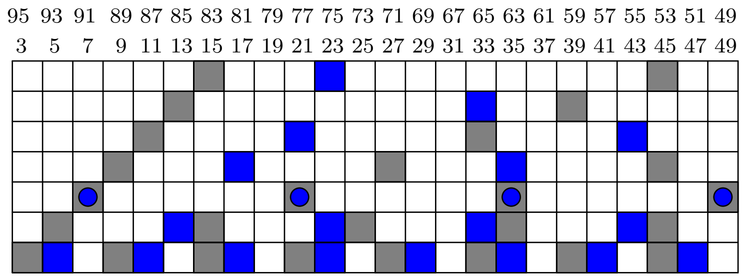
Des fonctions qui semblent minorer le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair donné

Denise Chemla

5/12/10

1 Présentation

On rappelle qu'à la recherche des décomposants de Goldbach d'un nombre pair $2x$, on a choisi de représenter les caractères de divisibilité des nombres impairs de 3 à $2x-3$ dans une grille telle que celle présentée ci-dessous pour le nombre pair 98.



Chaque ligne correspond à un nombre impair $2i+1$ pour i compris entre 1 et $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$. La grille de recherche des décomposants de Goldbach de $2x$ contient $\lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor$ colonnes.

Il y a autant de décompositions de Goldbach de $2x = 98$ qui font intervenir deux sommants supérieurs à $2\lfloor\sqrt{x}\rfloor+1$ que de colonnes de la grille ne contenant aucune case colorée.

On constate que les lignes correspondant à un nombre impair composé (par exemple, ici la septième ligne correspondant au nombre impair 15) ne contiennent jamais de case colorée qui n'ait déjà été colorée par les lignes des diviseurs du nombre composé en question (en l'occurrence pour le nombre composé 15, qui n'ait déjà été colorée dans les première et deuxième lignes correspondant aux nombres impairs 3 et 5).

L'étude de telles grilles amène à proposer la formule suivante pour minorer le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair donné.

Posons :

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \ 2i+1 \ \textit{est un nombre premier qui divise } x \\ 2 & \text{si } \ 2i+1 \ \textit{est un nombre premier qui ne divise pas } x \end{cases}$$

Le nombre de décomposants de Goldbach semble pouvoir être minoré par[1] :

$$f(2x) = \Big\lfloor \frac{x-1}{2} \Big\rfloor \prod_{i=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \Big(1 - \frac{a_i}{2i+1}\Big)$$

L'absence de distinction entre nombres premiers et composés (ce qui équivaut à considérer que les nombres composés peuvent éliminer eux-aussi des décomposants de Goldbach alors que ce n'est pas le cas) transforme la formule en :

$$f(2x) = \Big\lfloor \frac{x-1}{2} \Big\rfloor \prod_{i=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \Big(1 - \frac{2}{2i+1}\Big)$$

Le produit contient les fractions suivantes : $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \ldots, \frac{2\lfloor \sqrt{x} \rfloor - 1}{2\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1}$.

On le simplifie en $\frac{1}{2\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1}$.

La formule devient :

$$f(2x) = \Big\lfloor \frac{x-1}{2} \Big\rfloor \frac{1}{2\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1}$$

On la simplifie en :

