appartient à l'espace, alors l'espace $\mathcal{H}(E)$ est isométriquement égal à l'espace $\mathcal{H}(E(c))$ pour un certain nombre positif c qui est régulier par rapport à $m(t)$.

Les espaces de Hilbert de fonctions entières construits à partir d'une fonction poids d'Euler sont des espaces d'Euler de fonctions entières.

Théorème 3. *Un espace de Hilbert de fonctions entières qui satisfait les axiomes (H1), (H2), et (H3) et qui contient un élément non nul est un espace d'Euler de fonctions entières s'il contient une fonction entière à chaque fois que son produit par un polynôme non constant appartient à l'espace et si la multiplication par* $\exp(i\tau z)$ *est pour un certain nombre réel* τ *une transformation isométrique de l'espace dans l'espace de Hardy pondéré* $\mathcal{F}(W)$ *d'une fonction poids d'Euler* $W(z)$.

Preuve du Théorème 3. On peut supposer que τ s'évanouit puisque la fonction

$$\exp(-i\tau z)W(z)$$

est une fonction poids d'Euler à chaque fois que la fonction $W(z)$ de z est une fonction poids d'Euler.

L'espace de Hilbert donné des fonctions entières est isométriquement égal à un espace $\mathcal{H}(E)$ pour une fonction entière $E(z)$ qui n'a aucun zéro réel puisqu'une fonction entière appartient à l'espace à chaque fois que son produit par un polynôme non constant appartient à l'espace.

Une transformation accrétive est définie dans l'espace $\mathcal{H}(E)$ quand h est dans l'intervalle $[0, 1]$ en envoyant $F(z)$ sur $F(z + ih)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace puisque l'espace est contenu isométriquement dans l'espace $\mathcal{F}(W)$ et puisqu'une transformation accrétive est définie dans l'espace $\mathcal{F}(W)$ en envoyant $F(z)$ sur $F(z + ih)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace. Il reste à prouver la propriété accrétive maximale de la transformation dans l'espace $\mathcal{H}(E)$.

Le théorème d'ordonnancement des espaces de Hilbert de fonctions entières s'applique aux espaces qui satisfont les axiomes (H1), (H2), et (H3) et qui sont contenus isométriquement dans un espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ quand un espace contient une fonction entière à chaque fois que son produit par un polynôme non constant appartient à l'espace. Un espace est proprement contenu dans l'autre quand les deux espaces ne sont pas identiques.

Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de fonctions entières qui satisfait les axiomes (H1) et (H2) et qui contient un élément non nul n'a pas besoin de satisfaire l'axiome (H3). La multiplication par $\exp(iaz)$ est pour un certain nombre réel a une transformation isométrique de l'espace sur un espace de Hilbert de fonctions entières qui satisfont les axiomes (H1), (H2), et (H3).

Un espace $\mathcal{H}$ qui satisfait les axiomes (H1) et (H2) et qui est contenu isométriquement dans l'espace $\mathcal{F}(W)$ est défini comme la fermeture dans l'espace $\mathcal{F}(W)$ de l'ensemble de ces éléments de l'espace des fonctions $F(z+ih)$ de z pour les fonctions $F(z)$ de z appartenant à l'espace $\mathcal{H}(E)$. Un exemple d'une fonction $F(z + ih)$ de z est obtenu pour tout élément de l'espace $\mathcal{H}(E)$ qui est une fonction $F(z)$ de z telle que la fonction $z^2F(z)$ de z appartient à l'espace $\mathcal{H}(E)$. L'espace $\mathcal{H}$ contient une fonction entière à chaque fois que son produit par un polynôme non constant appartient à l'espace.

La fonction

$$E(z)/W(z)$$

de z est de type borné dans le demi-plan supérieur et a la même sorte de type moyen que la fonction

$$E(z + ih)/W(z + ih)$$

de z qui est de type borné dans le demi-plan supérieur. Puisque la fonction

$$W(z + ih)/W(z)$$

de z est de type borné et est de type à moyenne zéro dans le demi-plan supérieur, la fonction

$$E(z + ih)/E(z)$$

de z est de type borné et est de type à moyenne zéro dans le demi-plan supérieur. Si une fonction $F(z)$ de z est un élément de l'espace $\mathcal{H}(E)$ tel que les fonctions

$$F(z)/W(z)$$

et

$$F^*(z)/W(z)$$

de z sont de type de moyenne égal dans le demi-plan supérieur, et sont telles que les fonctions

$$G(z) = F(z + ih)$$

et

$$G^*(z) = F^*(z - ih)$$

de z appartiennent à l'espace $\mathcal{F}(W)$, alors les fonctions

$$G(z)/W(z)$$

et

$$G^*(z)/W(z)$$

de z sont de type de moyenne égal dans le demi-plan supérieur. Il découle de cela que l'espace $\mathcal{H}$ satisfait l'axiome (H3).

L'égalité des espaces $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}(E)$ s'ensuit de cela lorsque l'espace $\mathcal{H}$ est contenu dans l'espace $\mathcal{H}(E)$ et quand l'espace $\mathcal{H}(E)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{H}$.

La fonction $F(z + ih)$ de z appartient à l'espace $\mathcal{H}(E)$ à chaque fois que la fonction $F(z)$ de z appartient à l'espace $\mathcal{H}$ et la fonction $F(z + ih)$ de z appartient à l'espace $\mathcal{F}(W)$ puisque les espaces $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}(E)$ satisfont l'axiome (H3). Si l'espace $\mathcal{H}(E)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{H}$, alors l'espace $\mathcal{H}$ est contenu dans l'espace $\mathcal{H}(E)$. Si l'espace $\mathcal{H}$ est contenu dans l'espace $\mathcal{H}(E)$, alors l'espace $\mathcal{H}(E)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{H}$.

Puisque la transformation T qui envoie $F(z)$ sur $F(z + ih)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace $\mathcal{H}(E)$ est sous-normale, le domaine de l'adjoint T^* de T contient le domaine de T. Un sous-espace dense du graphe de T^* est déterminé par les éléments du domaine de T^* qui appartiennent au domaine de T. La propriété accrétive de T implique la propriété accrétive de T^*. La propriété accrétive maximale de T en découle puisque T est l'adjoint de T^*.

Cela termine la preuve du théorème.

Il existe un espace d'Euler associé de fonctions entières pour toute fonction poids d'Euler : si $W(z)$, est une fonction poids d'Euler, il existe une fonction entière non triviale $F(z)$ de z qui est telle que les fonctions

$$\exp(i\tau z)F(z)$$

et

$$\exp(i\tau z)F^*(z)$$

appartiennent à l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ pour un certain nombre positif τ. L'ensemble de telles fonctions entières est alors un espace d'Euler de fonctions entières qui est envoyé isométriquement dans l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ sur la multiplication par

$$\exp(\pi i\tau z).$$

La construction d'un espace d'Euler associé de fonctions entières se réduit au cas où la fonction

$$|W(x + iy)|$$

de y positif, ou sa réciproque, est non décroissante pour tout nombre réel x. Si la fonction est non décroissante, il existe une fonction entière $E_0(z)$ de classe de Hermite telle que la partie réelle de

$$E_0(z)/W(z)$$

est non négative dans le demi-plan supérieur. L'espace d'Euler de fonctions entières souhaité est facilement construit.

Si la réciproque est non décroissante, alors

$$W(z) = \Gamma(h - iz)W_0(z)$$

pour une fonction poids d'Euler $W_0(z)$ pour laquelle la réciproque est non décroissante et qui satisfait une condition supplémentaire :

$$y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\log|W_0(x+iy)|$$

converge vers zéro dans la limite de y grand pour tout nombre réel x. Puisque $h \geq \frac{1}{2}$, la fonction poids d'Euler

$$\Gamma(h - iz)$$

définit des espaces d'Euler calculables de fonctions entières. La construction d'espaces d'Euler de fonctions entières se réduit au cas où l'hypothèse supplémentaire est satisfaite. Il existe une fonction entière $E_0(z)$ de classe de Hermite telle que la partie réelle de

$$W_0(z)E_0(z)$$

est non négative dans le demi-plan supérieur. Un théorème de Beurling et Malliavin [1] est appliqué pour la construction de l'espace d'Euler de fonctions entières souhaité.

Il existe une fonction entière $E_1(z)$ de classe de Hermite telle que

$$E_1^*(z)E_1(z) = 1 + E_0^*(z)E_0(z)$$

et telle que les inégalités

$$|E_0(z)| < |E_1(z)|$$

et

$$1 < |E_1(z)|$$

sont satisfaites dans le demi-plan supérieur.

La fonction entière $E_1(z)$ est de type borné dans le demi-plan supérieur. La fonction est de type exponentiel τ avec τ le type moyen de la fonction dans le demi-plan supérieur. Elle définit un opérateur τ-local sur les transformées de Fourier dans le calcul opérationnel de Wiener. Pour tout nombre positif a, le domaine de l'opérateur contient une fonction de carré intégrable qui s'évanouit en dehors de l'intervalle $(-a, a)$ et qui ne s'évanouit pas identiquement.

La transformée de Fourier est une fonction entière $F(z)$ de type exponentiel au moins a telle que les fonctions

$$F(z)$$

et

$$E_1(z)F(z)$$

de z sont de carré intégrable sur l'axe réel. La fonction entière

$$E_0(z)F(z)$$

de z est de type exponentiel au plus $\tau + a$ et est de carré intégrable sur l'axe réel.

L'espace d'Euler des fonctions entières souhaité est facilement construit.

Des exemples calculables d'espaces d'Euler de fonctions entières sont construits à partir de la fonction poids d'Euler

$$W(z) = \Gamma(h - iz)/\Gamma(k - iz)$$

quand $h \geq \frac{1}{2}$ et $k \geq \frac{1}{2}$. Un espace de Stieltjes de fonctions entières est défini par la fonction

$$E(a, z) = A(a, z) - iB(a, z)$$

de z pour tout nombre positif a comme l'ensemble des fonctions entières $F(z)$ de z tel que les fonctions

$$a^{-iz}F(z)$$

et

$$a^{-iz}F^*(z)$$

de z dans le demi-plan supérieur appartiennent à l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$.

L'espace à paramètre a est contenu dans l'espace à paramètre b lorsque $a < b$. Les espaces sont contenus isométriquement dans l'espace de Hardy pondéré. Les espaces sont symétriques de part et d'autre de l'origine : la fonction $A(a, z)$ de z est paire et la fonction $B(a, z)$ de z est impaire pour tout nombre positif a.

L'équation intégrale

$$(A(a, z), B(a, z))I - (A(b, z), B(b, z))I = z \int_a^b (A(t, z), B(t, z))dm(t)$$

s'applique quand

$$m(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \beta(t) & \gamma(t) \end{pmatrix}$$

une matrice à valeurs des fonctions non croissantes dont les entrées en dehors de la diagonale

$$\beta(t) = 0$$

s'évanouissent identiquement. La paramétrisation est faite de telle façon que

$$\alpha'(t)\gamma'(t) = 1.$$

La fonction

$$(k - iz)F(z + i)/(h - iz)$$

de z appartient à l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ à chaque fois que la fonction $F(z)$ de z appartient à l'espace. L'identité

$$\langle (k - it)F(t + i)/(h - it), G(t)\rangle = \langle F(t), (k - it)G(t + i)/(h - it)\rangle$$

est satisfaite pour toutes les fonctions $F(z)$ et $G(z)$ de z qui appartiennent à l'espace muni du produit scalaire pris dans l'espace.

La fonction
$$(k - iz)F(z + i)/(h - iz)$$
de z appartient à l'espace de Stieltjes à paramètre a à chaque fois que la fonction $F(z)$ de z appartient à l'espace et s'évanouit en $i - ih$. L'identité

$$\langle (k - it)F(t + i)/(h - it), G(t)\rangle = \langle F(t), (k - it)G(t + i)/(h - it)\rangle$$

est satisfaite pour toutes les fonctions $F(z)$ et $G(z)$ de z qui appartiennent à l'espace et s'évanouissent en $i - ih$.

La fonction poids d'Euler
$$W_-(z) = \Gamma(h - iz)/\Gamma(k - iz)$$
est reliée à la fonction poids d'Euler

$$W_+(z) = \Gamma(h + 1 - iz)/\Gamma(k - iz)$$

par la relation de récurrence
$$W_+(z) = (h - iz)W_-(z)$$
pour la fonction gamma. La multiplication par $h-iz$ est une transformation isométrique de l'espace de Hardy pondéré $F(W_-)$ dans l'espace de Hardy pondéré $F(W_+)$.

Pour tout nombre positif a, la multiplication par $h - iz$ est une transformation isométrique de l'espace de Stieltjes défini par

$$E_-(a, z) = A_-(a, z) - iB_-(a, z)$$

sur l'espace de Stieltjes défini par

$$E_+(a, z) = A_+(a, z) - iB_+(a, z)$$

dont les éléments s'évanouissent en $-ih$.

Les identités
$$\begin{gathered}(h - iz)[B_-(a, z)A_+(a, ih)^- - A_-(a, z)B_+(a, ih)^-] \\ = B_+(a, z)A_+(a, ih)^- - A_+(a, z)B_+(a, h)^-\end{gathered}$$
et
$$\begin{gathered}(h + iz)[B_-(a, z)A_+(a, ih) - A_-(a, z)B_+(a, ih)] \\ = B_+(a, z)A_+(a, ih) - A_+(a, z)B_+(a, h)\end{gathered}$$
sont satisfaites.

Les équations différentielles
$$\frac{\partial}{\partial t}B_-(t, z) = zA_-(t, z)\alpha'_-(t)$$
et
$$-\frac{\partial}{\partial t}A_-(t, z) = zB_-(t, z)\gamma'_-(t)$$

et les équations différentielles

$$\frac{\partial}{\partial t} B_+(t,z) = z A_+(t,z) \alpha'_+(t)$$

et

$$-\frac{\partial}{\partial t} A_+(t,z) = z B_+(t,z) \gamma'_+(t)$$

impliquent les équations

$$\begin{gathered} z[A_-(t,z)\alpha'_-(t)A_+(t,ih) + B_-(t,z)\gamma'_-(t)B_+(t,ih)] \\ -ih[A_-(t,z)\alpha'_+(t)A_+(t,ih) + B_-(t,z)\gamma'_+(t)B_+(t,ih)] \\ = -i[A_+(t,z)\alpha'_+(t)A_+(t,ih) + B_+(t,z)\gamma'_+(t)B_+(t,ih)] \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} z[A_-(t,z)\alpha'_-(t)A_+(t,ih)^- + B_-(t,z)\gamma'_-(t)B_+(t,ih)^-] \\ +ih[A_-(t,z)\alpha'_+(t)A_+(t,ih)^- + B_-(t,z)\gamma'_+(t)B_+(t,ih)^-] \\ = i[A_+(t,z)\alpha'_+(t)A_+(t,ih)^- + B_+(t,z)\gamma'_+(t)B_+(t,ih)^-] \end{gathered}$$

Puisque

$$\begin{gathered} [B_+(t,ih)A_+(t,ih)^- - A_+(t,ih)B_+(t,ih)^-]A_+(t,z) \\ = (h-iz)[B_-(t,z)A_+(t,ih)^- - A_+(t,z)B_+(t,ih)^-]A_+(t,ih) \\ = -(h+iz)[B_+(t,z)A_+(t,ih)^- - A_+(t,z)B_+(t,ih)^-]A_+(t,ih)^- \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} [B_+(t,ih)A_+(t,ih)^- - A_+(t,ih)B_+(t,ih)^-]B_+(t,z) \\ = (h-iz)[B_-(t,z)A_+(t,ih)^- - A_-(t,z)B_+(t,ih)^-]B_+(t,ih) \\ = -(h+iz)[B_-(t,z)A_+(t,ih) - A_-(t,z)B_+(t,ih)]B_+(t,ih)^- \end{gathered}$$

et puisque les fonctions $A_-(t,z)$ et $B_-(t,z)$ de z ne satisfont aucune équation linéaire non triviale avec les fonctions linéaires de z comme coefficients, les équations

$$\begin{gathered} A_+(t,ih)\alpha'_-(t)A_+(t,ih)^- + B_+(t,ih)\gamma'_-(t)B_+(t,ih)^- \\ = A_+(t,ih)\alpha'_+(t)A_+(t,ih)^- + B_+(t,ih)\gamma'_+(t)B_+(t,ih)^- \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} A_+(t,ih)\alpha'_-(t)A_+(t,ih) + B_+(t,ih)\gamma'_-(t)B_+(t,ih) \\ = -A_+(t,ih)\alpha'_+(t)A_+(t,ih) - B_+(t,ih)\gamma'_+(t)B_+(t,ih) \end{gathered}$$

sont satisfaites.

Puisque $A_+(t,ih)$ est réel et puisque $B_+(t,ih)$ est imaginaire, les équations se lisent

$$A_+(t,ih)\alpha'_-(t)A_+(t,ih)^- = B_+(t,ih)\gamma'_+(t)B_+(t,ih)^-$$

et

$$B_+(t,ih)\gamma'_-(t)B_+(t,ih)^- = A_+(t,ih)\alpha'_+(t)A_+(t,ih)^-.$$

Les équations différentielles

$$\frac{\partial}{\partial t} B_+(t,ih) = ih A_+(t,ih) \alpha'_+(t)$$

et

$$-\frac{\partial}{\partial t} A_+(t,ih) = ih B_+(t,ih) \gamma'_+(t)$$

peuvent être réécrites en

$$\frac{\partial}{\partial t} A_+(t,ih) = ih B_+(t,-ih) \alpha'_-(t)$$

et

$$-\frac{\partial}{\partial t} B_+(t, ih) = ihA_+(t, -ih)\gamma'_-(t)$$

Puisque

$$\frac{\partial}{\partial t} B_-(t, ih) = -ihA_-(t, -ih)\alpha'_-(t)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} A_-(t, -ih) = ihB_-(t, -ih)\gamma'_-(t)$$

la dérivée de la fonction

$$A_-(t, -ih)/A_+(t, -ih) + B_-(t, -ih)/B_+(t, -ih)$$

de t s'évanouit identiquement. La fonction est une constante qui est calculée dans la limite si t est grand.

Quand les fonctions $E_-(t, z)$ de z sont normalisées comme habituellement avec la valeur un à l'origine, les fonctions $E_+(t, z)$ de z ont la normalisation non habituelle de valeur h à l'origine.

L'identité

$$A_-(t, -ih)/A_+(t, -ih) + B_-(t, -ih)/B_+(t, -ih) = h^{-1}$$

est satisfaite.

La fonction entière

$$L(a, z) = A_-(a, z)u(a) + B_-(a, z)v(a)$$

de z définie par

$$u(a) = h/A_+(a, -ih)$$

et

$$v(a) = h/B_+(a, -ih)$$

a pour valeur un en $-ih$.

La fonction

$$[F(z + i) - L(a, z)F(i - ih)]/(h - iz)$$

de z appartient à l'espace de Stieltjes défini par

$$E_-(a, z) = A_-(a, z) - iB_-(a, z)$$

à chaque fois que la fonction $F(z)$ de z appartient à l'espace.

L'identité

$$\begin{gathered}\langle F(t + i) + (k - h)[F(t + i) - L(a, t)F(i - ih)]/(h - it), G(t)\rangle \\ = \langle F(t), G(t + i) + (k - h)[G(t + i) - L(a, t)G(i - ih)]/(h - it)\rangle\end{gathered}$$

est vérifiée par toutes les fonctions $F(z)$ et $G(z)$ de z qui appartiennent à l'espace avec le produit scalaire pris dans l'espace.

On otient à partir de l'information pour les familles plus d'espaces de Stieltjes l'information pertinente pour les familles moins d'espaces de Stieltjes. L'indice moins est omis quand la famille moins des espaces est traitée par elle-même. L'identité est appliquée avec suppression du paramètre a.

L'identité se lit

$$\begin{gathered} F(\beta+i)+(k-h)[F(\beta+i)-L(\beta)F(i-ih)]/(h-i\beta) \\ =G(\alpha+i)^-+(k-h)[G(\alpha+i)^- - L(\alpha)^- G(i-ih)^-]/(h+i\alpha^-) \end{gathered}$$

quand

$$F(z)=K(\alpha,z)$$

et

$$G(z)=K(\beta,z)$$

pour les nombres complexes α et β. Explicitement, elle se lit

$$\begin{gathered} K(w,z+i)+(k-h)[K(w,z+i)-L(z)K(w,i-ih)]/(h-iz) \\ =K(w+i,z)+(k-h)[K(w+i,z)-L(w)^- K(i-ih,z)]/(h+iw^-) \end{gathered}$$

pour les nombres complexes z et w. On peut l'écrire

$$\begin{gathered} \{B(z+i)+(k-h)[B(z+i)-L(z)B(i-ih)]/(h-iz) \\ +(k-h)u^-[B(z)A(i-ih)^- - A(z)B(i-ih)^-]/(1-h-iz)\}A(w)^- \\ -\{A(z+i)+(k-h)[A(z+i)-L(z)A(i-ih)]/(h-iz) \\ -(k-h)v^-[B(z)A(i-ih)^- - A(z)B(i-ih)^-]/(1-h-iz)\}B(w)^- \\ =B(z)\{A(w+i)^-+(k-h)[A(w+i)^- - L(w)^- A(i-ih)^-]/(h+iw^-) \\ +(k-h)v[B(i-ih)A(w)^- - A(i-ih)B(w)^-]/(1-h+iw^-)\} \\ -A(z)\{B(w+i)^-+(k-h)[B(w+i)^- - L(w)^- B(i-ih^-)]/(h+iw^-) \\ -(k-h)u[B(i-ih)A(w)^- - A(i-ih)B(w)^-]/(1-h+iw^-)\} \end{gathered}$$

Supposons que h et k ne soient pas égaux. Puisque les fonctions $A(a,z)$ et $B(a,z)$ de z sont linéairement indépendantes, il existe des nombres complexes $p(a), r(a)$, et $s(a)$ tels que

$$\begin{gathered} A(a,z+i)+(k-h)[A(a,z+i)-L(a,z)A(a,i-ih)]/(h-iz) \\ -(k-h)v(a)^-[B(a,z)A(a,i-ih)^- - A(a,z)B(a,i-ih)^-]/(1-h-iz) \\ =A(a,z)s(a)-B(a,z)ir(a) \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} B(a,z+i)+(k-h)[B(a,z+i)-L(a,z)B(a,i-ih)]/(h-iz) \\ -(k-h)u(a)^-[B(a,z)A(a,i-ih)^- - A(a,z)B(a,i-ih)^-]/(1-h-iz) \\ =A(a,z)ip(a)+B(a,z)s(a). \end{gathered}$$

Les nombres $p(a)$, $r(a)$, et $s(a)$ sont réels puisque les fonctions $A(a,z)$ et $B(a,z)$ de z sont auto-conjuguées.

Les équations

$$(k-iz)A(a,z+i)/(h-iz)=A(a,z)P(a,z)+B(a,z)R(a,z)$$

et

$$(k-iz)B(a,z+i)/(h-iz)=A(a,z)Q(a,z)+B(a,z)S(a,z)$$

sont satisfaites avec

$$\begin{gathered} P(a,z)+s(a) \\ =A(a,i-ih)u(a)(k-h)/(h-iz)-B(a,i-ih)^- v(a)^-(k-h)/(1-h-iz) \end{gathered}$$

et

$$Q(a,z)+ip(a)$$
$$= B(a,i-ih)u(a)(k-h)/(h-iz) + B(a,i-ih)^{-}u(a)^{-}(k-h)/(1-h-iz)$$

et

$$R(a,z)-ir(a)$$
$$= A(a,i-ih)v(a)(k-h)/(h-iz) + A(a,i-ih)^{-}v(a)^{-}(k-h)/(1-h-iz)$$

et

$$S(a,z)+s(a)$$
$$= B(a,i-ih)v(a)(k-h)/(h-iz) - A(a,i-ih)^{-}u(a)^{-}(k-h)/(1-h-iz).$$

Les équations

$$(1-k-iz)A(a,z)/(1-h-iz) = A(a,z+i)S(a,z) - B(a,z+i)R(a,z)$$

et

$$(1-k-iz, B(a,z)/(1-h-iz) = -A(a,z+i)Q(a,z) + B(a,z+i)P(a,z)$$

sont obtenues lorsque z est remplacé par $-i-z$.

La consistance des deux ensembles d'équations impose la condition

$$P(a,z)S(a,z) - Q(a,z)R(a,z) = \frac{(k-iz)(1-k-iz)}{(h-iz)(1-h-iz)}.$$

La condition de consistance est équivalente aux équations

$$s(a)^2 - p(a)r(a) = 1$$

et

$$(h+k-1) - (k-h)L(a,ih-i)^2$$
$$= (2h-1)[A(a,ih-i)s(a) - iB(a,ih-i)r(a)]u(a)$$
$$-(2h-1)i[A(a,ih-i)p(a) - iB(a,ih-i)s(a)]v(a).$$

La différentiation selon le paramètre a, l'élimination des fonctions de $z+i$ en faveur de fonctions de z, et la comparaison des coefficients de $A(a,z)$ et $B(a,z)$ donne les équations

$$P'(a,z) = -(z+i)Q(a,z)\gamma'(a) - zR(a,z)\alpha'(a)$$

et

$$Q'(a,z) = (z+i)P(a,z)\alpha'(a) - zS(a,z)\alpha'(a)$$

et

$$R'(a,z) = -(z+i)S(a,z)\gamma'(a) + zP(a,z)\gamma'(a)$$

et

$$S'(a,z) = (z+i)R(a,z)\alpha'(a) + zQ(a,z)\gamma'(a)$$

quand le signe prime dénote la différentiation selon le paramètre.

Les équations différentielles

$$u'(a) = ihv(a)\alpha'(a)$$

et

$$v'(a) = -ihu(a)\gamma'(a)$$

et

$$p'(a) = s(a)\alpha'(a) + 2(h - k)L(a, ih - i)\alpha'(a)$$

et

$$r'(a) = s(a)\gamma'(a) - 2(h - k)L(a, ih - i)\gamma'(a)$$

et

$$p(a)\gamma'(a) = s'(a) = r(a)\alpha'(a)$$

sont satisfaites.

2. Fonctions zeta

La conjecture originale connue sous le nom d'hypothèse de Riemann s'applique à la fonction zeta dont l'identité fonctionnelle a été obtenue par Euler comme une application des séries hypergéométriques. L'analyse de Fourier donne une autre preuve de l'identité fonctionnelle qui peut être généralisée à des fonctions zeta analogues pour lesquelles il y a une conjecture également appelée hypothèse de Riemann.

L'analyse de Fourier est formulée pour tout groupe abélien localement compact. Les groupes qui produisent une fonction zeta sont les complétions d'un groupe initial discret dans des topologies qui sont compatibles avec la structure additive. Le corps discret des nombres rationnels est communément utilisé pour son groupe additif pour créer des fonctions zeta. Le corps gauche discret des quaternions avec des nombres rationnels comme coordonnées est maintenant utilisé parce qu'une preuve de l'hypothèse de Riemann est offerte pour ces fonctions zeta.

La construction des fonctions zeta est motivée par l'algorithme d'Euclide. Un élément du corps gauche discret est dit entier si ses coordonnées sont tous des entiers ou tous des moitiés d'entiers impairs. Les sommes et les produits d'éléments entiers sont entiers. Le conjugué ξ^- d'un élément entier ξ est entier.

L'algorithme d'Euclide s'applique à des paires d'éléments entiers du corps gauche discret.

Le produit cartésien du corps gauche discret avec lui-même est traité comme un espace vectoriel gauche sur le corps gauche discret, avec le produit scalaire indéfini $\langle(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)\rangle = \delta^-\alpha + \gamma^-\beta$ dont les valeurs sont des éléments du corps gauche discret.

Une transformation linéaire de l'espace vectoriel dans lui-même est définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

dont les entrées sont des éléments du corps gauche discret. La transformation envoie un élément (α, β) de l'espace vectoriel sur l'élément

$$(\gamma, \delta) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

On dit que la matrice est symplectique si la transformation est isométrique pour le produit scalaire indéfini. L'identité

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^- & C^- \\ B^- & D^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

caractérise une matrice symplectique.

On dit que la transformation est entière si elle envoie des paires d'éléments entiers du corps gauche discret sur des paires d'éléments entiers du corps gauche discret. La transformation est entière si, et seulement si, les entrées de la matrice sont des éléments entiers du corps gauche discret.

Les matrices symplectiques entières forment un groupe utilisé pour définir une relation d'équivalence sur l'espace vectoriel. L'équivalence de (α, β) et (γ, δ) signifie que

$$(\gamma, \delta) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

pour une matrice appartenant au groupe.

Une formulation de l'algorithme d'Euclide s'applique en présence d'un produit scalaire indéfini. Une paire (α, β) d'éléments du corps gauche discret dont l'auto-produit scalaire

$$\beta^{-}\alpha + \alpha^{-}\beta = 0$$

s'évanouit est équivalente à une paire (γ, δ) pour laquelle

$$\delta = 0$$

s'évanouit.

Puisque α et β peuvent être multipliés par un entier positif, il est suffisant de fournir une vérification quand α et β sont entiers. Si α s'évanouit, la matrice symplectique intégrale souhaitée est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quand ni α ni β ne s'évanouissent, on peut supposer par utilisation de la même matrice que

$$\beta^{-}\beta \leq \alpha^{-}\alpha.$$

Par hypothèse, l'élément entier

$$\beta^{-}\alpha$$

du corps gauche discret est conjugué biaisé.

Il existe un élément entier conjugué biaisé γ du corps gauche discret tel que l'inégalité

$$(\beta^{-}\alpha - \beta^{-}\beta\gamma)^{-}(\beta^{-}\alpha - \beta^{-}\beta\gamma) < (\beta^{-}\beta)^{2}$$

est satisfaite. L'inégalité

$$(\alpha - \beta\gamma)^{-}(\alpha - \beta\gamma) < \beta^{-}\beta$$

est alors satisfaite par une paire équivalente

$$(\alpha - \beta\gamma, \beta) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

puisque la matrice entière

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

est symplectique.

La paire souhaitée d'éléments du corps gauche discret est trouvée par itération.

Les opérateurs de Hecke sont des transformations linéaires sur les fonctions homogènes $f(\xi, \eta)$ de paires d'éléments ξ et η du corps gauche discret qui ont des valeurs égales pour des paires équivalentes :

L'identité
$$f(\alpha, \beta) = f(\gamma, \delta)$$
est satisfaite à chaque fois que
$$(\gamma, \delta) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
pour une matrice entière symplectique
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$
Homogène signifie que l'identité
$$f(\xi, \eta) = f(\omega\xi, \omega\eta)$$
est satisfaite pour tout nombre rationnel positif ω.

Un opérateur de Hecke $\Delta(r)$ est défini pour tout entier positif r. La définition de la transformation s'applique à une représentation de r par des matrices entières.

Une matrice entière
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
est dite représenter un entier positif r si
$$\begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^- & C^- \\ B^- & D^- \end{pmatrix}.$$
Deux telles matrices sont considérées comme équivalentes pour la définition d'opérateur de Hecke si elles sont obtenues l'une à partir de l'autre par multiplication à gauche par une matrice entière symplectique. Toute classe d'équivalence contient une matrice diagonale
$$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$$
telle que
$$r = \omega^- \omega.$$
Deux matrices diagonales sont équivalentes si, et seulement si, elles sont obtenues l'une à partir de l'autre par multiplication à gauche par une matrice diagonale avec entrées égales sur la diagonale qui sont des éléments entiers du corps gauche discret avec inverse entier.

L'opérateur de Hecke $\Delta(r)$ envoie une fonction $f(\xi, \eta)$ de paires d'éléments du corps gauche discret sur la fonction
$$g(\xi, \eta) = \sum f(\xi\omega, \eta\omega)$$

de paires d'éléments du corps gauche discret définie comme une somme sur les classes d'équivalence d'éléments entiers ω du corps gauche qui représente

$$r = \omega^{-}\omega.$$

Des éléments équivalents sont obtenus l'un à partir de l'autre par multiplication à gauche par un élément entier du corps gauche discret à inverse entier.

L'identité

$$\Delta(m)\Delta(n) = \sum \Delta(mn/k^2)$$

est satisfaite par tous les entiers positifs m et n avec sommation sur les diviseurs communs impairs k de m et n.

Les opérateurs de Hecke sont appliqués à des fonctions appartenant à un espace de Hilbert de dimension finie tel qu'une transformation isométrique de l'espace dans lui-même est définie en envoyant une fonction $f(\xi, \eta)$ de paires d'éléments entiers du corps gauche discret sur la fonction $f(\xi\omega, \eta\omega)$ de paires d'éléments entiers du corps gauche discret pour tout élément non nul ω du corps gauche discret.

Les opérateurs de Hecke sont des transformations commutant avec leur auto-adjoint. L'espace de Hilbert est la somme orthogonale de sous-espaces invariants qui sont déterminés par les valeurs propres d'opérateurs de Hecke. La valeur propre $\tau(r)$ de $\Delta(r)$ dans un sous-espace invariant est un nombre réel. L'identité

$$\tau(m)\tau(n) = \sum \tau(mn/k^2)$$

est satisfaite pour tous les entiers positifs m et n avec sommation sur les diviseurs communs impairs k de m et n.

La fonction zeta définie par un sous-espace invariant est la série de Dirichlet

$$Z(s) = \sum \tau(n)n^{-s}$$

dont les coefficients sont les valeurs propres des opérateurs de Hecke. Le produit eulérien

$$1/Z(s) = [1 - \tau(2)2^{-s}] \prod [1 - \tau(p)p^{-s} + p^{-2s}]$$

est pris sur tous les nombres premiers impairs p avec un facteur exceptionnel pour le nombre premier pair.

Un préliminaire à l'hypothèse de Riemann est l'hypothèse de Ramanujan

$$-2 \leq \tau(p) \leq 2$$

pour tout premier impair p et l'hypothèse analogue

$$-1 \leq \tau(2) \leq 1$$

pour le nombre premier pair. Quand ces inégalités sont satisfaites, la série de Dirichlet et son produit eulérien convergent dans le demi-plan $\Re\, s > 1$ et définissent une fonction analytique de s qui n'a aucun zéro dans le demi-plan.

Un autre préliminaire à l'hypothèse de Riemann est le prolongement analytique de la fonction au demi-plan $\Re s > \frac{1}{2}$ avec l'exception possible d'un pôle simple en $s = 1$. Quand ces préliminaires sont complets, l'hypothèse de Riemann énonce que le prolongement analytique n'a aucun zéro dans le demi-plan.

Les espaces de Hilbert des fonctions sur lesquelles des opérateurs de Hecke agissent sont construites en analyse de Fourier sur les prolongements de l'espace vectoriel des paires d'éléments du corps gauche discret dans les topologies qui sont compatibles avec la structure de l'espace vectoriel. Les éléments d'une complétion sont des paires d'éléments de la complétion du corps gauche discret dans les topologies qui sont compatibles avec la structure additive et multiplicative. Une complétion du corps gauche discret est un espace de quaternions dont les coordonnées sont les complétions du corps des nombres rationnels qui sont compatibles avec les structures additive et multiplicative.

Il suffit de traiter deux complétions du corps des nombres rationnels. La complétion dans la topologie de Dedekind est le corps des nombres réels. La mesure canonique pour le groupe additif des nombres réels est la mesure de Lebesgue sur les sous-ensembles de Baire des nombres réels.

Le corps gauche complexe est l'algèbre des quaternions dont les coordonnées sont des nombres réels.

La mesure canonique pour le corps gauche complexe est la mesure du produit cartésien des mesures canoniques pour quatre lignes de coordonnées. Le corps gauche complexe est l'espace des paires d'éléments du corps gauche complexe. La mesure canonique pour le corps gauche projectif complexe est la mesure du produit cartésien des mesures canoniques de deux corps gauches complexes.

Pour les opérateurs de Hecke, les fonctions $f(\xi, \eta)$ de paires d'éléments ξ et η du corps gauche complexe sont homogènes au sens où l'identité

$$f(\xi, \eta) = f(\omega\xi, \omega\eta)$$

est vérifiée pour tout nombre réel positif ω. La condition d'intégrabilité du carré par rapport à la mesure canonique est appliquée à la fonction

$$f(\xi, \eta)/(\xi^- \eta + \eta^- \xi)$$

sur un domaine fondamental.

Il y a deux régions à traiter selon le signe de l'auto-produit scalaire

$$\xi^- \eta + \eta^- \xi,$$

l'une dans laquelle l'auto-produit scalaire est positif et l'autre dans laquelle l'auto-produit scalaire est négatif. L'ensemble dans lequel l'auto-produit scalaire s'évanouit est ignoré puisqu'il est de mesure nulle. L'ensemble sur lequel

$$\eta + \eta^-$$

s'évanouit est ignoré pour la même raison. À nouveau, il y a deux régions dépendant d'un choix du signe. Quand des signes positifs sont choisis, une région fondamentale est définie par

$$\eta + \eta^- = 2.$$

La topologie adique pour les nombres rationnels s'applique à l'intégralité pour sa définition. L'anneau des nombres entiers adiques est isomorphe au produit cartésien des anneaux de nombres p–adiques pris selon tous les nombres premiers p. L'anneau des nombres adiques est l'anneau des quotients de l'anneau des nombres entiers adiques avec des entiers positifs aux dénominateurs. Un nombre adique inversible ω est le produit unique d'un nombre rationnel positif $\lambda(\omega)$ et d'un nombre adique entier avec inverse entier. L'anneau des nombres entiers adiques est compact et a comme mesure un selon la mesure canonique de l'anneau des nombres adiques.

Le corps gauche adique est l'algèbre des quaternions dont les coordonnées sont des nombres adiques.

Un élément du corps gauche adique est entier si ses coordonnées sont toutes entières ou toutes moitiés non entières de nombres adiques entiers. L'anneau des éléments entiers du corps gauche adique est compact et a comme mesure un selon la mesure canonique pour le corps gauche adique. Le corps gauche adique projectif est l'espace des paires d'éléments du corps gauche adique. La mesure canonique pour le corps gauche projectif adique est la mesure produit cartésien des mesures canoniques de deux corps gauches adiques.

Pour les opérateurs de Hecke, la fonction $f(\xi,\eta)$ de paires d'éléments ξ et η dans le corps gauche adique est homogène au sens où l'identité

$$f(\xi,\eta) = f(\omega\xi,\omega\eta)$$

est satisfaite pour tout nombre rationnel positif ω. L'intégrabilité du carré selon la mesure canonique est appliquée à la fonction

$$f(\xi,\eta)/\lambda(\xi^-\eta + \eta^-\xi)$$

sur un domaine fondamental. L'ensemble sur lequel

$$\xi^-\eta + \eta^-\xi$$

est non inversible est ignoré puisque il a pour mesure zéro. L'ensemble sur lequel

$$\eta + \eta^-$$

est non inversible est ignoré pour la même raison. Un domaine fondamental est défini par

$$\lambda(\eta + \eta^-) = 2.$$

Le corps gauche adélique est le produit cartésien du corps gauche complexe et du corps gauche adique. Un élément ξ du corps gauche adélique a une composante ξ_+ dans le corps gauche complexe et une composante ξ_- dans le corps gauche adique. La mesure canonique pour le corps gauche adélique est la mesure du produit cartésien de la mesure canonique pour le corps gauche complexe et de la mesure canonique pour le corps gauche adique.

Puisqu'un élément ω du corps gauche discret est un élément du corps gauche complexe et un élément du corps gauche adique, le produit

$$\eta = \xi\omega$$

d'un élément ξ du corps gauche adélique et d'un élément ω du corps gauche discret est défini par

$$\eta_+ = \xi_+\omega$$

et

$$\eta_- = \xi_-\omega.$$

La multiplication par ω est une mesure préservant la transformation selon la mesure canonique pour le corps gauche adélique.

Les opérateurs de Hecke sont appliqués dans les espaces de Hilbert dont les éléments sont des fonctions homogènes $f(\xi, \eta)$ de paires d'éléments ξ et η du corps gauche adélique telles que l'identité

$$f(\gamma, \delta) = f(\alpha, \beta)$$

est satisfaite à chaque fois que

$$(\gamma, \delta) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

pour une matrice entière symplectique

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

avec des entrées dans le corps gauche discret.

L'opérateur de Hecke $\Delta(r)$ envoie une fonction $f(\xi, \eta)$ de paires d'éléments du corps gauche adélique sur une fonction

$$g(\xi, \eta) = \sum f(\xi\omega, \eta\omega)$$

de paires d'éléments du corps gauche adélique définie par sommation sur les classes d'équivalence d'éléments ω du corps gauche discret qui représente

$$r = \omega^{-}\omega.$$

L'équivalence des éléments non nuls du corps gauche discret signifie qu'ils sont obtenus les uns des autres par multiplication à gauche par un élément entier du corps gauche discret avec inverse entier.

Les espaces de Hilbert de dimension finie sur lesquels les opérateurs de Hecke agissent sont obtenus comme sous-espaces invariants pour un groupe compact de transformations isométriques commutant. Les transformations sont définies par les éléments ω du corps gauche adélique à inverse conjugué qui envoient une fonction $f(\xi, \eta)$ de paires d'éléments du corps gauche adélique sur les fonctions $f(\omega\xi, \eta)$ et $f(\xi, \omega\eta)$ de paires d'éléments du corps gauche adélique.

L'hypothèse de Riemann est une conséquence d'un phénomène en analyse de Fourier que Fourier a appelé le flux de chaleur. Puisque le générateur infinitésimal du flux de chaleur est un opérateur différentiel, un opérateur intégral inverse est nécessaire pour une application à des groupes abéliens compacts qui n'ont pas de structure différentielle.

La généralisation du flux de chaleur est faite par une transformation de Radon. Les caractéristiques importantes de la transformation est qu'elle est accrétive maximale et qu'elle a un adjoint sous-normal.