$$f(2x) = \Big\lfloor \frac{\sqrt{x}}{4} \Big\rfloor$$

2 Mathématiques expérimentales

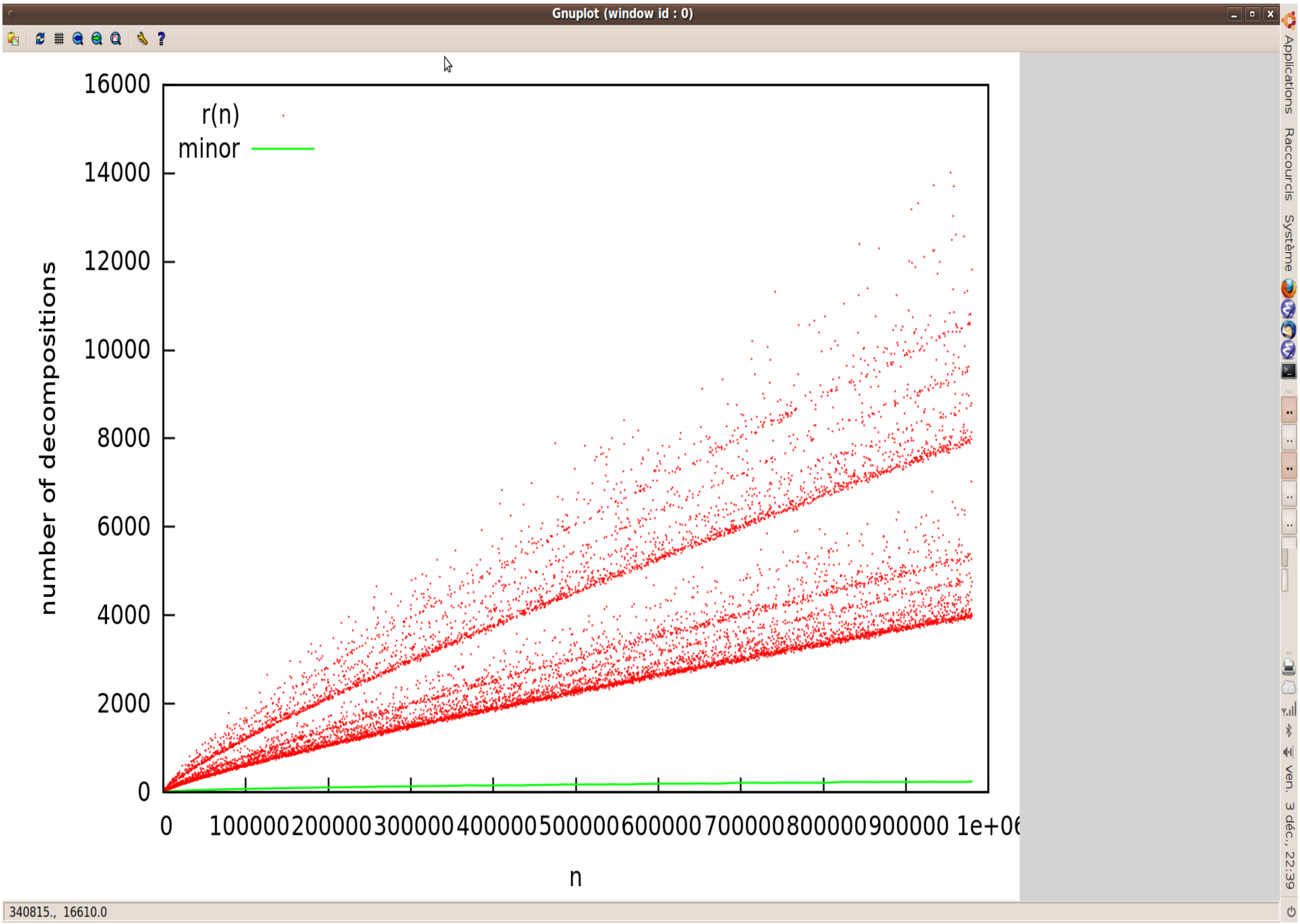
On appelle $NbGoldbach(2x)$ le nombre de décompositions de $2x$ comme somme de deux nombres premiers.

On va utiliser pour tester informatiquement quelques fonctions de minoration du nombre de décomposants de Goldbach un ensemble de logiciels utilitaires qui nous ont été fournis par Daniel Diaz, concepteur du langage GNU-Prolog.
Par programme, la fonction f testée jusqu'à 100 000 000 fournit un nombre $f(2x)$ toujours très inférieur à $NbGoldbach(2x)$ et supérieur ou égal à 1 dès que $2x$ est supérieur ou égal à 32.

$$\forall\ 2x\ \geq\ 32,\ 1\ \leq\ f(2x)\ \leq\ NbGoldbach(2x).$$

La représentation graphique de ce résultat par Gnuplot illustre le fait que cette minoration, bien qu'effective, est ridiculement éloignée de ce que l'on a coutume d'appeler la "comète de Goldbach", le graphique qui présente en fonction de x le nombre de décompositions de Goldbach de x.

[1] Dans l'article [1], des idées similaires sont présentées (notamment page 11-10 concernant la conjecture de Goldbach). L'auteur fournit des majorations du nombre de décomposants.