Une transformation est sous-normale si elle est la restriction d'une transformation normale à un sous-espace invariant. Une expansion spectrale d'une transformation sous-normale est attendue de l'expansion spectrale d'une transformation normale. Une expansion spectrale d'une transformation de Radon est en effet obtenue de cette manière et elle est appelée transformation de Laplace. La trasnformation de Radon est alors unitairement équivalente à la multiplication par une fonction dans un espace de Hilbert de fonctions de carré intégrable selon une mesure non négative.

Une transformation de Laplace pour le corps gauche complexe s'applique à un espace de Hilbert de fonctions analytiques dans le demi-plan supérieur qui sont de carré intégrable selon une mesure non négative. L'adjoint de la transformation de Radon est unitairement équivalent à la multiplication par

$$i/z$$

où z est la variable indépendante du plan complexe. La propriété accrétive est immédiate puisque le multiplicande a une partie réelle positive dans le demi-plan supérieur. La propriété accrétive maximale est vérifiée en montrant que l'adjoint est accrétif. L'adjoint est calculé sur les éléments de l'espace de Hilbert dont le produit scalaire par une fonction assigne la valeur de la fonction à un élément du demi-plan supérieur.

Une transformation de Laplace pour le corps gauche adique imite l'expansion spectrale pour la transformation de Radon pour le corps gauche complexe. Tous les calculs pour le corps gauche se réduisent à des calculs dans les espaces de Hilbert de dimension finie. Quand la propriété accrétive maximale est vérifiée dans les espaces de Hilbert de dimension finie arbitraire, elle découle immédiatement dans les espaces de Hilbert de dimension infinie.

Une transformation de Laplace pour le corps gauche adélique combine une transformation de Laplace pour le corps gauche complexe et une transformation de Laplace pour le corps gauche adique. Le domaine de la transformation de Laplace pour le corps gauche adélique est un produit tensoriel du domaine d'une transformation de Laplace pour le corps gauche complexe et du domaine d'une transformation de Laplace pour le corps gauche adique. Les fonctions dans le cas adélique sont définies sur un espace qui est le produit cartésien d'un espace sur lequel les fonctions sont définies dans le cas complexe et d'un espace sur lequel les fonctions sont définies dans le cas adique. Le multiplicande dans le cas adélique a des valeurs qui sont produits des valeurs du multiplicande dans le cas complexe et des valeurs du multiplicande dans le cas adique. Puisque les valeurs du multiplicande pour le corps gauche complexe ont des parties réelles positives et puisque les valeurs du multiplicande pour le corps gauche adique sont positives, les valeurs du multiplicande pour le corps gauche adélique ont une partie réelle positive. La vérification de la propriété accrétive maximale pour le corps gauche adélique est faite dans un calcul fini.

Il n'y a pas d'obstacle à la preuve de l'hypothèse de Riemann quand la fonction zeta n'a pas de singularité à l'unité dans le plan complexe. L'argument échoue dans le cas singulier parce que la transformation de Radon pour l'algèbre adique commute avec une transformation isométrique qui est sa propre inverse. L'espace de Hilbert a une décomposition orthogonale en un sous-espace de fonctions de parité paire et un sous-espace de fonctions de parité impaire. La transformation isométrique multiplie une fonction de parité paire et une fonction de parité impaire par moins un. Le graphe de la transformation de Radon se décompose en le graphe de la transformation de Radon sur les fonctions de parité paire et le graphe de la transformation de Radon sur les fonctions de parité impaire. La transformation de Radon agit comme une transformation accrétive maximale sur les fonctions de parité paire. Cette information est suffisante pour une preuve de l'hypothèse de Riemann dans le cas singulier.

La preuve de l'hypothèse de Riemann crée un système mécanique canonique à la fonction spectrale duquel la fonction zeta contribue à un facteur. Un problème fondamental est de déterminer si un système mécanique est déterminé par sa fonction spectrale. Le problème est traité dans certains espaces de Hilbert de fonctions entières dont l'étude a démarré avec Stieltjes. Il a traité les systèmes mécaniques qui sont finis. Un traitement axiomatique des espaces de Stieltjes élimine les conditions de finitude. Un théorème fondamental [1] énonce que le système mécanique est en effet déterminé par ses propriétés spectrales.

Les applications de l'hypothèse de Riemann nécessitent que le système mécanique soit déterminé par une fonction zeta ainsi que par les facteurs d'une fonction gamma dans une fonction spectrale. La preuve de l'hypothèse de Riemann est traitée comme un calcul du système mécanique.

3. Analyse harmonique d'un corps gauche complexe

Les fonctions poids d'Euler et les espaces de Stieltjes associés de fonctions entières sont construits en analyse harmonique sur un corps gauche complexe.

Le plan oblique complexe est le corps gauche des quaternions dont les coordonnées sont des nombres réels. La topologie du plan oblique complexe est la topologie produit cartésien des topologies des quatre lignes de coordonnées. L'addition est continue comme transformation du produit cartésien du corps gauche complexe avec lui-même dans le plan oblique complexe.

La multiplication par un élément du plan oblique complexe à gauche ou à droite est une transformation continue du plan oblique complexe dans lui-même. La conjugaison est une transformation continue du plan oblique complexe dans lui-même.

Le plan oblique complexe est un groupe abélien localement compact. Les sous-ensembles de Baire d'un groupe abélien localement compact sont la plus petite classe d'ensembles qui contient les ensembles ouverts et les ensembles fermés, qui contient toute union dénombrable d'ensembles de la classe, et qui contient tout complément d'un ensemble de la classe. La transformation qui envoie ξ sur

$$\xi + \eta$$

envoie des ensembles de Baire sur des ensembles de Baire pour tout élément η du groupe.

Une mesure canonique pour un groupe abélien localement compact est une mesure non négative sur ses sous-ensembles de Baire qui est finie sur les ensembles compacts, qui est positive sur les ensembles ouverts non vides, telle que la transformation qui envoie ξ sur $\xi + \eta$ préserve la mesure pour tout élément η du groupe.

Les mesures canoniques existent et sont uniques à un facteur constant près. Il y a habituellement accord à propos du choix de la mesure canonique. La mesure canonique pour la ligne réelle est la mesure de Lebesgue, qui a pour valeur un sur l'intervalle $(0, 1)$. La mesure canonique pour le plan oblique complexe est la mesure produit cartésien des mesures canoniques des quatre lignes de coordonnées.

Le module d'un élément ξ du plan oblique complexe est le nombre réel non négatif $\lambda(\xi)$ tel que

$$\lambda(\xi)^2 = \xi^- \xi.$$

La multiplication à gauche ou à droite par un élément ξ du plan oblique complexe multiplie la mesure canonique du corps gauche par un facteur égal à

$$\lambda(\xi)^4.$$

La fonction

$$\exp(2\pi i\xi)$$

d'éléments auto-conjugués ξ du plan oblique complexe est un homomorphisme continu du groupe additif du corps des éléments auto-conjugués dans le groupe multiplicatif des nombres complexes de valeur absolue un.

La transformation de Fourier pour un plan oblique complexe est l'unique transformation isométrique de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique dans lui-même qui envoie une fonction intégrable $f(\xi)$ de ξ sur une fonction continue

$$g(\xi) = \int \exp(\pi i(\xi^- \eta + \eta^- \xi)) f(\eta) d\eta$$

de ξ définie par intégration selon la mesure canonique. L'inversion de Fourier

$$f(\xi) = \int \exp(-\pi i(\xi^- \eta + \eta^- \xi)) g(\eta) d\eta$$

s'applique avec l'intégration selon la mesure canonique quand la fonction $g(\xi)$ de ξ est intégrable et la fonction $f(\xi)$ de ξ est continue.

La transformation de Fourier pour le corps gauche complexe commute avec les transformations isométriques de l'espace de Hilbert dans lui-même définies en envoyant une fonction $f(\xi)$ de ξ dans les fonctions $f(\omega\xi)$ et $f(\xi\omega)$ de ξ pour tout élément ω du corps gauche complexe avec conjugué comme inverse. L'espace de Hilbert se décompose en une somme orthogonale de sous-espaces invariants sous l'action des transformations.

Un homomorphisme du groupe multiplicatif des éléments non nuls du corps gauche complexe sur le groupe multiplicatif de la demi-droite positive est défini en envoyant ξ sur $\xi^-\xi$.

L'identité

$$\int |f(\xi^- \xi)|^2 d\xi = \pi^2 \int |f(\xi)|^2 \xi d\xi$$

est satisfaite par intégration à gauche selon la mesure canonique pour le corps gauche complexe et par intégration à droite selon la mesure de Lebesgue pour toute fonction de Baire $f(\xi)$ de ξ dans la demi-droite positive.

L'espace de Hilbert des polynômes homogènes de degré ν est l'ensemble des fonctions

$$\xi = t + ix + jy + kz$$

de ξ dans le corps gauche complexe qui sont des combinaisons linéaires des monômes

$$x^a y^b z^c t^d$$

dont les exposants sont des entiers non négatifs avec somme

$$\nu = a + b + c + d.$$

Les monômes constituent un ensemble orthogonal avec

$$\frac{a!b!c!d!}{\nu!}$$

comme auto-produit scalaire du monôme avec les exposants a, b, c, et d. La fonction

$$2^{-\nu}(\eta^{-}\xi + \xi^{-}\eta)^{\nu}$$

de ξ dans le corps gauche appartient à l'espace pour tout élément η du plan oblique complexe et agit comme fonction noyau reproduisant pour les valeurs de la fonction en η.

Les transformations isométriques de l'espace de Hilbert des polynômes homogènes de degré ν dans lui-même sont définies en envoyant une fonction $f(\xi)$ de ξ dans le plan oblique complexe sur les fonctions $f(\omega\xi)$ et $f(\xi\omega)$ de ξ dans le plan oblique complexe pour tout élément ω du plan oblique complexe avec conjugué comme inverse.

Le laplacien

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \partial^2 \partial z^2$$

envoie les polynômes homogènes de degré ν sur les polynômes homogènes de degré $\nu - 2$ quand ν est supérieur à un et annihile les polynômes de degré inférieur. Le laplacien commute avec les transformations qui envoient une fonction $f(\xi)$ de ξ dans le plan oblique complexe sur les fonctions $f(\omega\xi)$ et $f(\xi\omega)$ de ξ dans le plan oblique complexe pour tout élément ω du plan oblique complexe avec conjugué comme inverse.

La multiplication par $\xi^{-}\xi$ est une transformation continue de l'espace de Hilbert des polynômes homogènes de degré ν dans l'espace de Hilbert des polynômes homogènes de degré $\nu + 2$ pour tout entier non négatif ν. L'adjoint a le même noyau que le laplacien comme transformation de l'espace de Hilbert des polynômes homogènes de degré $\nu + 2$ dans l'espace de Hilbert des polynômes homogènes de degré ν.

Un polynôme homogène de degré ν est dit harmonique s'il est annihilé par le laplacien. Les polynômes homogènes $f(\omega\xi)$ et $f(\xi\omega)$ de degré ν sont harmoniques pour tout élément ω du plan oblique complexe avec conjugué comme inverse si le polynôme homogène $f(\xi)$ de degré ν est harmonique.

L'espace de Hilbert des polynômes homogènes harmoniques de degré ν est le complémentaire orthogonal dans l'espace des polynômes homogènes de degré ν de produits de $\xi^{-}\xi$ avec polynômes homogènes de degré $\nu - 2$ quand r est supérieur à un. L'espace des polynômes homogènes de degré ν a pour dimension

$$(1 + \nu)(2 + \nu)(3 + \nu)/6.$$

L'espace des polynômes homogènes harmoniques de degré ν a pour dimension

$$(1 + \nu)^2.$$

La fonction

$$2^{-\nu}(\xi^{-}\eta + \eta^{-}\xi)\nu + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\nu - k)!}{k!(\nu - 2k)!} 2^{\nu - 2k}(\xi^{-}\eta + \eta^{-}\xi)^{\nu - 2k} \left(-\frac{\xi^{-}\xi}{4}\right)^{k}$$

de ξ dans le plan oblique complexe appartient à l'espace des polynômes homogènes harmoniques de degré ν pour tout élément η du plan oblique complexe et agit comme fonction noyau reproduisant pour les valeurs de la fonction en η, $2n$ égal à ν quand r est pair et égal à $\nu - 1$ quand ν est impair.

La frontière du disque, qui est l'ensemble des éléments du plan oblique complexe avec conjugué comme inverse est un espace de Hausdorff dans la topologie du sous-espace héritée du plan oblique complexe. La mesure canonique pour l'espace est la mesure non négative principalement unique sur ses sous-ensembles de Baire tels que les transformations préservant la mesure sont définies sur la multiplication à droite et à gauche par un élément de l'espace. L'unicité est obtenue en supposant que l'espace complet a comme mesure

$$\pi^2.$$

Un homomorphisme du groupe multiplicatif des éléments non nuls du plan oblique complexe sur le demi-plan défini en envoyant ξ sur $\xi^-\xi$ envoie la mesure canonique pour le plan oblique complexe sur la mesure dont la valeur sur un ensemble de Baire E est l'intégrale de Lebesgue

$$\pi^2 \int t dt$$

sur l'ensemble E. La mesure canonique pour le plan oblique complexe est le produit cartésien de la mesure canonique pour la frontière du disque et une mesure sur les sous-ensembles de Baire de la demi-droite positive.

Le plan complexe est le corps dont les éléments sont les éléments du plan oblique complexe qui commutent avec i. L'espace complémentaire du plan complexe dans le plan oblique complexe est l'ensemble des éléments ξ du plan oblique complexe qui satisfont l'identité

$$\xi\eta = \eta^-\xi$$

pour tout élément ξ du plan complexe. Le plan complexe et son espace complémentaire sont des groupes abéliens localement compacts dont les mesures canoniques sont les mesures produits cartésiens des mesures canoniques des deux lignes de coordonnées. Le plan oblique complexe est le produit cartésien du plan complexe et de son espace complémentaire. La mesure canonique pour le plan oblique complexe est la mesure produit cartésien de la mesure canonique pour le plan complexe et de la mesure canonique pour son espace complémentaire.

La multiplication sur la gauche et sur la droite par un élément ξ du plan complexe multiplie la mesure canonique du plan complexe par un facteur de

$$\lambda(\xi)^2$$

et la mesure canonique de l'espace complémentaire par le même facteur. La multiplication sur la gauche ou sur la droite par un élément ξ de l'espace complémentaire envoie la mesure canonique du plan complexe sur la mesure canonique de l'espace complémentaire multipliée par le même facteur et envoie la mesure canonique pour l'espace complémentaire sur la mesure canonique pour le plan complexe multipliée par le même facteur.

La transformation de Fourier pour un plan complexe est la transformation isométrique unique de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique dans lui-même qui envoie une fonction intégrable $f(\xi)$ de ξ sur la fonction continue

$$g(\xi) = \int \exp(\pi i(\xi^-\eta + \eta^-\xi))f(\eta)d\eta$$

de ξ définie par intégration selon la mesure canonique. L'inversion de Fourier

$$f(\xi) = \int \exp(-\pi i(\xi^-\eta + \eta^-\xi))g(\eta)d\eta$$

s'applique avec l'intégration selon la mesure canonique quand la fonction $g(\xi)$ de ξ est intégrable et la fonction $f(\xi)$ de ξ est continue.

La transformation de Radon de l'harmonique ϕ est définie pour le plan oblique complexe quand un polynôme homogène harmonique non trivial $\phi(\xi)$ de ξ dans le plan oblique complexe a comme degré ν. Le domaine et le domaine image de la transformation sont contenus dans l'espace de Hilbert des fonctions $f(\xi)$ de ξ dans le plan oblique complexe qui sont de carré intégrable selon la mesure canonique pour le plan oblique complexe et satisfont l'identité

$$\phi(\xi)f(\omega\xi) = \phi(\omega\xi)f(\xi)$$

pour tout élément ω du plan oblique complexe avec conjugué comme inverse.

La transformation de Radon de l'harmonique ϕ envoie une fonction $f(\xi)$ de ξ dans le plan oblique complexe sur la fonction $g(\xi)$ de ξ dans le plan oblique complexe quand l'identité

$$g(\omega\xi)/\phi(\omega\xi) = \int f(\omega\xi + \omega\eta)/\phi(\omega\xi + \omega\eta)d\eta$$

est satisfaite pour ξ dans le plan complexe pour tout élément ω du plan oblique complexe avec conjugué comme inverse avec l'intégration selon la mesure canonique pour l'espace complémentaire sur le plan complexe dans le plan oblique complexe.

L'intégrale est une limite d'intégrales sur les sous-espaces compacts de l'espace complémentaire qui contiennent $\omega\xi$ pour tout élément ω du plan oblique complexe avec conjugué comme inverse à chaque fois qu'ils contiennent ξ. La convergence est dans la topologie faible de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique pour le plan oblique complexe.

Le demi-plan supérieur est l'ensemble des éléments $z = x + iy$ du plan complexe tels que $y > 0$ est positif. Le demi-plan supérieur est un sous-ensemble ouvert du plan complexe. Le demi-plan supérieur est un espace de Hausdorff localement compact dans la topologie de sous-espace héritée du plan complexe. La mesure canonique pour le demi-plan supérieur est la restriction aux sous-ensembles de Baire du demi-plan supérieur de la mesure canonique pour le plan complexe.

La fonction continue $\exp(\pi i\xi)$ des éléments auto-conjugués du plan complexe a une unique extension continue à la fermeture du demi-plan complexe qui est analytique et bornée par un dans le demi-plan supérieur.

La fonction

$$\phi(\xi)\exp(\pi i\eta\xi^-\xi)$$

de ξ dans le plan oblique complexe est une fonction propre de la transformation de Radon de l'harmonique ϕ pour la valeur propre

$$i/\eta$$

pour tout élément η du demi-plan supérieur.

La transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est une décomposition spectrale de l'adjoint de la transformation de Radon de l'harmonique ϕ. Le polynôme harmonique est supposé avoir une norme égale à un dans l'espace de Hilbert des polynômes homogènes de degré ν.

Le domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est l'ensemble des fonctions

$$f(\xi) = \phi(\xi)h(\xi^-\xi)$$

de ξ dans le plan oblique complexe qui sont de carré intégrable selon la mesure canonique et qui sont paramétrées par des fonctions de Baire $h(\xi)$ de ξ dans le demi-plan supérieur satisfaisant l'identité

$$h(\xi) = h(\eta)$$

à chaque fois que ξ et η sont des éléments du demi-plan supérieur satisfaisant la contrainte

$$\xi^-\xi = \eta^-\eta.$$

L'identité

$$\int |f(\xi)|^2 d\xi = \pi \int \lambda(\xi)^\nu |h(\xi)|^2 d\xi$$

est satisfaite avec intégration sur la gauche selon la mesure canonique pour le plan oblique complexe et intégration à droite selon la mesure canonique pour le demi-plan supérieur.

Toute fonction de Baire $h(\xi)$ de ξ dans le demi-plan supérieur satisfaisant la contrainte pour laquelle l'intégrale sur la droite converge paramétrise un élément du domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ.

La transformation de Laplace de l'harmonique ϕ de la fonction $f(\xi)$ de ξ dans le plan oblique complexe est la fonction analytique

$$h^\wedge(\eta) = \int \lambda(\xi)^\nu h(\xi) \exp(\pi i \xi \eta) d\xi$$

de η dans le demi-plan supérieur définie par intégration selon la mesure canonique pour le demi-plan supérieur.

L'identité

$$\int |h^\wedge(\xi)|^2 \lambda(\xi - \xi^-)^\nu d\xi = \pi \pi^{-\nu} \Gamma(1+\nu) \int \lambda(\xi)^\nu |h(\xi)|^2 d\xi$$

est satisfaite avec intégration selon la mesure canonique pour le demi-plan supérieur.

Toute fonction analytique $h^\wedge(\xi)$ de ξ dans le demi-plan supérieur pour laquelle l'intégrale sur la droite converge appartient au domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ.

L'adjoint de la transformation de Radon de l'harmonique ϕ est unitairement équivalent sous la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ par multiplication par la fonction

$$i/\xi$$

de ξ dans le demi-plan supérieur dans l'espace de Hilbert des fonctions analytiques qui est le domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ.

Les propriétés des transformations de Laplace sont établies dans la notation pour les fonctions analytiques d'une variable complexe.

La fonction analytique

$$K(w,z) = \pi \int_0^\infty t^\nu \exp(-\pi i t w^-) \exp(\pi i t z) t dt = \frac{\pi \Gamma(2+\nu)}{[\pi i(w^- - z)]^{2+\nu}}$$

de z appartient à l'espace quand w est dans le demi-plan supérieur et agit comme fonction noyau reproduisant pour les valeurs de la fonction en w.

Une transformation isométrique de l'espace sur lui-même est définie quand la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

a des entrées réelles et un déterminant égal à un en envoyant une fonction analytique $F(z)$ de z dans le demi-plan supérieur sur une fonction analytique

$$\frac{1}{(Cz+D)^{2+\nu}} F\left(\frac{Az+B}{Cz+D}\right)$$

de z dans le demi-plan supérieur.

L'adjoint de la transformation de Radon de l'harmonique ϕ envoie une fonction $f(\xi)$ de ξ dans le plan oblique complexe sur une fonction $g(\xi)$ de ξ dans le plan oblique complexe quand l'identité

$$\int \phi(\xi)^- g(\xi) \exp(\pi i z \xi^- \xi) d\xi = (i/z) \int \phi(\xi)^- f(\xi) \exp(\pi i z \xi^- \xi) d\xi$$

est satisfaite quand z est dans le demi-plan supérieur avec intégration selon la mesure canonique pour le plan oblique complexe. La transformation est accrétive maximale.

La transformation de Fourier pour le plan oblique complexe de la fonction

$$\phi(\xi) \exp(\pi i z \xi^- \xi)$$

de ξ dans le plan oblique complexe est la fonction

$$i^\nu (i/z)^{2+\nu} \phi(\xi) \exp(-\pi i z^{-1} \xi^- \xi)$$

de ξ dans le plan oblique complexe quand z est dans le demi-plan supérieur.

Puisque la transformation de Fourier commute avec les transformations qui envoient une fonction $f(\xi)$ de ξ sur les fonctions $f(\omega\xi)$ et $f(\xi\omega)$ de ξ pour tout élément ω du plan oblique complexe avec conjugué comme inverse, il est suffisant de faire la vérification quand

$$\phi(t + ix + jy + kz) = (t + ix)^\nu.$$

La vérification se réduit à montrer que la transformation de Fourier pour le plan complexe de la fonction

$$\xi^\nu \exp(\pi i z \xi^- \xi)$$

de ξ dans le plan complexe est la fonction

$$i^\nu (i/z)^{1+\nu} \xi^\nu \exp(-\pi i z^{-1} \xi^- \xi)$$

de ξ dans le plan complexe. Il est suffisant par prolongement analytique de faire la vérification quand z appartient à l'axe imaginaire. Il reste par un changement de variable à montrer que la transformation de Fourier de la fonction

$$\xi^\nu \exp(-\pi\xi^-\xi)$$

de ξ dans le plan complexe est la fonction

$$i^\nu \xi^\nu \exp(-\pi\xi^-\xi)$$

de ξ dans le plan complexe.

L'identité souhaitée en découle puisque

$$i^\nu \xi^\nu \exp(-\pi\xi^-\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^\nu \int \frac{(\pi i\xi^-\xi)^k (\pi i\eta^-\eta)^{\nu+k}}{k!(\nu+k)!} \exp(-\pi\eta^-\eta) d\eta$$

où

$$\exp(\pi i(\xi^-\eta + \eta^-\xi)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi i\xi^-\eta + \pi i\eta^-\xi)^n}{n!}$$

et

$$(\pi i\xi^-\eta + \pi i\eta^-\xi)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\pi i\eta^-\xi)^{n-2k} (\pi i\xi^-\xi k(\pi i\eta^-\eta)^k}{k!(n-k)!}$$

où

$$\int (\pi i\eta^-\eta)^{\nu+k} \exp(-\pi\eta^-\eta) d\eta = i^{\nu+k}(\nu+k)!$$

et

$$i^\nu \exp(-\pi\xi^-\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} i^{\nu+k} \frac{(\pi i\xi^-\xi)^k}{k!}.$$

Les intégrations sont selon la mesure canonique pour le plan complexe. Les échanges entre sommation et intégration sont justifiés par la convergence absolue.

Si une fonction $f(\xi)$ de ξ dans le plan oblique complexe est de carré intégrable selon la mesure canonique et satisfait l'identité

$$\phi(\xi)f(\omega\xi) = \phi(\omega\xi)f(\xi)$$

pour tout élément ω du plan oblique complexe avec conjugué comme inverse, alors sa transformation de Fourier est une fonction $g(\xi)$ de ξ dans le plan oblique complexe qui est de carré intégrable selon la mesure canonique et qui satisfait l'identité

$$\phi(\xi)g(\omega\xi) = \phi(\omega\xi)g(\xi)$$

pour tout élément ω du plan oblique complexe avec conjugué comme inverse. Les transformations de Laplace de l'harmonique ϕ sont les fonctions $F(z)$ et $G(z)$ de z dans le demi-plan supérieur qui satisfont l'identité

$$G(z) = i^\nu (i/z)^{2+\nu} F(-1/z).$$

La transformation de Fourier pour le plan oblique complexe d'une fonction

$$f(\xi) = \phi(\xi)h(\xi^-\xi)$$

de ξ dans le plan oblique complexe est une fonction

$$f'(\xi) = \phi(\xi)h'(\xi^- \xi)$$

de ξ dans le plan oblique complexe qui satisfait l'identité

$$\pi \int_0^\infty t^\nu \exp(\pi itz)h'(t)tdt = i^\nu (i/z)^{2+\nu} \pi \int_0^\infty t^\nu \exp(-\pi it/z)h(t)tdt$$

pour z dans le demi-plan supérieur.

Un calcul de la fonction $h'(t)$ de t est fait à partir de la fonction $h(t)$ de t par la transformation de Hankel d'ordre $1+\nu$, dont la définition classique est faite à partir d'une fonction de Bessel. Une définition équivalente est faite à partir de la série hypergéométrique confluente

$$F(1+\nu; z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!(1+\nu+n)!}.$$

L'identité

$$h'(t) = i^\nu \pi^{2+\pi} \int_0^\infty x^\nu F(1+\nu; -\pi^2 tx)h(x)xdx$$

est satisfaite quand l'intégrale est absolument convergente. La transformation est sinon définie de telle façon que l'identité suivante soit conservée

$$\pi \int_0^\infty t^\nu |h'(t)|^2 tdt = \pi \int_0^\infty t^\nu |h(t)|^2 tdt.$$

Pour la vérification que la transformation calcule la transformation de Fourier, il suffit de montrer que

$$h'(t) = i^\nu \exp(\pi itz)$$

quand

$$h(t) = (i/z)^{2+\nu} \exp(-\pi it/z).$$

Il suffit par prolongement analytique de vérifier l'identité quand $z = iy$ appartient à l'axe imaginaire. L'identité souhaitée se réduit par changements de variable au cas $y = \pi$ et $t = 1$. L'identité est vérifiée après un échange de la sommation et de l'intégration à partir des identités

$$(1+\nu+n)! = \int_0^\infty t^{1+\nu+n} \exp(-t)dt$$

et

$$\exp(-t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-t)^n}{n!}.$$

Comme transformations de Laplace, une fonction et sa transformée de Fourier deviennent une paire de fonctions analytiques $f(z)$ et $g(z)$ de z dans le demi-plan supérieur telles que

$$g(z) = i^\nu (i/z)^{2+\nu} f(-1/z).$$

Une transformation qui est sa propre inverse est obtenue en omettant le facteur de i^ν. Une transformation de Laplace d'ordre ν est la somme unique d'une transformation de Laplace d'une fonction auto-réciproque, qui est sa propre transformation de Hankel d'ordre ν, et la transformation de Laplace d'une fonction biais-réciproque, qui est moins sa propre transformation de Hankel d'ordre

ν. Le calcul des transformations de Hankel est un calcul de fonctions auto-réciproques et de fonctions biais-réciproques.

Une décomposition de l'espace de Hilbert de transformées de Laplace d'ordre ν est une conséquence de l'expansion

$$\frac{\pi\Gamma(2+\nu)}{[\pi i(w^- - z)]^{2+\nu}} = \sum_{k=0}^{2+\nu} \frac{(2+\nu)!}{k!(2+\nu-k)!} \frac{1}{(zw^-)^{2+\nu}} \frac{\pi\Gamma(2+\nu)}{[\pi i(w^- - 1/\omega^- - z + 1/z)]^{2+\nu}}.$$

Pour tout $k = 0, ..., 2+\nu$, un espace de Hilbert de fonctions analytiques dans le demi-plan supérieur apparaît qui a la fonction

$$\frac{1}{(zw^-)^k} \frac{\pi\Gamma(2+\nu)}{[\pi i(w^- - 1/w^- - z + 1/z)]^{2+\nu}}$$

de z comme fonction noyau reproduisant pour les valeurs de la fonction en w quand w est dans le demi-plan supérieur. Une transformation isométrique de l'espace de Hilbert des transformées de Laplace d'ordre ν sur l'espace est définie en envoyant une fonction analytique $f(z)$ de z dans le demi-plan supérieur sur la fonction analytique

$$(i/z)^k f(z - 1/z)$$

de z dans le demi-plan supérieur.

Une fonction analytique

$$h_k^\wedge(z) = (i/z)^k \pi \int_0^\infty t^\nu \exp(\pi i t(z - 1/z)) h_k(t) t dt$$

de z dans le demi-plan supérieur qui appartient à l'espace est représentée par une fonction de Baire $h_k(t)$ de t positif tel que l'intégrale

$$\pi \int_0^\infty t^\nu |h_k(t)|^2 dt$$

converge.

Le domaine de la transformation de Laplace d'ordre $1+\nu$ est la somme non-orthogonale des espaces composantes définis pour $k = 0, ..., 2+\nu$. La décomposition est faite par une généralisation du concept de complément orthogonal.

Si un espace de Hilbert $\mathcal{P}$ est contenu contractivement dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, il existe un espace de Hilbert unique $\mathcal{Q}$, qui est contenu contractivement dans $\mathcal{H}$ tel que tout élément

$$c = a + b$$

de $\mathcal{H}$ soit la somme d'un élément a de $\mathcal{P}$ et d'un élément b de $\mathcal{Q}$, tel que l'inégalité

$$\|c\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|a\|_{\mathcal{P}}^2 + \|b\|_{\mathcal{Q}}^2$$

est satisfaite pour toute décomposition de c, et tel qu'il existe une décomposition pour laquelle l'égalité est vérifiée.

La décomposition minimale est unique et est obtenue quand a est obtenu à partir de c sous l'adjoint de l'inclusion de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{H}$ et b est obtenu à partir de c sous l'adjoint de l'inclusion de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{H}$.

L'espace de Hilbert $\mathcal{H}_k$ des fonctions analytiques construites pour tout $k = 0, ..., 2+\nu$ est contenu continuement dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui est le domaine de la transformation de Laplace d'ordre ν. Si une fonction analytique $F_k(z)$ de z est choisie dans l'espace $\mathcal{H}_k$ pour tout $k = 0, ..., 2+\nu$, la fonction analytique

$$F(z) = \sum_{k=0}^{2+\nu} \frac{(2+\nu)!}{k!(2+\nu-k)!} F_k(z)$$

de z appartient à l'espace $\mathcal{H}$ et satisfait l'inégalité

$$\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{k=0}^{2+\nu} \frac{(2+\nu)!}{k!(2+\nu-k)!} \|F_k\|_{\mathcal{H}_k}^2.$$

Toute fonction analytique $F(z)$ de z qui appartient à l'espace $\mathcal{H}$ est une somme de fonctions analytiques $F_k(z)$ de z pour laquelle l'égalité est satisfaite.

Quand w est dans le demi-plan supérieur, la décomposition minimale de

$$F(z) = \frac{\pi\Gamma(2+\nu)}{[\pi i(w^- - z)]^{2+\nu}}$$

est obtenue avec

$$F_k(z) = \frac{1}{(zw^-)^k} \; \frac{\pi\Gamma(2+\nu)}{[\pi i(w^- - 1/w^- - z + 1/z)]^{2+\nu}}$$

pour tout $k = 0, ..., 2+\nu$.

Un calcul des décompositions minimales s'applique à la construction de Sonine des fonctions qui s'évanouissent dans un voisinage de l'origine et dont la transformation de Hankel d'ordre ν s'évanouit dans le même voisinage. La transformation de Sonine d'ordre ν est une variante de la transformation de Hankel d'ordre ν.

Si $h(t)$ est une fonction de Baire de t positif telle que l'intégrale

$$\pi \int_0^\infty t^\nu |h(t)|^2 t dt$$

converge et si la fonction analytique

$$h^\wedge(z) = \pi \int_0^\infty t^\nu \exp(\pi i t z) h(t) t dt$$

de z est sa transformation de Laplace d'ordre ν, alors la décomposition minimale

$$h^\wedge(z) = \sum_{k=0}^{2+\nu} \frac{(2+\nu)!}{k!(2+\nu-k)!} \left(\frac{i}{k}\right)^k h_k(z - 1/z)$$

est obtenue avec

$$h_k^\wedge(z) = \pi \int_0^\infty t^\nu \exp(\pi i t z) h_k(t) t dt$$

où

$$h_0(t) = h(t) - \pi^2 t \int_t^\infty F(1; -\pi^2 t(x-t)) h(x) dx$$

et
$$h_k(t) = \pi^k \int_t^\infty (x-t)^{k-1} F(k-1; -\pi^2 t(x-t)) h(x) dx$$
quand $k > 0$. L'équation
$$\frac{dh_k}{dt}(t) = -\pi h_{1+k}(t) - \pi h_{k-1}(t)$$
est satisfaite quand $0 < k < 2 + \nu$. L'identité
$$\pi \int_0^\infty t^\nu |h(t)|^2 t dt = \sum_{k=0}^{2+\nu} \frac{(2+\nu)!}{k!(2+\nu-k)!} \pi \int_0^\infty t^\nu |h_k(t)|^2 t dt$$
est satisfaite.

La transformation de Mellin est la transformation de Fourier pour la demi-droite positive. Une transformation de Mellin d'ordre ν est définie quand une fonction analytique
$$h^\wedge(z) = \pi \int_0^\infty t^\nu \exp(\pi i t z) h(t) t dt$$
est la transformation de Laplace d'ordre ν d'une fonction de Baire $h(t)$ de t positif, telle que l'intégrale
$$\pi \int_0^\infty t^\nu |h(t)|^2 t dt$$
converge, qui s'évanouit dans l'intervalle $(0, a)$ pour un certain nombre positif a.

La transformation de Mellin d'ordre ν est la fonction analytique $F(z)$ de z dans le demi-plan supérieur définie par l'intégrale
$$\pi F(z) = \int_0^\infty h^\wedge(it) t^{\frac{1}{2}\nu - iz} dt$$
ou de façon équivalente par l'intégrale
$$F(z) = W(z) \int_0^\infty h(t) t^{\frac{1}{2}\nu + iz} dt$$
où
$$W(z) = \pi^{-\frac{1}{2}\nu - 1 + iz} \Gamma(\tfrac{1}{2}\nu + 1 - iz)$$
est une fonction poids d'Euler.

La fonction analytique
$$a^{-iz} F(z)$$
de z dans le demi-plan supérieur appartient à l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$. Toute fonction qui appartient à l'espace de Hardy pondéré est obtenue ainsi.

Un espace de Stieltjes des fonctions entières envoyé isométriquement dans l'espace de Hardy pondéré en envoyant une fonction entière $F(z)$ de z sur la fonction analytique
$$a^{-iz} F(z)$$
de z dans le demi-plan supérieur est défini comme l'ensemble de toutes les fonctions entières $F(z)$ de z telles que les fonctions analytiques
$$a^{-iz} F(z)$$

et

$$a^{-iz}F^*(z)$$

appartiennent à l'espace de Hardy pondéré.

Les éléments de l'espace de Stieltjes sont les transformations de Mellin d'ordre ν des fonctions dans le domaine de la transformation de Laplace d'ordre ν qui s'évanouissent dans l'intervalle $(0, a)$ et dont la transformation de Hankel d'ordre ν s'évanouit dans le même intervalle. Les fonctions sont construites à partir de la décomposition de l'espace des transformations de Laplace d'ordre ν.

Si $h(t)$ et

$$h'(t) = t\frac{d}{dt}h(t)$$

sont des fonctions de Baire de t positif telles que les intégrales

$$\pi \int_0^\infty t^\nu |h(t)|^2 t dt$$

et

$$\pi \int_0^\infty t^\nu |h'(t)|^2 t dt$$

convergent, si

$$h_0(t) = h(t) - \pi^2 t \int_t^\infty F(1; -\pi^2 t(x-t))h(x)dx$$

et

$$h'_0(t) = h'(t) - \pi^2 t \int_t^\infty F(1; -\pi^2 t(x-t))h'(x)dx,$$

et si

$$h_k(t) = \pi^k \int_t^\infty (x-t)^{k-1} F(k-1; -\pi^2 t(x-t))h(x)dx$$

et

$$h'_k(t) = \pi^k \int_t^\infty (x-t)^{k-1} F(k-1; -\pi^2 t(x-t))h'(x)dx$$

quand $k > 0$, alors

$$-h'_k(t) = t\frac{d}{dt}h_k(t) + kh_k(t) + 2\pi t h_{k-1}(t)$$

quand $k > 0$ et

$$h'_k(t) = t\frac{d}{dt}h_k(t) - kh_k(t) + 2\pi t h_{1+k}(t)$$

quand $k < 2 + \nu$.

L'identité

$$\sum_{k=0}^{2+0} \frac{(2+\nu)!}{k!(2+\nu-k)!} \int_a^\infty t^\nu [h'_k(t)^- h_k(t) + h_k(t)^- h'_k(t) + (2+\nu)h_k(t)^- h_k(t)] t dt$$
$$= \sum_{k=0}^{1+\nu} \frac{(1+\nu)!}{k!(1+\nu-k)!} a^{2+\nu} [h_{2+\nu-k}(a)^- h_{2+\nu-k}(a) - h_k(a)^- h_k(a)]$$

est satisfaite quand $a > 0$.

Une fonction $\Phi_k(t, z)$ de t positif est définie pour tout complexe a quand $k = 0, ..., 2 + \nu$ par l'intégrale

$$\pi \Phi_k(a, z) = \int_0^\infty t^{-k} \exp(-\pi a(t + t^{-1})) t^{\frac{1}{2}\nu - iz} dt.$$

Les équations différentielles

$$-(iz - \tfrac{1}{2}\nu - 1)\Phi_k(t,z) = t\tfrac{d}{dt}\Phi_k(t,z) + k\Phi_k(t,z) + 2\pi t\Phi_{k-1}(t,z)$$

sont satisfaites quand $k > 0$ et

$$(iz - \tfrac{1}{2}\nu - 1)\Phi_k(t,z) = t\tfrac{d}{dt}\Phi_k(t,z) - k\Phi_k(t,z) + 2\pi t\Phi_{k+1}(t,z)$$

quand $k < 2 + \nu$.

L'identité

$$\sum_{k=0}^{2+\nu} \frac{(2+\nu)!}{k!(2+\nu-k)!} \int_a^\infty t^\nu \Phi_k(t,z)\Phi_k(t,w)^- tdt$$
$$= \sum_{k=0}^{1+\nu} \frac{(1+\nu)!}{k!(1+\nu-k)!} a^{2+\nu}[\Phi_k(a,z)\Phi_k(a,w)^- - \Phi_{2+\nu-k}(a,z)\Phi_{2+\nu-k}(a,w)^-]/[i(w^- - z)]$$

est satisfaite pour tous complexes z et w quand $a > 0$.

Si la fonction $h_k(t)$ de t est la transformation de Sonine d'ordre k d'une fonction $h(t)$ de t pour $k = 0, ..., 2 + \nu$, alors

$$\int_0^\infty t^\nu \exp(-\pi ty)h(t)tdt = \sum_{k=0}^{2+\nu} \frac{(2+\nu)!}{k!(2+\nu-k)!} y^{-k} \int_0^\infty t^\nu \exp(-\pi t(y + y^{-1}))h_k(t)tdt$$

pour tout nombre positif y.

Si la fonction $h(t)$ de t s'évanouit dans un voisinage de l'origine, sa transformation de Mellin d'ordre ν est une fonction analytique $F(z)$ de z dans le demi-plan supérieur définie par l'intégrale

$$F(w) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(t)\exp(-\pi ty)y^{\frac{1}{2}\nu - iw} tdtdy$$

quand w est dans le demi-plan supérieur.

Quand la fonction $h_k(t)$ de t s'évanouit dans un voisinage de l'origine pour tout $k = 0, ..., 2 + \nu$, la fonction $F(z)$ de z a un prolongement analytique au plan complexe. L'identité

$$F(z) = \sum_{k=0}^{2+\nu} \frac{(2+\nu)!}{k!(2+\nu-k)!} \pi \int_0^\infty t^\nu \Phi_k(t,z)h_k(t)tdt$$

est satisfaite.

Un exemple calculable est obtenu dans le cas $\nu = -1$, qui n'apparaît pas en analyse de Fourier sur le plan oblique complexe. Les fonctions

$$\pi\Phi_0(a,z) = \int_0^\infty \exp(-\pi a(t + t^{-1}))t^{-\frac{1}{2} - iz} dt$$

et

$$\pi\Phi_1(a,z) = \int_0^\infty t^{-1} \exp(-\pi a(t + t^{-1}))t^{-\frac{1}{2} - iz} dt$$

satisfont l'équation

$$\int_a^\infty [\Phi_0(t,z)\Phi_0(t,w)^- + \Phi_1(t,z)\Phi_1(t,w)^-]dt$$
$$= a[\Phi_0(a,z)\Phi_0(a,w)^- - \Phi_1(a,z)\Phi_1(a,w)^-]/[i(w^- - z)]$$

pour tous complexes z et w quand $a > 0$. Les conditions de symétrie

$$\Phi_1(a,z) = \Phi_0(a,-z) = \Phi_0^*(a,z)$$

sont satisfaites.

Il existe un espace de Stieltjes de fonctions entières défini par la fonction

$$E(a,z) = A(a,z) - iB(a,z)$$

où

$$A(a,z) = \tfrac{1}{2}a^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \exp(-\pi a(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^2)(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})t^{-iz}t^{-1}dt$$

et

$$B(a,z) = \tfrac{1}{2}ia^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \exp(-\pi a(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})^2)(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})t^{-iz}t^{-1}dt$$

Les équations différentielles

$$a\,\frac{d}{da}\,A(a,z) = zB(a,z)\exp(4\pi a)$$

et

$$a\,\frac{d}{da}\,B(a,z) = -zA(a,z)\exp(-4\pi a)$$

sont satisfaites.

Une construction de fonctions poids d'Euler est obtenue en appliquant la transformation de Mellin. La transformation de Mellin reformule la transformation de Fourier pour la droite réelle sur le groupe multiplicatif de la demi-droite positive. Les fonctions poids analytiques construites à partir de la fonction gamma apparaissent quand la transformation de Mellin est adaptée au domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ.

La transformation de Mellin de l'harmonique ϕ de la fonction $f(\xi)$ de ξ dans le plan oblique complexe est la fonction analytique $F(z)$ de z dans le demi-plan supérieur qui est définie quand $f(\xi)$ s'évanouit dans le disque $\xi^-\xi < a$ pour un certain nombre positif a. La fonction est définie par l'intégrale

$$\pi F(z) = \int_0^\infty g(it)t^{\frac{1}{2}\nu - iz}dt.$$

Puisque

$$g(iy) = \pi \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}\nu}h(t)\exp(-\pi ty)tdt$$

quand y est positif, l'identité

$$F(z)/W(z) = \int_0^\infty h(t)t^{\frac{1}{2}\nu + iz}dt$$

est satisfaite par la fonction poids d'Euler

$$W(z) = \pi^{-\frac{1}{2}\nu - 1 + iz}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\nu + 1 - iz\right).$$

L'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)/W(x+iy)|^2 dx = 2\pi \int_0^\infty |h(t)|^2 t^{\nu-2y} t dt$$

est satisfaite quand y est positif.

La fonction analytique

$$a^{-iz}F(z)$$

de z dans le demi-plan supérieur appartient à l'espace de Hardy pondéré $\mathcal{F}(W)$ puisque la fonction $f(\xi)$ de ξ dans le plan oblique complexe s'évanouit quand $\xi^-\xi < a$. Une fonction analytique $F(z)$ de z dans le demi-plan supérieur telle que la fonction

$$a^{-iz}F(z)$$

de z appartient à l'espace $\mathcal{F}(W)$ est la transformation de Mellin d'une fonction $f(\xi)$ de ξ dans le plan oblique complexe qui appartient au domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ et s'évanouit dans le disque $\xi^-\xi < a$.

L'adjoint de la transformation de Radon pour le plan oblique complexe envoie les éléments du domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ qui s'évanouissent dans le disque $\xi^-\xi < a$ sur les éléments de l'espace qui s'évanouissent dans le disque. La transformation agit comme une transformation accrétive maximale sur le sous-espace. L'adjoint est une transformation accrétive maximale qui est unitairement équivalente à la multiplication par

$$i/z$$

dans l'espace de Hilbert qui est l'image du sous-espace sous la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ. Quand $\xi^-\xi < 1$ est le disque unité, la transformation est unitairement équivalente à la transformation qui envoie $F(z)$ sur $F(z-i)$ à chaque fois que les fonctions de z appartiennent à l'espace $\mathcal{F}(W)$.

4. Analyse harmonique d'un corps gauche adique

Le plan oblique adique est construit comme un groupe compact abélien qui est la complétion du plan oblique discret dans une topologie adique. La topologie adique est initialement définie sur le groupe des éléments intégrals.

La multiplication par un entier positif r envoie le groupe additif des éléments intégrals du plan oblique discret sur le sous-groupe dont le groupe quotient est le groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo r.

La topologie discrète est l'unique topologie de Hausdorff du groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo r. L'addition est continue comme transformation du produit cartésien du groupe avec lui même dans le groupe. La conjugaison est continue comme transformation du groupe dans lui-même.

La topologie adique du groupe des éléments intégrals du plan oblique discret est la plus petite topologie selon laquelle l'homomorphisme dans le groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo r est continue pour tout entier positif. L'addition est continue comme transformation du produit cartésien du groupe avec lui-même dans le groupe. La conjugaison est continue comme transformation du produit cartésien du groupe dans lui-même.

Le groupe des éléments intégrals du plan oblique est la complétion du groupe des éléments intégrals du plan oblique discret dans la topologie adique rendue uniforme par la structure additive. L'addition s'étend continuement comme transformation du produit cartésien du groupe avec lui-même dans le groupe. La conjugaison s'étend continuement comme transformation du produit cartésien du groupe dans lui-même.

L'homomorphisme du groupe des éléments intégrals du plan oblique discret sur le groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo r s'étend continuement comme homomorphisme du groupe des éléments intégrals du plan oblique adique sur le groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo r pour tout entier positif r.

Les images d'un élément du groupe des éléments intégrals du plan oblique adique satisfont une contrainte. Si r et s sont des entiers positifs tels que r est un diviseur de s, il existe un homomorphisme canonique du groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo s sur le groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo r qui envoie l'image modulo s d'un élément intégral du plan oblique discret sur son image modulo r. L'homomorphisme envoie l'image d'un élément du groupe des éléments intégrals du plan oblique adique dans le groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo s sur son image dans le groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo r.

Si un élément du groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo r est choisi pour tout entier positif r satisfaisant la contrainte, alors il existe un unique élément du groupe des éléments intégrals du plan oblique adique dont l'image dans le groupe des éléments intégrals du plan oblique adique modulo r est l'élément choisi.

Le groupe des éléments intégrals du plan oblique adique est un espace compact de Hausdorff.

La multiplication par un entier positif r est un isomorphisme du groupe des éléments intégrals du plan oblique discret dans lui-même qui est continue pour la topologie adique. La multiplication par r a une extension continue comme isomorphsme du groupe des éléments intégrals du plan oblique adique dans lui-même. L'isomorphisme inverse est continu quand on donne au sous-groupe sa topologie de sous-espace héritée du groupe complet. Le sous-groupe est un sous-ensemble ouvert compact du groupe complet.

Le plan oblique adique est un groupe abélien localement compact qui contient le groupe des éléments intégrals comme sous-groupe ouvert compact. La multiplication par un entier positif est un isomorphisme continu du plan oblique adique dans lui-même dont l'isomorphisme inverse est continu. Le plan oblique discret est un sous-groupe dense du plan oblique adique.

La mesure canonique pour le plan oblique adique est choisie pour avoir la valeur un sur le sous-groupe des éléments intégrals.

La multiplication à gauche ou à droite par un élément non nul ξ du plan oblique discret est un homomorphisme continu du plan oblique discret dans lui même pour la topologie adique et se prolonge continuement comme homomorphisme du plan oblique adique dans lui-même. La transformation multiplie la mesure canonique du plan continu adique par un facteur de

$$\lambda(\xi)^{-4}.$$

L'homomorphisme du groupe additif du corps des nombres rationnels dans le groupe multiplicatif des nombres complexes de valeur absolue un défini comme envoyant ξ sur

$$\exp(2\pi i\xi)$$

est continu pour la topologie adique puisque son noyau est l'ensemble des entiers. La transformation a un prolongement continu unique comme homomorphisme de la complétion des nombres rationnels dans le groupe multiplicatif des nombres complexes de valeur absolue un.

La transformation de Fourier pour le plan oblique adique est l'unique transformation isométrique de l'espace de Hilbert de carré intégrable selon la mesure canonique pour le plan oblique adique dans lui-même qui envoie une fonction intégrable $f(\xi)$ de ξ dans la fonction continue

$$g(\xi) = \int \exp(\pi i(\xi^{-}\eta + \eta^{-}\xi))f(\eta)d\eta$$

de ξ définie par intégration selon la mesure canonique pour le plan oblique adique.

L'inversion de Fourier énonce que l'intégrale

$$f(\xi) = \int \exp(-\pi i(\xi^{-}\eta + \eta^{-}\xi))g(\eta)d\eta$$

selon la mesure canonique pour le plan oblique adique représente la fonction $f(\xi)$ de ξ quand la fonction $g(\xi)$ de ξ est intégrable et la fonction $f(\xi)$ de ξ est continue. La transformation de Fourier du plan oblique continu commute avec la transformation qui envoie une fonction $f(\xi)$ de ξ dans les fonctions $f(\omega\xi)$ de ξ pour tout élément ω de la complétion adique du corps gauche de Gauss avec conjugué comme inverse.

Le plan oblique p-adique est défini pour un nombre premier p de la même manière que le plan oblique adique excepté que seuls les entiers positifs r qui sont acceptés sont des puissances de p. Le plan oblique p-adique est un groupe abélien localement compact qui est l'image du plan oblique adique sous l'homomorphisme canonique envoyant les éléments intégrals sur des éléments intégrals. L'homomorphisme est défini sur le groupe des éléments intégrals du plan oblique adique comme l'unique extension continue de l'homomorphisme canonique du groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo s dans le groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo r qui existe quand r est un diviseur de s tel que r est une puissance de p et s/r n'est pas divisible par p.

Il existe un homomorphisme canonique du groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo s dans le groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo s/r. Le théorème des restes chinois énonce qu'il existe un isomorphisme du groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo s dans le produit cartésien du groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo r et du groupe des éléments intégrals du plan oblique discret modulo s/r.

Le groupe des éléments intégrals du plan oblique adique est isomorphe au produit cartésien du groupe des éléments intégrals du plan oblique p-adique et d'un groupe qui est défini de la même façon que le plan oblique adique excepté que seuls les entiers positifs r qui ne sont pas divisibles par p sont acceptés.

Le groupe des éléments intégrals du plan oblique adique est isomorphe au produit cartésien du groupe des éléments intégrals du plan oblique p-adique pris sur tous les nombres premiers p. La topologie du groupe des éléments intégrals du plan oblique adique est la topologie du produit cartésien du groupe des éléments intégrals du plan oblique p-adique pris sur tous les nombres premiers p. La mesure canonique du groupe des éléments intégrals du plan oblique adique est le produit cartésien de la mesure canonique du groupe des éléments intégrals du plan oblique p-adique pris sur tous les nombres premiers p.

Un théorème, accrédité par Diophante mais dont la preuve la plus ancienne est attribuée à Lagrange, énonce que tout entier positif est la somme de quatre carrés d'entiers. Il existe un élément intégral ι_p du plan oblique gaussien pour tout nombre premier p tel que

$$p = \iota_p^- \iota_p.$$

Quand une telle représentation de p est choisie, un plan p-adique est défini comme l'ensemble des éléments ξ du plan oblique p-adique qui commute

$$\iota_p \xi = \xi \iota_p$$

avec ι_p. Le plan p-adique qui apparaît ici est un espace vectoriel de dimension deux sur le corps des nombres p-adiques.

L'espace complémentaire au plan p-adique dans le plan oblique p-adique est l'ensemble des éléments ξ du plan oblique p-adique qui satisfont l'identité

$$\xi \eta = \eta^- \xi$$

pour tout élément η du plan p-adique. Tout élément du plan oblique p-adique dans l'unique somme d'un élément du plan p-adique et d'un élément de l'espace complémentaire quand p est impair. Les éléments du plan p-adique et de l'espace complémentaire sont intégrals si l'élément du plan oblique p-adique est intégral.

Le plan p-adique et son espace complémentaire sont des groupes abéliens localement compacts dont les mesures canoniques sont choisies de telle façon que les sous-groupes compacts des éléments intégrals aient comme mesure un. La mesure canonique pour le plan p-adique est la mesure produit cartésien de la mesure canonique pour le plan p-adique et de la mesure canonique pour l'espace complémentaire du plan p-adique dans le plan oblique p-adique.

Le plan adique est l'ensemble des éléments du plan oblique adique dont la composante p-adique appartient au plan p-adique pour tout nombre premier p. L'espace complémentaire au plan adique dans le plan oblique adique est l'ensemble des éléments du plan oblique adique dont la composante p-adique appartient à l'espace complémentaire au plan p-adique dans le plan oblique p-adique pour tout nombre premier p.

Le plan adique et le plan oblique adique sont des groupes abéliens localement compacts dont les mesures canoniques sont choisies de telle façon que les sous-groupes compacts des éléments intégrals aient comme mesure un. La mesure canonique pour le plan oblique adique est la mesure produit cartésien de la mesure canonique pour le plan adique et de la mesure canonique pour l'espace complémentaire du plan adique dans le plan oblique adique.

La transformation de Fourier pour le plan adique est l'unique transformation isométrique de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique pour le plan adique dans lui-même qui envoie une fonction intégrable $f(\xi)$ de ξ sur une fonction continue

$$g(\xi) = \int \exp(\pi i(\xi^- \eta + \eta^- \xi)) f(\eta) d\eta$$

de ξ définie par intégration selon la mesure canonique. L'inversion de Fourier

$$f(\xi) = \int \exp(-\pi i(\xi^- \eta + \eta^- \xi)) g(\eta) d\eta$$

s'applique avec l'intégration selon la mesure canonique quand la fonction $g(\xi)$ de ξ est intégrable et la fonction $f(\xi)$ de ξ est continue.

Les représentations irréductibles du groupe des éléments avec conjugué comme inverse sont calculées pour le plan oblique complexe par des moyennes de fonctions harmoniques. Un calcul analogue pour un plan oblique adique est effectué au moyen de fonctions définies sur un groupe quotient d'éléments non nuls du plan oblique discret.

Un sous-groupe normal du groupe des éléments non nuls du plan oblique discret est le groupe des nombres rationnels non nuls. Le groupe intégral pour le plan oblique discret est le groupe quotient. Les éléments intégrals non nuls α et β du plan oblique discret sont équivalents selon le sous-groupe si, et seulement si,

$$\alpha\delta = \beta\gamma$$

pour des nombres rationnels non nuls γ et δ.

Un domaine fondamental pour la relation d'équivalence est l'ensemble des éléments intégrals non nuls du plan oblique discret qui sont divisibles par un entier non nul qui n'a pas un entier comme inverse. Les éléments α et β d'un domaine fondamental sont équivalents si, et seulement si,

$$\alpha = \beta\gamma$$

pour un entier avec entier comme inverse.

Le groupe intégral du plan oblique discret a des sous-groupes normaux dont les groupes quotients sont finis. Un sous-groupe normal est généré pour tout entier positif r par l'ensemble des éléments intégrals non nuls ξ du plan oblique discret tels que pour tout diviseur premier p de r la plus grande puissance de p qui est un diviseur de $\xi^- \xi$ est une puissance de la plus grande puissance de p qui est un diviseur de r. Un domaine fondamental pour la relation d'équivalence définie par le sous-groupe est l'ensemble des éléments ξ du domaine fondamental pour le groupe complet telle que pour tout diviseur premier p de r la plus grande puissance de p qui est un diviseur de $\xi^- \xi$ est inférieure à la plus grande puissance de p qui est un diviseur de r. L'intersection des sous-groupes normaux est l'ensemble des éléments intégrals avec inverse intégral.

Le plan oblique adique est une algèbre dont le groupe des éléments inversibles contient le sous-groupe normal fermé dont les éléments sont auto-conjugués. Le groupe quotient est isomorphe au groupe intégral du plan oblique discret. Une fonction définie sur le groupe intégral du plan oblique discret est traitée comme une fonction définie sur le groupe des éléments inversibles du plan oblique adique qui a des valeurs égales aux éléments obtenus chacun l'un à partir de l'autre par la multiplication de la variable indépendante par élément auto-conjugué. La fonction est définie pour s'évanouir aux éléments inversibles du plan oblique adique.

Le groupe intégral du plan oblique discret a des sous-groupes normaux qui sont comparables. Si ρ et σ sont des entiers positifs, le sous-groupe défini par σ est contenu dans le sous-groupe défini par ρ si, et seulement si, pour tout nombre premier p la plus grande puissance de p qui est un diviseur de ρ est une puissance de la plus grande puissance de p qui est un diviseur de σ. Une projection canonique agit comme un homomorphisme du groupe quotient défini par σ sur le groupe quotient défini par ρ. Une fonction définie sur le groupe quotient défini par σ est traitée comme une fonction définie sur le groupe quotient défini par ρ qui a des valeurs égales aux éléments qui se projettent sur le même élément du groupe quotient défini par σ.

Les groupes quotient définis par ρ et par σ sont des espaces compacts de Hausdorff dans la topologie discrète et ont des mesures canoniques. La mesure canonique est la mesure de comptage divisée par le nombre d'éléments du groupe. Une fonction définie sur le groupe est de carré intégrable selon la mesure canonique. L'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique pour le groupe quotient défini par σ est contenu isométriquement dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique pour le groupe quotient défini par ρ.

Une fonction harmonique d'ordre ρ est définie comme une fonction qui est de carré intégrable selon la mesure canonique pour le groupe quotient défini par ρ qui est orthogonal à chaque fonction de carré intégrable selon le groupe quotient défini par σ pour tout entier positif σ inférieur à ρ tel que pour tout diviseur premier p de σ la plus grande puissance de p qui est un diviseur de ρ est une puissance de la plus grande puissance de p qui est un diviseur de σ.

La transformation de Radon de l'harmonique ϕ pour le plan oblique adique est une transformation de domaine et de domaine de l'image dans l'espace de Hilbert des fonctions $f(\xi)$ de ξ dans le plan oblique adique qui sont de carré intégrable selon la mesure canonique pour le plan oblique adique qui s'évanouissent aux éléments non inversibles, et qui satisfont l'identité

$$\phi(\xi)f(\omega\xi) = \phi(\omega\xi)f(\xi)$$

pour tout élément ω du plan oblique adique avec conjugué comme inverse.

La transformation de Radon de l'harmonique ϕ envoie une fonction $f(\xi)$ de ξ sur la fonction $g(\xi)$ de ξ quand l'identité

$$g(\omega\xi)/\phi(\omega\xi) = \int f(\omega\xi + \omega\eta)/\phi(\omega\xi + \omega\eta)d\eta$$

est satisfaite pour tout élément ω du plan oblique adique avec conjugué comme inverse quand ξ est dans le plan adique avec intégration selon la mesure canonique pour l'espace complémentaire du plan adique dans le plan oblique adique.

L'intégrale est interprétée comme une limite des intégrales sur l'ensemble des éléments ξ de l'espace complémentaire tel que

$$\lambda(\xi^{-}\xi) \leq n$$

pour un entier positif n. La convergence est dans la topologie faible de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique pour le plan oblique adique lorsque n devient finalement divisible par tout entier positif dont les diviseurs premiers sont des diviseurs de r.

La transformation de Laplace de l'harmonique ϕ pour le plan oblique adique donne une analyse spectrale de l'adjoint de la transformation de Radon de l'harmonique ϕ pour le plan oblique adique.

Le domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est l'espace des fonctions de l'espace de Hilbert $f(\xi)$ de ξ dans le plan oblique adique qui sont de carré intégrable selon la mesure canonique pour le plan oblique adique, qui s'évanouissent sur les éléments non inversibles, et qui satisfont l'identité

$$\phi(\xi)f(\omega\xi) = \phi(\omega\xi)f(\xi)$$

pour tout élément ω du plan oblique adique avec conjugué comme inverse. Un demi-plan adique est appliqué dans la paramétrisation de ces fonctions.

Un demi-plan p-adique est un analogue pour le plan oblique p-adique du demi-plan supérieur pour le plan oblique complexe.

Un demi-plan p-adique est un sous-corps maximal du plan oblique p-adique tel que tout élément non nul est le produit d'un nombre p-adique non nul et d'un élément intégral du corps avec inverse intégral.

Quand p est le nombre premier pair, les éléments du demi-plan p-adique sont les quaternions qui commutent avec

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}j + \tfrac{1}{2}k.$$

Quand p est un nombre premier impair, les éléments du demi-plan p-adique sont les quaternions qui commutent avec un quaternion intégral

$$i\alpha + j\beta + k\gamma$$

avec inverse intégral qui appartient à l'espace complémentaire du plan p-adique dans le plan oblique p-adique.

Les nombres intégrals p-adiques α, β, γ sont choisis de telle façon que leurs classes de résidus modulo p déterminent un sous-corps de l'algèbre des quaternions dont les coordonnées sont des entiers modulo p. Les éléments de l'algèbre qui commutent avec l'élément donné forment un corps.

La mesure canonique pour le demi-plan adique est choisie de telle façon que l'ensemble des éléments intégrals ait comme mesure un.

Une transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est définie quand une fonction harmonique ϕ d'ordre ν pour le plan oblique adique a pour norme un dans l'espace de Hilbert des fonctions harmoniques d'ordre ν. Le domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est l'ensemble des fonctions $f(\xi)$ de ξ dans le plan gauche adique qui sont de carré intégrable selon la mesure canonique pour le plan gauche adique, qui s'évanouissent sur les éléments non inversibles du plan gauche adique, et qui satisfont l'identité

$$\phi(\xi)f(\omega\xi) = \phi(\omega\xi)f(\xi)$$

pour tout élément ω du plan gauche adique avec conjugué comme inverse.

La paramétrisation des fonctions définies sur le plan gauche adique applique les propriétés de signatures pour le demi-plan adique. Une signature modulo I pour le demi-plan adique est définie selon un idéal fermé I de l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique avec anneau de quotient fini.

Une signature σ modulo I est une fonction $\sigma(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique qui s'évanouit sur les éléments non intégrals et qui sur les éléments intégrals qui ne sont pas inversibles modulo I, a des valeurs égales sur les éléments intégrals qui sont congruents modulo I, qui satisfait l'identité

$$\sigma(\xi\eta) = \sigma(\xi)\sigma(\eta)$$

pour tous les éléments intégrals ξ et η, et dont les valeurs sont les racines quatrièmes de l'unité sur les éléments avec conjugué comme inverse.

Une signature modulo I est dite primitive modulo I si elle coïncide sur les éléments intégrals qui sont inversibles modulo I sans signature modulo un idéal qui contient proprement I.

Une fonction $\chi(\xi)$ de ξ sur la droite adique est la restriction d'une signature modulo I si elle s'évanouit aux éléments non intégrals et aux éléments intégrals qui ne sont pas inversibles modulo I, si elle a des valeurs égales aux éléments qui sont congruents modulo I, si elle satisfait l'identité

$$\chi(\xi\eta) = \chi(\xi)\chi(\eta)$$

pour tous les éléments intégrals ξ et η, et si ses valeurs sont les racines carrées de l'unité sur les éléments avec auto-inverse.

Un élément ω du demi-plan adique est dit stable si deux signatures quelconques qui coïncident sur tous les éléments de la droite adique avec auto-inverse coïncident sur ω.

Un élément du demi-plan adique est stable s'il est le produit d'un élément de la droite adique et d'un élément stable du demi-plan adique.

Une fonction $h(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique est dite analytique de signature σ si l'identité

$$h(\omega\xi) = \sigma(\omega)h(\xi)$$

est satisfaite pour tout élément stable ω du demi-plan adique avec conjugué comme inverse et si la fonction s'évanouit sur les éléments instables du demi-plan adique. La σ–extension de la fonction analytique est la fonction $\operatorname{ext} h(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique qui coïncide avec $h(\xi)$ quand ξ est un élément stable du demi-plan adique et qui satisfait l'identité

$$\operatorname{ext} h(\omega\xi) = \sigma(\omega)\operatorname{ext} h(\xi)$$

pour tout élément ω du demi-plan adique avec conjugué comme inverse.

Une fonction $h(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique est dite analytique si c'est une combinaison linéaire de fonctions analytiques de signatures σ. Les signatures sont choisies pour coïncider sur tous les éléments du demi-plan adique avec conjugué comme inverse si elles coïncident sur les éléments de la droite adique avec auto-inverse. Une extension de la fonction analytique est la fonction $\operatorname{ext} h(\xi)$ de ξ qui est une somme de σ–extensions de σ–composantes de la fonction $h(\xi)$ de ξ.

La transformation de Fourier pour le demi-plan adique est la seule transformation isométrique de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique dans lui-même qui envoie une fonction intégrable $f(\xi)$ de ξ sur une fonction continue

$$g(\xi) = \int \exp(\pi i(\xi^- \eta + \eta^- \xi)) f(\eta) d\eta$$

de ξ définie par intégration selon la mesure canonique. L'inversion de Fourier

$$f(\xi) = \int \exp(-\pi i(\xi^- \eta + \eta^- \xi)) g(\eta) d\eta$$

s'applique avec l'intégration selon la mesure canonique quand la fonction $g(\xi)$ de ξ est intégrable et la fonction $f(\xi)$ de ξ est continue.

Puisque la transformation de Fourier pour le demi-plan adique envoie une fonction $h(\xi)$ de ξ qui satisfait l'identité

$$h(\omega\xi) = \sigma(\omega) h(\xi)$$

pour tout élément ω du demi-plan adique avec conjugué comme inverse sur une fonction $g(\xi)$ de ξ qui satisfait l'identité

$$g(\omega\xi) = \sigma(\omega) g(\xi)$$

pour tout élément ω du demi-plan adique avec conjugué comme inverse, la transformation de Fourier envoie les fonctions analytiques sur les fonctions analytiques.

Une transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est définie pour le plan oblique adique quand une harmonique ϕ est normalisée

$$\int |\phi(\xi)| 2 d\xi = 1$$

par intégration selon la mesure canonique pour le plan oblique adique sur l'ensemble des éléments intégrals du plan oblique adique.

Une fonction

$$f(\xi) = \phi(\xi) h(\xi^- \xi)$$

de ξ dans le plan oblique adique qui est de carré intégrable selon la mesure canonique pour le plan oblique adique et qui satisfait l'identité

$$\phi(\xi) f(\omega\xi) = \phi(\omega\xi) f(\xi)$$

pour tout élément ω du plan oblique adique avec conjugué comme inverse est paramétrée par une fonction analytique $h(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique qui est de carré intégrable selon la mesure canonique pour le demi-plan adique.

La transformation de Laplace de l'harmonique ϕ de la fonction $f(\xi)$ de ξ dans le plan oblique adique est la fonction analytique $g(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique qui est la transformation de Fourier de la fonction $h(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique.

L'identité

$$\int |f(\xi)| 2 d\xi = 2 \int |\mathrm{ext}\, g(\xi)| 2 d\xi$$

est satisfaite avec intégration sur la gauche selon la mesure canonique pour le plan oblique adique et avec intégration sur la droite selon la mesure canonique pour le demi-plan adique.

L'inversion de Fourier

$$h(\xi) = \int \exp(-\pi i(\xi^- \eta + \eta^- \xi))g(\eta)d\eta$$

s'applique avec intégration selon la mesure canonique pour le demi-plan adique quand la fonction $g(\xi)$ de ξ est intégrable et la fonction $h(\xi)$ de ξ est continue.

La représentation intégrale

$$f(\omega\xi + \omega\eta)/\phi(\omega\xi + \omega\eta) = \int \exp(-\pi i\xi^- \xi(\gamma + \gamma^-))\exp(-\pi i\eta^- \eta(\gamma + \gamma^-))g(\gamma)d\gamma$$

s'applique avec intégration selon la mesure canonique pour le demi-plan adique quand ξ est dans le plan adique, η est dans l'espace complémentaire du plan adique dans le plan oblique adique, et ω est un élément du plan oblique adique avec conjugué comme inverse.

Si ρ est un entier positif et si γ est un élément du demi-plan adique tel que $\rho(\gamma + \gamma^-)^{-1}$ est intégral, l'identité

$$\int \exp(-\pi i\eta^- \eta(\gamma + \gamma^-))d\eta = \lambda(\gamma + \gamma^-)^{-1}$$

est satisfaite avec intégration selon la mesure canonique pour l'espace complémentaire du plan adique dans le plan oblique adique sur l'ensemble des éléments η tels que

$$\rho\eta^- \eta$$

est intégral.

L'identité

$$\int f(\omega\xi + \omega\eta)/\phi(\omega\xi + \omega\eta)d\eta = \int \exp(-\pi i\xi^- \xi(\gamma + \gamma^-))\lambda r(\gamma + \gamma^-)^{-1}g(\gamma)d\gamma$$

est satisfaite avec intégration sur la gauche selon la mesure canonique pour l'espace complémentaire au plan adique dans le plan oblique adique et avec intégration sur la droite selon la mesure canonique pour le demi-plan adique.

Quand elle converge, l'intégrale sur la droite représente la fonction analytique de carré intégrable $h'(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique telle que

$$\int u(\xi) - h'(\xi)d\xi = \int v(\xi) - \lambda(\xi + \xi^-)^{-1}g(\xi)d\xi$$

avec intégration selon la mesure canonique pour le demi-plan adique à chaque fois que la transformation de Fourier pour le demi-plan adique envoie une fonction analytique de carré intégrable $u(\xi)$ de ξ sur une fonction analytique de carré intégrable $v(\xi)$ de ξ dont le produit avec $\lambda(\xi + \xi^-)^{-1}$ est de carré intégrable.

L'échange des intégrales est justifié par l'absolue convergence.

La transformation de Radon de l'harmonique ϕ pour l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique est une restriction de la transformation de Radon de l'harmonique ϕ pour le plan oblique adique. Le domaine et le domaine de l'image de la transformation sont contenus dans un espace de Hilbert de fonctions $f(\xi)$ de ξ dans le plan oblique adique qui sont de carré intégrable selon la mesure canonique pour le plan oblique adique, qui satisfont l'identité

$$\phi(\xi)f(\omega\xi) = \phi(\omega\xi)f(\xi)$$

pour tout élément ω du plan oblique adique avec conjugué comme inverse, et qui s'évanouissent sur les éléments non intrégals du plan oblique adique.

L'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique est un espace de Hausdorff compact dans la topologie du sous-espace héritée du plan oblique adique. La mesure canonique pour l'anneau est la restriction aux sous-ensembles de Baire de l'anneau de la mesure canonique pour le plan oblique adique.

La théorie spectrale de l'adjoint de la transformation de Radon pour l'anneau s'applique à l'anneau quotient modulo r de l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique pour un entier positif r. Une fonction définie sur l'anneau quotient est traitée comme une fonction définie sur l'anneau qui a des valeurs égales aux éléments qui sont congruents modulo r. La mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique modulo r est la mesure de comptage divisée par le nombre d'éléments de l'anneau. La projection de l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique sur l'anneau quotient modulo r est une application continue ouverte qui est un homomorphisme de structure d'anneau conjugué et qui envoie la mesure canonique sur la mesure canonique.

L'anneau des éléments intégrals du plan adique est contenu dans l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique. L'anneau est un espace de Hausdorff compact dans la topologie de sous-espace héritée de l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique. La mesure canonique pour l'anneau est la restriction aux sous-ensembles de Baire de l'anneau de mesure canonique pour le plan adique.

L'anneau des éléments intégrals du plan adique modulo r est l'anneau quotient de l'anneau des éléments intégrals du plan adique modulo l'idéal engendré par r. L'anneau des éléments intégrals du plan adique modulo r est isomorphe à l'image de l'anneau des éléments intégrals du plan adique dans l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique modulo r. L'anneau des éléments intégrals du plan adique modulo r est traité comme un sous-anneau de l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique modulo r. La mesure canonique pour l'anneau quotient est la mesure de comptage divisée par le nombre d'éléments dans l'anneau.

La projection de l'anneau des éléments intégrals du plan adique sur l'anneau quotient est une application ouverte continue qui est un homomorphisme de structure d'anneau conjugué et qui envoie la mesure canonique sur la mesure canonique.

L'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adique dans l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique est défini comme l'ensemble des éléments intégrals de l'espace complémentaire du plan oblique adique dans le plan oblique adique. L'ensemble des éléments intégrals de l'espace complémentaire est un groupe additif qui est un espace compact de Hausdorff dans la topologie de sous-espace héritée de l'espace complémentaire du plan adique dans le plan oblique adique. La mesure canonique pour l'ensemble des éléments intégrals de l'espace complémentaire est la restriction à ses sous-ensembles de Baire de la mesure canonique pour l'espace complémentaire.

L'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adique modulo r dans l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique modulo r est défini comme l'image dans l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique modulo r de l'ensemble des éléments intégrals de l'espace complémentaire du plan adique dans le plan oblique adique.

L'espace complémentaire modulo r a un nombre fini d'éléments et est muni de la topologie discrète. L'ensemble est un groupe additif dont la mesure canonique est la mesure de comptage divisée par le nombre d'éléments de l'ensemble. La projection de l'ensemble des éléments intégrals de l'espace complémentaire modulo r au plan adique dans le plan oblique adique sur l'espace complémentaire est une application continue ouverte qui est un homomorphisme de structure additive et qui envoie la mesure canonique sur la mesure canonique.

La transformation de Radon pour l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique envoie une fonction $f(\xi)$ de ξ dans l'anneau sur une fonction $g(\xi)$ de ξ dans l'anneau quand l'identité

$$g(\omega\xi)/\phi(\omega\xi) = \int f(\omega\xi + \omega\eta)/\phi(\omega\xi + \omega\eta)d\eta$$

est satisfaite pour tout élément ω du plan oblique adique avec conjugué comme inverse quand ξ est un élément intégral du plan adique avec intégration selon la mesure canonique pour l'espace complémentaire à l'anneau des éléments intégrals du plan adique dans l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique.

La transformation de Radon pour l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique modulo r est une restriction de la transformation de Radon pour l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique. Le domaine et le domaine de l'image de la transformation sont contenus dans l'espace de Hilbert des fonctions $f(\xi)$ de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du plan oblique r–adique modulo r qui sont de carré intégrable selon la mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique modulo r et qui satisfont l'identité

$$\phi(\xi)f(\omega\xi) = \phi(\omega\xi)f(\xi)$$

pour tout élément ω du plan oblique adique avec conjugué comme inverse.

La transformation de Radon pour l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique modulo r envoie une fonction $f(\xi)$ de ξ dans l'anneau sur une fonction $g(\xi)$ de ξ dans l'anneau quand l'identité

$$g(\omega\xi)/\phi(\omega\xi) = \int f(\omega\xi + \omega\eta)/\phi(\omega\xi + \omega\eta)d\eta$$

est satisfaite pour tout élément ω du plan oblique adique avec conjugué comme inverse quand ξ est un élément de l'anneau des éléments intégrals du plan adique modulo r avec intégration selon la mesure canonique pour l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adique modulo r dans l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique modulo r.

Une fonction

$$f(\xi) = \phi(\xi)h(\xi^-\xi)$$

de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique, qui est de carré intégrable selon la mesure canonique pour le plan oblique adique, et qui satisfait l'identité $\phi(\xi)f(\omega\xi) = \phi(\omega\xi)f(\xi)$ pour tout élément ω du plan oblique adique avec conjugué comme inverse, est paramétrée par une fonction analytique $h(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique qui est de carré intégrable selon la mesure canonique pour le demi-plan adique et qui s'évanouit sur les éléments non intégrals du demi-plan adique.

L'ensemble des éléments intégrals du demi-plan adique est le sous-anneau qui est l'espace de Hausdorff compact dans la topologie de sous-espace héritée du demi-plan adique. La mesure adique pour le sous-anneau est la restriction aux sous-ensembles de Baire du sous-anneau de la mesure canonique du demi-plan adique.

L'identité

$$\int |f(\xi)|2d\xi = 2\int |\text{ext}\, h(\xi)|2d\xi$$

est satisfaite avec intégration sur la gauche selon la mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique et avec intégration à droite selon la mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique.

La transformation de Fourier pour l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique s'applique à un espace quotient du demi-plan adique. Les éléments ξ et η du demi-plan adique sont dits congruents modulo 1 s'ils diffèrent par un élément intégral $\eta - \xi$ du demi-plan adique.

Le demi-plan adique modulo 1 est l'espace quotient du demi-plan adique défini par la relation d'équivalence. L'espace quotient est un groupe additif qui a une topologie discrète et dont la mesure canonique est la mesure de comptage. La projection du demi-plan adique sur le demi-plan adique modulo 1 est une application continue ouverte qui est un homomorphisme de structure additive et qui envoie la mesure canonique sur la mesure canonique. Une fonction définie sur le demi-plan adique modulo 1 est traitée comme une fonction définie sur le demi-plan adique qui a des valeurs égales aux éléments qui sont congruents modulo 1.

Un exemple

$$\exp(\pi i(\xi^- \eta + \eta^- \xi))$$

d'une fonction de ξ dans le demi-plan adique modulo 1 est obtenu quand η est un élément intégral du demi-plan adique.

La transformation de Fourier pour l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique est l'unique transformation isométrique de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique pour l'anneau sur l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique pour le demi-plan modulo 1 qui envoie une fonction intégrable $f(\xi)$ de ξ sur une fonction continue

$$g(\xi) = \int \exp(\pi i(\xi^- \eta + \eta^- \xi)) f(\eta) d\eta$$

de ξ définie par intégration selon la mesure canonique pour le groupe. L'inversion de Fourier s'applique avec l'intégration selon la mesure canonique pour le demi-plan adique modulo 1 quand la fonction $g(\xi)$ de ξ est intégrable et la fonction $f(\xi)$ de ξ est continue.

Un élément du demi-plan adique modulo 1 est dit stable s'il est le produit d'un élément de la droite adique modulo 1 et un élément stable du demi-plan adique avec conjugué comme inverse.

Une fonction $g(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique modulo 1 est dite analytique de signature σ si l'identité $g(\omega\xi) = \sigma(\omega)g(\xi)$ est vérifiée pour tout élément stable ω du demi-plan adique avec conjugué comme inverse et si la fonction s'évanouit aux éléments instables du demi-plan adique modulo 1. La σ–extension de la fonction analytique est la fonction $\operatorname{ext} g(\xi)$ de ξ dans le demi-plan r–adique modulo 1 qui concorde avec $g(\xi)$ quand ξ est un élément stable du demi-plan adique modulo 1 et qui satisfait l'identité

$$\operatorname{ext} g(\omega\xi) = \sigma(\omega)\operatorname{ext} g(\xi)$$

pour tout élément ω du demi-plan adique avec conjugué comme inverse.

Une fonction $g(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique modulo 1 est dite analytique si elle est la combinaison linéaire de fonctions analytiques de signatures σ. Les signatures sont choisies pour concorder sur tous les éléments du demi-plan adique avec conjugué comme inverse s'ils concordent sur les éléments du plan adique avec auto-inverse. Une extension de la fonction analytique est une fonction $\operatorname{ext} g(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique modulo 1 qui est la somme de σ–extensions de σ–composantes de la fonction $g(\xi)$ de ξ.

La transformée de Fourier d'une fonction analytique sur l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique est une fonction analytique du demi-plan adique modulo 1. La transformée de Fourier inverse d'une fonction analytique du demi-plan adique modulo 1 est une fonction analytique de l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique.

La transformée de Laplace de l'harmonique ϕ pour l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique d'une fonction

$$f(\xi) = \phi(\xi)h(\xi^-\xi)$$

de ξ dans l'anneau qui est de carré intégrable selon la mesure canonique pour l'anneau et qui est paramétrée par une fonction analytique de carré intégrable $h(\xi)$ de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique est une fonction analytique de carré intégrable $g(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique modulo 1 qui est la transformée de Fourier de la fonction $h(\xi)$ de ξ.

L'identité

$$\int |f(\xi)|^2 d\xi = 2\int |\operatorname{ext} g(\xi)|^2 d\xi$$

est satisfaite avec l'intégration à gauche selon la mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique et avec l'intégration à droite selon la mesure canonique pour le demi-plan adique modulo 1.

Le module adique $\lambda(\xi) = \sup \lambda(\eta)$ d'un élément ξ du demi-plan adique modulo 1 est défini comme le module adique maximum d'un élément η du demi-plan adique qui représente ξ.

L'adjoint de la transformation de Radon de l'harmonique ϕ envoie une fonction

$$f(\xi) = \phi(\xi)h(\xi^-\xi)$$

de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique dont la transformée de Laplace de l'harmonique ϕ est une fonction $g(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique modulo 1 sur une fonction analytique

$$f'(\xi) = \phi(\xi)h'(\xi^-\xi)$$

de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique dont la transformée de Laplace de l'harmonique ϕ est une fonction analytique $g'(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique modulo 1 si, et seulement si, l'identité

$$\int v(\xi)^- g'(\xi)d\xi = \int v(\xi)^- \lambda(\xi + \xi^-)^{-1} g(\xi)d\xi$$

est satisfaite avec intégration selon la mesure canonique pour le demi-plan adique modulo 1 pour toute fonction analytique de carré intégrable $v(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique modulo 1 qui s'évanouit quand $\lambda(\xi + \xi^-)$ s'évanouit.

Le sous-groupe r–annihilé du demi-plan adique modulo 1 est l'ensemble des éléments ξ tels que $r\xi$ s'évanouit. Les éléments du sous-groupe r–annihilé sont représentés par les éléments ξ du demi-plan adique tels que $r\xi$ est intégral. Les éléments ξ et η du demi-plan adique tels que $r\xi$ et $r\eta$ sont intégrals représentent le même élément du demi-plan adique modulo 1 si, et seulement si, $r\xi$ et $r\eta$ représentent le même élément intégral du demi-plan adique modulo r.

Le sous-groupe r–annihilé du demi-plan adique modulo 1 est un ensemble fini qui a la topologie discrète et dont la mesure canonique est la mesure de comptage.

La transformation de Fourier de l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r est l'unique transformation isométrique de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique pour l'anneau sur l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique pour le sous-groupe r–annihilé du demi-plan adique modulo 1 qui envoie une fonction intégrable $f(\xi)$ de ξ sur la fonction continue

$$g(\xi) = \int \exp(\pi i(\xi^- \eta + \eta^- \xi)) f(\eta) d\eta$$

de ξ définie par intégration selon la mesure canonique pour l'anneau. L'inversion de Fourier

$$f(\xi) = \int \exp(-\pi i(\xi^- \eta + \eta^- \xi)) g(\eta) d\eta$$

est satisfaite avec intégration selon la mesure canonique pour le sous-groupe r–annihilé quand la fonction $g(\xi)$ de ξ est intégrable et la fonction $f(\xi)$ de ξ est continue.

Un élément ω du demi-plan adique avec conjugué comme inverse est dit stable modulo r si n'importe quelles signatures modulo les diviseurs de r qui concordent sur les éléments de la droite adique avec auto-inverse concordent sur ω.

Un élément de l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r est dit stable s'il est le produit d'un élément de l'anneau des éléments intégrals de la droite adique modulo r et d'un élément du demi-plan adique avec conjugué comme inverse qui est stable modulo r.

Une fonction $h(\xi)$ de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r est dite analytique de signature σ pour une signature σ modulo un diviseur de r si l'identité $h(\omega\xi) = \sigma(\omega)h(\xi)$ est satisfaite pour tout élément ω du demi-plan adique avec conjugué comme inverse qui est stable modulo r et si la fonction s'évanouit aux éléments instables de l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r.

La σ–extension d'une fonction $h(\xi)$ de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r qui est analytique de signature σ est la fonction $\operatorname{ext} h(\xi)$ de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r qui concorde avec $h(\xi)$ quand ξ est stable et qui satisfait l'identité $\operatorname{ext} h(\omega\xi) = \sigma(\omega) \operatorname{ext} h(\xi)$ pour tout élément ω du demi-plan adique avec conjugué comme inverse.

Une fonction $h(\xi)$ de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r est dite analytique si c'est est une combinaison linéaire de fonctions analytiques de signatures σ pour les signatures modulo les diviseurs de r. Les signatures sont choisies pour concorder sur les éléments du demi-plan adique avec conjugué comme inverse s'ils concordent sur les éléments de la droite adique avec auto-inverse. Une extension de la fonction analytique $h(\xi)$ de ξ est une fonction $\operatorname{ext} h(\xi)$ de ξ qui est une somme des σ–extensions des composantes qui sont analytiques de signatures σ.

Une fonction $g(\xi)$ de ξ dans le sous-groupe r–annihilé du demi-plan adique modulo 1 est déterminée par une fonction $h(\xi)$ de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r tels que

$$g(\xi) = h(r\xi)$$

pour tout élément ξ du demi-plan adique tel que $r\xi$ est intégral. La fonction $g(\xi)$ de ξ est définie comme analytique si, et seulement si, la fonction $h(\xi)$ de ξ est analytique.

La transformation de Fourier envoie les fonctions analytiques sur l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r sur les fonctions analytiques du sous-groupe r–annihilé du demi-plan adique modulo 1. La transformation de Fourier inverse envoie les fonctions analytiques sur le sous-groupe r–annihilé du demi-plan adique modulo 1 sur les fonctions analytiques de l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r.

La transformée de Laplace de l'harmonique ϕ d'une fonction $f(\xi) = \phi(\xi)h(\xi^-\xi)$ de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique modulo r qui est paramétré par une fonction analytique $h(\xi)$ de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r est la fonction analytique $g(\xi)$ de ξ dans le sous-groupe r–annihilé du demi-plan adique modulo 1 qui est la transformée de Fourier de la fonction $h(\xi)$ de ξ.

L'identité

$$\int |f(\xi)|^2 d\xi = 2\int |\operatorname{ext} g(\xi)|^2 d\xi$$

est satisfaite avec intégration à gauche selon la mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique modulo r et avec intégration sur la droite selon la mesure canonique pour le sous-groupe r–annihilé du demi-plan adique modulo 1.

La transformation de Radon de l'harmonique ϕ envoie une fonction

$$f(\xi) = \phi(\xi)h(\xi^-\xi)$$

de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique modulo r dont la transformée de Laplace est une fonction analytique $g(\xi)$ de ξ dans le sous-groupe r–annihilé du demi-plan adique modulo 1 sur une fonction

$$f'(\xi) = \phi(\xi)h'(\xi^-\xi)$$

de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du plan oblique adique modulo r dont la transformée de Laplace est une fonction analytique $g'(\xi)$ de ξ dans le sous-groupe r-annihilé du demi-plan adique modulo 1 si, et seulement si, l'identité

$$\int v(\xi)^- g'(\xi)d\xi = \int v(\xi)^- \lambda(\xi + \xi^-)^{-1} g(\xi)d\xi$$

est satisfaite avec l'intégration selon la mesure canonique pour le sous-groupe r-annihilé du demi-plan adique modulo 1 pour toute fonction analytique $v(\xi)$ de ξ dans le sous-groupe r–annihilé du demi-plan adique modulo 1 qui s'évanouit quand $\lambda(\xi + \xi^-)$ s'évanouit.

5. Analyse harmonique d'un corps gauche adélique

Le corps gauche adélique est le produit cartésien du corps gauche complexe et du corps gauche adique. Un élément ξ du corps gauche adélique a une composante ξ_+ dans le corps gauche complexe et une composante ξ_- dans le corps gauche adique. Le corps gauche adélique est un anneau conjugué avec comme coordonnées l'addition et la multiplication.

La somme $\xi + \eta$ des éléments ξ et η du corps gauche adélique est l'élément du corps gauche adélique dont la composante dans le corps gauche est la somme

$$\xi_+ + \eta_+$$

de composantes dans le corps gauche complexe et dont la composante dans le corps gauche adique est la somme

$$\xi_- + \eta_-$$

des composantes dans le corps gauche r–adique.

Le produit $\xi\eta$ d'éléments ξ et η du corps gauche adélique est l'élément du corps gauche adélique dont la composante dans le corps gauche complexe est le produit

$$\xi_+\eta_+$$

de composantes dans le corps gauche complexe et dont la composante dans le corps gauche r–adique est le produit

$$\xi_-\eta_-$$

des composantes dans le corps gauche adique.

Le conjugué d'un élément ξ du corps gauche adélique est l'élément ξ^- du corps gauche adélique dont la composante dans le corps gauche complexe est le conjugué

$$\xi_+^-$$

de la composante dans le corps gauche complexe et dont la composante dans le corps gauche adique est le conjugué

$$\xi_-^-$$

de la composante dans le corps gauche r–adique.

Le corps gauche adélique est un espace de Hausdorff localement compact dans la topologie du produit cartésien de la topologie du corps gauche complexe et la topologie du corps gauche adique. L'addition est continue comme une transformation du corps gauche adélique avec lui-même dans le corps gauche adélique. La multiplication par un élément dans le corps gauche adélique est une transformation continue du corps gauche r-adélique dans lui-même.

La conjugaison est une transformation continue du corps gauche adélique dans lui-même.

La mesure canonique pour le corps gauche adélique est la mesure du produit cartésien de la mesure canonique pour le corps gauche complexe et de la mesure canonique pour le corps gauche adique.

La mesure est définie sur des sous-ensembles de Baire du corps gauche adélique. Une mesure préservant la transformation du corps gauche adélique dans lui-même est définie en envoyant ξ sur

$$\xi + \eta$$

pour tout élément η du corps gauche adélique. Les transformations préservant la mesure du corps gauche adélique dans lui-même sont définies en envoyant ξ sur $\omega\xi$ et sur $\xi\omega$ pour tout élément ω du corps gauche adélique qui a son conjugué comme inverse.

La transformation de Fourier pour le corps gauche adélique est l'unique transformation isométrique de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique pour le corps gauche adélique dans lui-même qui envoie une fonction intégrable

$$f(\xi_+, \xi_-)$$

de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique sur une fonction continue

$$g(\xi_+, \xi_-) = \int \exp(\pi i(\xi_+^- \eta_+ + \eta_+^- \xi_+)) \exp(\pi i(\xi_-^- \eta_- + \eta_-^- \xi_-)) f(\eta_+, \eta_-) d\eta$$

de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche r–adélique défini par intégration selon la mesure canonique. L'inversion de Fourier

$$f(\xi_+, \xi_-) = \int \exp(-\pi i(\xi_-^+ \eta_+ + \eta_+^- \xi_+)) \exp(-\pi i(\xi_-^- \eta_- + \eta_-^- \xi_-)) g(\eta_+, \eta_-) d\eta$$

s'applique avec l'intégration selon la mesure canonique quand la fonction

$$g(\xi_+, \xi_-)$$

de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ est intégrable et la fonction $f(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ est continue.

Le demi-plan adélique est l'ensemble des éléments (z, ξ) du corps gauche adélique dont la composante z dans le corps gauche complexe appartient au demi-plan supérieur et dont la composante ξ dans le corps gauche adique appartient au demi-plan adique. La topologie du demi-plan adélique est la topologie produit cartésien de la topologie dans le demi-plan supérieur et la topologie dans le demi-plan adique. La mesure canonique pour le demi-plan adélique est la mesure produit cartésien de la mesure canonique pour le demi-plan supérieur et la mesure canonique pour le demi-plan adique.

Les fonctions harmoniques d'ordre $\rho = (\rho_+, \rho-)$ pour le demi-plan adélique sont définies quand les fonctions harmoniques d'ordre ρ_+ sont définies pour le corps gauche complexe et les fonctions harmonique d'ordre ρ_- sont définies pour le corps gauche adique.

Une fonction harmonique d'ordre ρ pour le corps gauche adélique est une fonction continue $\phi(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique telle que pour tout élément ξ_- du corps gauche adique la fonction de ξ_+ dans le corps gauche complexe est une fonction harmonique d'ordre ρ_+ et pour tout élément ξ_+ du corps gauche complexe la fonction de ξ_- dans le corps gauche adique est une fonction harmonique d'ordre ρ_-.

L'ensemble des fonctions harmoniques d'ordre ρ pour le corps gauche est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est défini à partir du produit scalaire de l'espace de Hilbert des fonctions harmoniques d'ordre ρ_+ pour le corps gauche complexe et le produit scalaire pour l'espace de Hilbert des fonctions harmoniques d'ordre ρ_- pour le corps gauche adique.

L'espace de Hilbert des fonctions harmoniques d'ordre ρ_+ pour le corps gauche complexe admet une base orthogonale dont les éléments sont des monômes. L'espace de Hilbert des fonctions harmoniques d'ordre ρ pour le corps gauche adélique est la somme orthogonale des sous-espaces déterminés par les monômes pour le corps gauche complexe. Un sous-espace contient le produit du monôme avec une fonction harmonique d'ordre ρ_- pour le corps gauche adique. Le produit scalaire de deux éléments du sous-espace est l'auto-produit scalaire des monômes pour le corps gauche complexe multiplié par le produit scalaire des fonctions harmoniques pour le corps gauche adique.

La multiplication à gauche par un élément du corps gauche adélique avec conjugué comme inverse sur l'argument d'une fonction harmonique d'ordre ρ est une transformation isométrique de l'espace de Hilbert des fonctions harmoniques d'ordre ρ dans lui-même. La dimension de l'espace de Hilbert des fonctions harmoniques d'ordre ρ pour le corps gauche adélique est le produit de la dimension de l'espace de Hilbert des fonctions harmoniques d'ordre ρ_+ pour le corps gauche complexe et de la dimension de l'espace de Hilbert des fonctions harmoniques d'ordre ρ_- pour le corps gauche adique.

Les opérateurs de Hecke sont des transformations auto-adjointes de l'espace de Hilbert des fonctions harmoniques d'ordre ρ pour le corps gauche adélique dans lui-même. Une transformation isométrique de l'espace de Hilbert dans lui-même est définie par tout élément non nul ω du corps gauche discret en envoyant une fonction $f(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique sur une fonction $f(\xi_+\omega, \xi_-\omega)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique.

Définissons N comme le nombre d'éléments du corps gauche discret tels que $\langle \omega, \omega \rangle = 1$.

Un opérateur de Hecke $\Delta(n)$ est défini pour tout entier positif n. La transformation envoie une fonction $f(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique sur une fonction $g(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique définie par la somme

$$Ng(\xi_+, \xi_-) = \sum f(\xi_+\omega, \xi_-\omega)$$

sur les éléments entiers ω du corps gauche discret tels que

$$n = \omega^-\omega.$$

L'identité

$$\Delta(m)\Delta(n) = \sum k\Delta(mn/k^2)$$

est vérifiée pour tous les entiers positifs m et n avec sommation sur les diviseurs communs impairs k de m et n.

L'opérateur de Hecke $\Delta(1)$ est la projection orthogonale de l'espace de Hilbert des fonctions harmoniques d'ordre ρ sur le sous-espace des fonctions $f(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique qui satisfait l'identité

$$f(\xi_+, \xi_-) = f(\xi_+\omega, \xi_-\omega)$$

pour tout élément entier ω du corps gauche discret tel que $\omega^-\omega = 1$.

Le noyau de $\Delta(1)$ est contenu dans le noyau de $\Delta(n)$, et le domaine de $\Delta(n)$ est contenu dans le domaine de $\Delta(1)$, pour tout entier positif n.

Les opérateurs de Hecke agissent comme des transformations auto-adjointes dans le domaine de $\Delta(1)$. Le domaine de $\Delta(1)$ est la somme orthogonale de sous-espaces invariants dont les éléments sont caractérisés comme étant les fonctions propres de $\Delta(n)$ pour une certaine valeur propre $\tau(n)$ pour tout entier positif n.

Les valeurs propres définissant les sous-espaces invariants satisfont l'identité

$$\tau(m)\tau(n) = \sum k\tau(mn/k^2)$$

pour tous les entiers positifs m et n avec sommation sur les diviseurs communs k de m et n. La valeur propre $\tau(n)$ est égal à un quand n est égal à un.

Une transformation de Radon de l'harmonique ϕ est définie pour le corps gauche adélique quand la fonction harmonique non triviale ϕ d'ordre ν définit une fonction propre pour les opérateurs de Hecke.

La transformation est définie par intégration selon la mesure canonique pour l'espace complémentaire du plan adélique dans le corps gauche adélique.

Le plan adélique est l'ensemble des éléments $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ du corps gauche adélique dont la composante ξ_+ dans le corps gauche complexe appartient au plan complexe et dont la composante ξ_- dans le corps gauche adique appartient au plan adique. Le plan adélique est isomorphe au produit cartésien du plan complexe et du plan adique. La topologie du sous-espace du plan adélique héritée du corps gauche adélique est identique à la topologie du produit cartésien de la topologie du plan complexe et de la topologie du plan adique. La mesure canonique pour le plan adélique est la mesure produit cartésien de la mesure canonique pour le plan complexe et de la mesure canonique pour le plan adique.

L'espace complémentaire au plan adélique dans le corps gauche adélique est l'ensemble des éléments $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ du corps gauche adélique dont la composante ξ_+ dans le corps gauche complexe appartient à l'espace complémentaire du plan complexe dans le corps gauche complexe et dont la composante ξ_- dans le corps gauche adique appartient à l'espace complémentaire au plan adique dans le corps gauche adique. L'espace complémentaire au plan adélique dans le corps gauche adélique est isomorphe au produit cartésien de l'espace complémentaire du plan complexe dans le corps gauche complexe et de l'espace complémentaire du plan adique dans le corps gauche adique.

La topologie dont le plan adélique hérite du corps gauche adélique est identique à la topologie produit cartésien de la topologie du plan complexe et de la topologie du plan adique. La mesure canonique pour le plan adélique est la mesure produit cartésien de la mesure canonique pour le plan complexe et de la mesure canonique pour le plan adique.

La topologie dont l'espace complémentaire au plan adélique dans le corps gauche adélique hérite du corps gauche adélique est identique à la topologie produit cartésien de la topologie de l'espace complémentaire du plan complexe dans le corps gauche complexe et de la topologie du complementaire du plan adique dans le corps gauche adique.

La mesure canonique pour l'espace complémentaire du plan adélique dans le corps gauche adélique est la mesure produit cartésien de la mesure canonique pour l'espace complémentaire du plan complexe dans le corps gauche complexe et de la mesure canonique de l'espace complémentaire du plan adique dans le corps gauche adique.

La transformation de Radon de l'harmonique ϕ a son domaine et son domaine image dans l'espace de Hilbert des fonctions $f(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique qui satisfait l'identité

$$\phi(\xi_+, \xi_-) f(\omega_+ \xi_+, \omega_- \xi_-) = \phi(\omega_+ \xi_+, \omega_- \xi_-) f(\xi_+, \xi_-)$$

pour tout élément $\omega = (\omega_+, \omega_-)$ du corps gauche adélique avec conjugué comme inverse.

La transformation envoie une fonction $f(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique sur une fonction $g(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique quand l'identité

$$\begin{aligned} & g(\omega_+ \xi_+, \omega_- \xi_-) / \phi(\omega_+ \xi_+, \omega_- \xi_-) \\ = & \int f(\omega_+ \xi_+ + \omega_+ \eta_+, \omega_- \xi_- + \omega_- \eta_-) / \phi(\omega_+ \xi_+ + \omega_+ \eta_+, \omega_- \xi_- + \omega_- \eta_-) d\eta \end{aligned}$$

est vérifiée avec intégration selon la mesure canonique pour l'espace complémentaire du plan adélique dans le corps gauche adélique pour tout élément $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ du plan adélique et pour tout élément $\omega = (\omega_+, \omega_-)$ du corps gauche adélique avec conjugué comme inverse.

L'intégrale est prise dans la topologie faible de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique pour le corps gauche adélique des entiers sur les sous-espaces compacts de l'espace complémentaire du plan adélique dans le corps gauche adélique qui contient $\omega \xi = (\omega_+ \xi_+, \omega_- \xi_-)$ pour tout élément $\omega = (\omega_+, \omega_-)$ du corps gauche adélique avec conjugué comme inverse à chaque fois qu'ils contiennent $\xi = (\xi_+, \xi_-)$.

La transformation de Laplace de l'harmonique ϕ pour le corps gauche adélique est une analyse spectrale de l'adjoint de la transformation de Radon de l'harmonique ϕ pour le corps gauche adélique dans un sous-espace invariant. Une transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est définie pour une fonction harmonique ϕ d'ordre ρ qui a pour norme un dans l'espace de Hilbert des fonctions harmoniques d'ordre ρ.

Le domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est contenu dans l'espace de Hilbert des fonctions $f(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique qui sont de carré intégrable selon la mesure canonique du corps gauche adélique, qui satisfait l'identité

$$\phi(\xi_+, \xi_-) f(\omega_+ \xi_+, \omega_- \xi_-) = \phi(\omega_+ \xi_+, \omega_- \xi_-) f(\xi_+, \xi_-)$$

pour tout élément $\omega = (\omega_+, \omega_-)$ du corps gauche adélique avec conjugué comme inverse, et qui s'évanouit pour les éléments non inversibles du corps gauche adélique.

Le demi-plan adélique est un groupe localement compact qui est le produit cartésien du demi-plan supérieur et du demi-plan adique. La topologie du demi-plan adélique est la topologie produit cartésien de la topologie du demi-plan supérieur et de la topologie du demi-plan adique. La mesure canonique du demi-plan adélique est la mesure produit cartésien de la mesure canonique pour le demi-plan supérieur et de la mesure canonique pour le demi-plan adique.

Une fonction

$$f(\xi_+, \xi_-) = \phi(\xi_+, \xi_-) h(\xi_+^- \xi_+, \xi_-^- \xi_-)$$

de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique qui appartient au domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est paramétrée par une fonction $h(z, \xi)$ de (z, ξ) dans le demi-plan adélique.

Pour tout élément ξ du demi-plan adique, la fonction de z dans le demi-plan supérieur admet une extension au plan complexe qui satisfait l'identité

$$h(\omega z, \xi) = h(z, \xi)$$

pour tout élément ω du plan complexe avec conjugué comme inverse. La fonction de ξ dans le demi-plan adique est analytique pour tout élément z du demi-plan supérieur.

L'identité

$$\int |f(\xi_+, \xi_-)|^2 d\xi = 2\pi \int |\xi_+|\nu|h(\xi_+, \xi_-)|^2 d\xi$$

est satisfaite avec intégration sur la gauche selon la mesure canonique pour le corps gauche r–adélique et avec intégration à droite selon la mesure canonique pour le demi-plan r–adélique.

La transformation de Laplace de l'harmonique ϕ de la fonction $f(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique est une fonction

$$g(z, \xi) = \int \exp(\pi i|\eta_+|z) \exp(\pi i(\xi_- \eta_- + \eta_-^- \xi)) \, |\eta_+|^\nu \, h(\eta_+, \eta_-) \, d\eta$$

de (z, ξ) dans le demi-plan adélique qui est analytique comme fonction de z dans le demi-plan supérieur pour tout élément ξ du demi-plan adique et analytique comme fonction de ξ dans le demi-plan adique pour tout élément z du demi-plan supérieur. La représentation intégrale s'applique quand l'intégrale est absolument convergente.

L'identité

$$\int \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x + iy, \xi)|^2 y^\nu dx dy d\xi = (2\pi)^{-\nu} \Gamma(1 + \nu) \int |\eta_+|^\nu |\text{ext}\, h(\eta_+, \eta_-)|^2 \, d\eta$$

est satisfaite avec intégration extérieure sur la gauche selon la mesure canonique pour le demi-plan adique et avec intégration à droite selon la mesure canonique pour le demi-plan adélique.

L'adjoint de la transformation de Radon de l'harmonique ϕ envoie une fonction

$$f(\xi_+, \xi_-) = \phi(\xi_+, \xi_-) h(\langle \xi_+, \xi_+ \rangle, \xi_-^- \xi_-)$$

de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique dont la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est une fonction $g(z, \xi)$ de (z, ξ) dans le demi-plan adélique sur une fonction

$$f'(\xi_+, \xi_-) = \phi(\xi_+, \xi_-) h'(\langle \xi_+, \xi_+ \rangle, \xi_-^- \xi_-)$$

de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans le corps gauche adélique dont la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est une fonction $g'(z, \xi)$ de (z, ξ) dans le demi-plan adélique si, et seulement si, l'identité

$$\int v(\xi)^- g'(z, \xi) d\xi = (i/z) \int v(\xi)^- \lambda(\xi + \xi^-)^{-1} g(z, \xi) d\xi$$

est satisfaite avec intégration selon la mesure canonique pour le demi-plan adique pour toute fonction analytique de carré intégrable $v(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique dont le produit avec $\lambda(\xi + \xi^-)^{-1}$ est de carré intégrable.

Un élément $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ du corps gauche adélique est traité comme une intégrale si sa composante adique ξ_- est intégrale. L'ensemble des éléments intégrals du corps gauche adélique est un anneau qui est un espace de Hausdorff localement compact dans la topologie héritée du corps gauche adélique. La mesure canonique pour l'anneau est la restriction à des sous-ensembles de Baire de l'anneau de la mesure canonique pour le corps gauche adélique.

L'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique est isomorphe au produit cartésien du corps gauche complexe et de l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adique.

La topologie de l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique est le produit cartésien de la topologie produit de la topologie du corps gauche complexe et de la topologie de l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adique. La mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique est la mesure produit de la mesure canonique du corps gauche complexe et de la mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adique.

L'ensemble des éléments intégrals du plan adélique est un anneau qui est un espace de Hausdorff localement compact dans la topologie héritée du plan adélique. La mesure canonique pour l'anneau est la restriction aux sous-ensembles de Baire de l'anneau de mesure canonique pour le plan adélique.

L'anneau des éléments intégrals du plan adélique est isomorphe au produit cartésien du plan complexe et de l'anneau des éléments intégrals du plan adique. La topologie pour l'anneau des éléments intégrals du plan adélique est la topologie produit cartésien de la topologie du plan complexe et de la topologie de l'anneau des éléments intégrals du plan adique. La mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du plan adélique est la mesure produit cartésien de la mesure canonique pour le plan complexe et de la mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du plan adique.

L'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique est l'ensemble des éléments intégrals de l'espace complémentaire du plan adélique dans le corps gauche adélique. L'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique dans l'anneau des éléments intégrals dans le corps gauche adélique est un espace de Hausdorff localement compact dans la topologie du sous-espace héritée de l'espace complémentaire du plan adélique dans le corps gauche adélique. La mesure canonique de l'espace complémentaire à l'anneau des éléments intégrals du plan adélique dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique est la restriction à ses sous-ensembles de Baire de la mesure canonique pour l'espace complémentaire au plan adélique dans le corps gauche adélique.

L'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique est isomorphe au produit cartésien de l'espace complémentaire au plan complexe dans le corps gauche complexe et l'espace complémentaire à l'anneau des éléments intégrals du plan adique dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adique. La topologie de l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique est la topologie produit cartésien de la topologie de l'espace complémentaire du plan complexe dans le corps gauche complexe et de la topologie de l'espace complémentaire ed l'anneau des éléments intégrals du plan adique dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adique. La mesure canonique pour l'espace complémentaire à l'anneau des éléments intégrals du plan adélique dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique est la mesure produit cartésien de la mesure canonique pour l'espace complémentaire du plan complexe dans le corps gauche complexe et de la mesure canonique de l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adique dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adique.

La transformation de Radon de l'harmonique ϕ pour l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique est une transformation dont le domaine et le domaine de l'image sont contenus dans un espace de Hilbert qui est le domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ pour l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique. Les éléments du domaine de la transformation de Laplace sont les fonctions $f(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique qui sont de carré intégrable selon la mesure canonique pour l'anneau et qui satisfont l'identité

$$\phi(\xi_+, \xi_-)f(\omega_+\xi_+, \omega_-\xi_-) = \phi(\omega_+\xi_+, \omega_-\xi_-)f(\xi_+, \xi_-)$$

pour tout élément $\omega = (\omega_+, \omega_-)$ du corps gauche adélique avec conjugué comme inverse.

La transformation de Radon envoie une fonction $f(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans l'anneau sur une fonction $g(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans l'anneau quand l'identité

$$g(\omega_+\xi_+, \omega_-\xi_-)/\phi(\omega_+\xi_+, \omega_-\xi_-)$$
$$= \int f(\omega_+\xi_+ + \omega_+\eta_+, \omega_-\xi_- + \omega_-\eta_-)/\phi(\omega_+\xi_+ + \omega_+\eta_+, \omega_-\xi_- + \omega_-\eta_-)d\eta$$

est satisfaite pour tout élément $\omega = (\omega_+, \omega_-)$ du corps gauche adélique avec conjugué comme inverse pour tout élément $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique avec intégration selon la mesure canonique pour l'espace complémentaire vers l'anneau des éléments intégrals du plan adélique dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique. L'intégrale est interprétée comme une limite dans la topologie faible du domaine de la transformation de Laplace des éléments intégrals sur les sous-ensembles de l'espace complémentaire qui contient $\omega\xi = (\omega_+\xi_+, \omega_-\xi_-)$ pour tout élément $\omega = (\omega_+, \omega_-)$ du corps gauche adélique avec conjugué comme inverse à chaque fois qu'ils contiennent $\xi = (\xi_+, \xi_-)$.

Un élément $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ du demi-plan adélique est considéré comme intégral si sa composante adique ξ_- est un élément intégral du demi-plan adique. L'ensemble des éléments intégrals du demi-plan adélique est un sous-groupe additif qui est un espace de Hausdorff localement compact dans la topologie du sous-espace héritée du demi-plan adélique. La mesure canonique pour le sous-groupe est la restriction aux sous-ensembles de Baire du sous-groupe de la mesure canonique pour le demi-plan adélique.

Le groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique est isomorphe au produit cartésien du demi-plan supérieur et du groupe des éléments intégrals du demi-plan adique.

La topologie du groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique est la topologie produit cartésien de la topologie du demi-plan supérieur et de la topologie du groupe des éléments intégrals du demi-plan adique. La mesure canonique pour le groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique est le produit cartésien de la mesure canonique pour le demi-plan supérieur et de la mesure canonique pour le groupe des éléments intégrals du demi-plan adique.

Une fonction

$$f(\xi_+, \xi_-) = \phi(\xi_+, \xi_-)h(\xi_-^+\xi_+, \xi_-^-\xi_-)$$

de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique qui appartient au domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ pour l'anneau est paramétrée par une fonction $h(z,\xi)$ de (z,ξ) dans le groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique dont le produit avec $|z|^{\frac{1}{2}\nu}$ est de carré intégrable selon la mesure canonique pour le groupe. Pour tout élément intégral ξ du demi-plan adique, la fonction $h(z,\xi)$ de z dans le demi-plan supérieur admet une extension du corps complexe qui satisfait l'identité

$$h(\omega z,\xi) = h(z,\xi)$$

pour tout élément ω du corps complexe avec conjugué comme inverse. La fonction $h(z,\xi)$ de ξ du demi-plan adique est analytique pour tout élément z du demi-plan supérieur.

L'identité

$$\int |f(\xi_+,\xi_-)|^2 d\xi = 2\pi \int |\xi_+|^\nu |h(\xi_+,\xi_-)|^2 d\xi$$

est satisfaite avec intégration sur la gauche selon la mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique et avec intégration sur la droite selon la mesure canonique pour le groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique.

Les éléments $\xi = (\xi_+,\xi_-)$ et $\eta = (\eta_+,\eta_-)$ du demi-plan adélique sont considérés comme congruents modulo 1 si les composantes

$$\xi_+ = \eta_+$$

dans le demi-plan supérieur sont égales et si les composantes ξ_- et η_- dans le demi-plan adique sont congruentes modulo 1. L'espace quotient modulo la relation d'équivalence est le demi-plan adélique modulo 1.

La transformation de Laplace de l'harmonique ϕ d'une fonction

$$f(\xi_+,\xi_-) = \phi(\xi_+,\xi_-) h(\xi_+^-,\xi_+,\xi_-^-\xi_-)$$

de $\xi = (\xi_+,\xi_-)$ dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique est une fonction $g(z,\xi) = \int \exp(\pi i|\eta_+|z)\exp(\pi i(\xi_-\eta_- + \eta_- - \xi))|\eta_+|\nu h(\eta_+,\eta_-)d\eta$ de (z,ξ) dans le demi-plan adélique modulo 1 qui est analytique comme fonction de z dans le demi-plan supérieur pour tout élément ξ du demi-plan adique modulo 1 et qui est analytique comme fonction de ξ dans le demi-plan adique modulo 1 pour tout élément z du demi-plan supérieur.

L'intégration est selon la mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique.

L'identité

$$\int \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+iy,\xi)|^2 y^\nu dx dy d\xi = (2\pi)^{-\nu}\Gamma(1+\nu) \int |\eta_+|^\nu |h(\eta_+,\eta_-)|^2 d\eta$$

est vérifiée avec intégration extérieure sur la gauche selon la mesure canonique pour le demi-plan adique modulo 1 et avec intégration sur la droite selon la mesure canonique pour le groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique.

L'adjoint de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ envoie une fonction

$$f(\xi_+,\xi_-) = \phi(\xi_+,\xi_-) h(\xi_+^-\xi_+\xi_-^-\xi_-)$$

de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique dont la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est une fonction $g(z, \xi)$ de (z, ξ) dans le demi-plan adélique modulo 1 sur une fonction

$$f'(\xi_+, \xi_-) = \phi(\xi_+, \xi_-) h'(\langle \xi_+, \xi_+ \rangle, \xi_-^- \xi_-)$$

de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique dont la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est une fonction $g'(z, \xi)$ dans le demi-plan adélique modulo 1 si, et seulement si, l'identité

$$\int v(\xi)^- g'(z, \xi) d\xi = (i/z) \int v(\xi)^- \lambda(\xi + \xi_-)^{-1} g(z, \xi) d\xi$$

est satisfaite avec intégration selon la mesure canonique pour le demi-plan adique modulo 1 pour toute fonction analytique de carré intégrable $v(\xi)$ de ξ dans le demi-plan adique modulo 1 dont le produit avec $\lambda(\xi + \xi_-)^{-1}$ est de carré intégrable.

La projection de l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique sur l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r est un homomorphisme de structure d'anneau conjugué qui est une fonction ouverte continue et qui envoie la mesure canonique sur la mesure canonique.

Une fonction définie sur l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r est traitée comme une fonction définie sur l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique qui a des valeurs égales en des éléments qui sont congruents modulo r.

L'anneau des éléments intégrals du plan adélique modulo r est l'anneau quotient des éléments intégrals du plan adélique par congruence modulo r. L'anneau des éléments intégrals du plan adélique modulo r est isomorphe à l'image de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r.

L'anneau des éléments intégrals du plan adélique modulo r est isomorphe au produit cartésien du plan complexe et de l'anneau des éléments intégrals du plan adique modulo r. La topologie de l'anneau des éléments intégrals du plan r–adélique est la topologie produit cartésien de la topologie du plan complexe et de la topologie de l'anneau des éléments intégrals du plan adique modulo r. La mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du plan adélique modulo r est le produit cartésien de la mesure canonique pour le plan complexe et de la mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du plan adique modulo r.

La projection de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique sur l'anneau des éléments intégrals du plan adélique modulo r est un homomorphisme de structure d'anneau conjugué qui est une application ouverte continue et qui envoie la mesure canonique sur la mesure canonique.

Une fonction définie sur l'anneau des éléments intégrals du plan adékique modulo r est traitée comme une fonction définie sur l'anneau des éléments intégrals du plan adélique qui a des valeurs égales pour les éléments qui sont congruents modulo r.

L'espace complémentaire à l'anneau des éléments intégrals du plan adélique modulo r dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r est défini comme l'image dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r de l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique. L'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique modulo r dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r est isomorphe à l'espace quotient modulo r de l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique.

L'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique modulo r dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r est isomorphe au produit cartésien de l'espace complémentaire du plan complexe dans le corps gauche complexe et l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adique modulo r dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adique modulo r.

La topologie de l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique modulo r dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r est le produit cartésien de la topologie de l'espace complémentaire du plan complexe dans le corps gauche complexe et de la topologie de l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adique modulo r et de l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adique modulo r.

La mesure canonique pour l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique modulo r dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r est la mesure produit cartésien de la mesure canonique pour l'espace complémentaire du plan complexe dans le corps gauche complexe et de la mesure canonique pour l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adique modulo r dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adique modulo r.

La projection de l'espace complémentaire sur l'anneau des éléments intégrals du plan adélique dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique dans l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique modulo r dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r est un homomorphisme de structure additive qui est une application ouvert continue et qui envoie la mesure canonique sur la mesure canonique.

Une fonction définie sur l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique modulo r dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r est traitée comme une fonction définie dans l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique qui a des valeurs égales pour des éléments qui sont congruents modulo r.

La transformation de Radon de l'harmonique ϕ pour l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r est une transformation avec domaine et domaine image dans le domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ pour l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r.

Le domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ pour l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r est l'espace de Hilbert des fonctions $f(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r qui sont de carré intégrable selon la mesure canonique pour l'anneau et qui satisfont l'identité $\phi(\xi_+, \xi_-)f(\omega_+\xi_+, \omega_-\xi_-) = \phi(\omega_+\xi_+, \omega_-\xi_-)f(\xi_+, \xi_-)$ pour tout élément $\omega = (\omega_+, \omega_-)$ du corps gauche adélique avec conjugué comme inverse.

La transformation de Radon de l'harmonique ϕ envoie une fonction $f(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r sur une fonction $g(\xi_+, \xi_-)$ de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r quand l'identité

$$g(\omega_+\xi_+, \omega_-\xi_-)/\phi(\omega_+\xi_+, \omega_-\xi_-)$$
$$= \int f(\omega_+\xi_+ + \omega_+\eta_+, \omega_-\xi_- + \omega_-\eta_-)/\phi(\omega_+\xi_+ + \omega_+\eta_+, \omega_-\xi_- + \omega_-\eta_-)d\eta$$

est satisfaite par tout élément $\omega = (\omega_+, \omega_-)$ du corps gauche adélique avec conjugué comme inverse quand $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ est un élément de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique modulo r et quand l'intégration est selon la mesure canonique pour l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du plan adélique modulo r dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r.

L'intégrale est interprétée comme la limite des intégrales sur les sous-ensembles compacts de l'espace complémentaire de l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r qui contient $\omega\xi = (\omega_+\xi_+, \omega_-\xi_-)$ pour tout élément intégral $\omega = (\omega_+, \xi_-)$ du corps gauche adélique avec inverse intégral à chaque fois qu'ils contiennent $\xi = (\xi_+, \xi_-)$. La limite est prise dans la topologie métrique de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable selon la mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r.

Les éléments intégrals $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ et $\eta = (\eta_+, \eta_-)$ du demi-plan adélique sont considérés comme congruents modulo r si leurs composantes

$$\xi_+ = \eta_+$$

dans le demi-plan supérieur sont égales et si leurs composantes ξ_- et η_- dans le demi-plan adique diffèrent d'un élément $\eta_- - \xi_-$ du demi-plan adique qui est le produit de r et d'un élément intégral du demi-plan adique.

Le groupe quotient du groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique est le groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique modulo r. Le groupe est isomorphe au produit cartésien du demi-plan supérieur et du groupe des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r.

La topologie du groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique modulo r est le produit cartésien de la topologie du plan supérieur et de la topologie du groupe des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r. La mesure canonique pour le groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique modulo r est la mesure produit cartésien de la mesure canonique pour le demi-plan supérieur et de la mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r.

La projection du groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique sur le groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique modulo r est un homomorphisme de structure additive qui est une application ouverte continue et qui envoie la mesure canonique sur la mesure canonique.

Une fonction définie sur le groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique modulo r est traitée comme une fonction définie sur le groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique qui a des valeurs égales pour les éléments qui sont congruents modulo r.

Une fonction

$$f(\xi_+,\xi_-) = \phi(\xi_+,\xi_-)h(\xi_+^-\xi_+,\xi_-^-\xi_-)$$

de $\xi = (\xi_+,\xi_-)$ dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r qui appartient au domaine de la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ pour l'anneau est paramétrée par une fonction $h(z,\xi)$ de (z,ξ) dans le groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique modulo r dont le produit avec $|z|^{\frac{1}{2}\nu}$ est de carré intégrable selon la mesure canonique pour le groupe.

Pour tout élément ξ du groupe des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r la fonction $h(z,\xi)$ de z dans le demi-plan supérieur admet une extension au corps complexe qui satisfait l'identité

$$h(\omega z,\xi) = h(z,\xi)$$

pour tout élément ω du corps complexe avec conjugué comme inverse. Pour tout élément z du demi-plan supérieur, la fonction $h(z,\xi)$ de ξ dans l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r est analytique.

L'identité

$$\int |f(\xi_+,\xi_-)|^2 d\xi = 2\pi \int |\xi_+|^\nu |\mathrm{ext}\, h(\xi_+,\xi_-)|^2 d\xi$$

est satisfaite par intégration sur la gauche selon la mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r et avec intégration sur la droite selon la mesure canonique pour le groupe des éléments intégrals du demi-plan adélique modulo r.

La transformation de Laplace de l'harmonique ϕ de la fonction

$$f(\xi_+,\xi_-) = \phi(\xi_+,\xi_-)h(\xi_+^-\xi_+,\xi_-^-\xi_-)$$

de $\xi = (\xi_+,\xi_-)$ dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r est définie comme la fonction

$$g(z,\xi) = \int \exp(\pi i|\eta_+|z)\exp(\pi i(\xi_-\eta^- + \eta_-^-\xi))|\eta_+|^\nu h(\eta_+,\eta_-)d\eta$$

de (z,ξ) dans le demi-plan adélique modulo r telle que $r\xi$ s'évanouit, définie par intégration selon la mesure canonique pour le groupe d'éléments demi-entiers du demi-plan adélique modulo r.

L'identité $\int\int_0^\infty \int_\infty^{+\infty} |\mathrm{ext}\, g(x+iy,\xi)|^2 y^\nu dxdyd\xi \;=\; (2\pi)^{-\nu}\Gamma(1+\nu)\int\int_0^\infty r^\nu |\mathrm{ext}\, h(r,\eta)|^2 drd\eta$ est satisfaite par intégration extérieure sur la gauche selon la mesure canonique pour le demi-plan adique modulo 1 sur l'ensemble des éléments η tel que $r\eta$ s'évanouit et par intégration extérieure à droite selon la mesure canonique pour l'anneau des éléments intégrals du demi-plan adique modulo r.

L'adjoint de la transformation de Radon de l'harmonique ϕ envoie une fonction

$$f(\xi_+,\xi_-) = \phi(\xi_+,\xi_-)h(\xi_+^-\xi_+,\xi_-^-\xi_-)$$

de $\xi = (\xi_+,\xi_-)$ dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r dont la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est une fonction $g(z,\xi)$ de (z,ξ) dans le groupe des éléments (z,ξ) du demi-plan adélique modulo 1 tel que $r\xi$ s'évanouit sur une fonction

$$f'(\xi_+,\xi_-) = \phi(\xi_+,\xi_-)h'(\xi_+^-\xi_+,\xi_-^-\xi_-)$$

de $\xi = (\xi_+, \xi_-)$ dans l'anneau des éléments intégrals du corps gauche adélique modulo r dont la transformation de Laplace de l'harmonique ϕ est une fonction $g'(z, \xi)$ de (z, ξ) dans le groupe des éléments (z, ξ) du demi-plan adélique modulo 1 tel que $r\xi$ s'évanouit si, et seulement si, l'identité

$$\int v(\xi)^- g'(z, \xi) d\xi = (i/z) \int v(\xi)^- \lambda(\xi + \xi^-)^{-1} g(z, \xi) d\xi$$

est satisfaite par intégration selon la mesure canonique pour le sous-groupe r–annihilé du demi-plan adique modulo 1 pour toute fonction analytique $v(\xi)$ de ξ dans le sous-groupe r–annihilé du demi-plan adique modulo 1 qui s'évanouit quand $\lambda(\xi + \xi^-)$ s'évanouit.

Références

1. L. de Branges, Hilbert Spaces of Entire Functions, Prentice-Hall, New York, 1968.

2. ____________, The Riemann hypothesis for Hilbert spaces of entire functions, Bull. Amer. Math. Soc. 15 (1986), 1–17.

Département de Mathématiques
Université Purdue
Lafayette IN 47907-2067