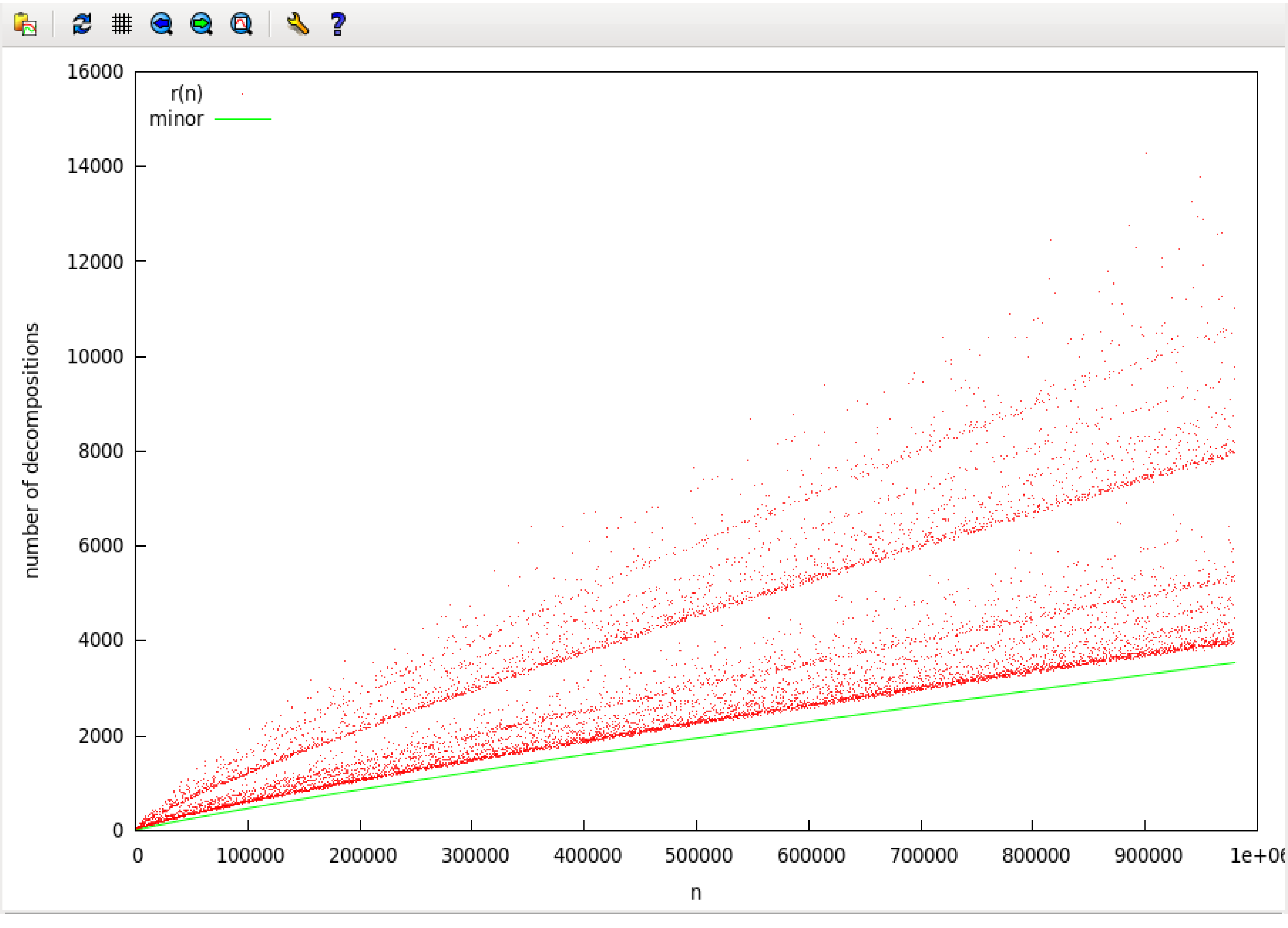


Gnuplot (window id : 0)
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
number of decompositions
r(n)
minor
0
100000
200000
300000
400000
500000
600000
700000
800000
900000
1e+06
n
340815., 16610.0
Applications
Raccourcis
Système
ven. 3 déc., 22:39

On va chercher une minoration de la forme $m.x^n$ qui se rapproche davantage de la comète.
D.Diaz propose la fonction

$$g(2x) = \left\lceil 0.01647.x^{0.89} \right\rceil$$

représentée ci-dessous et dont les constantes m et n ont été obtenues expérimentalement.

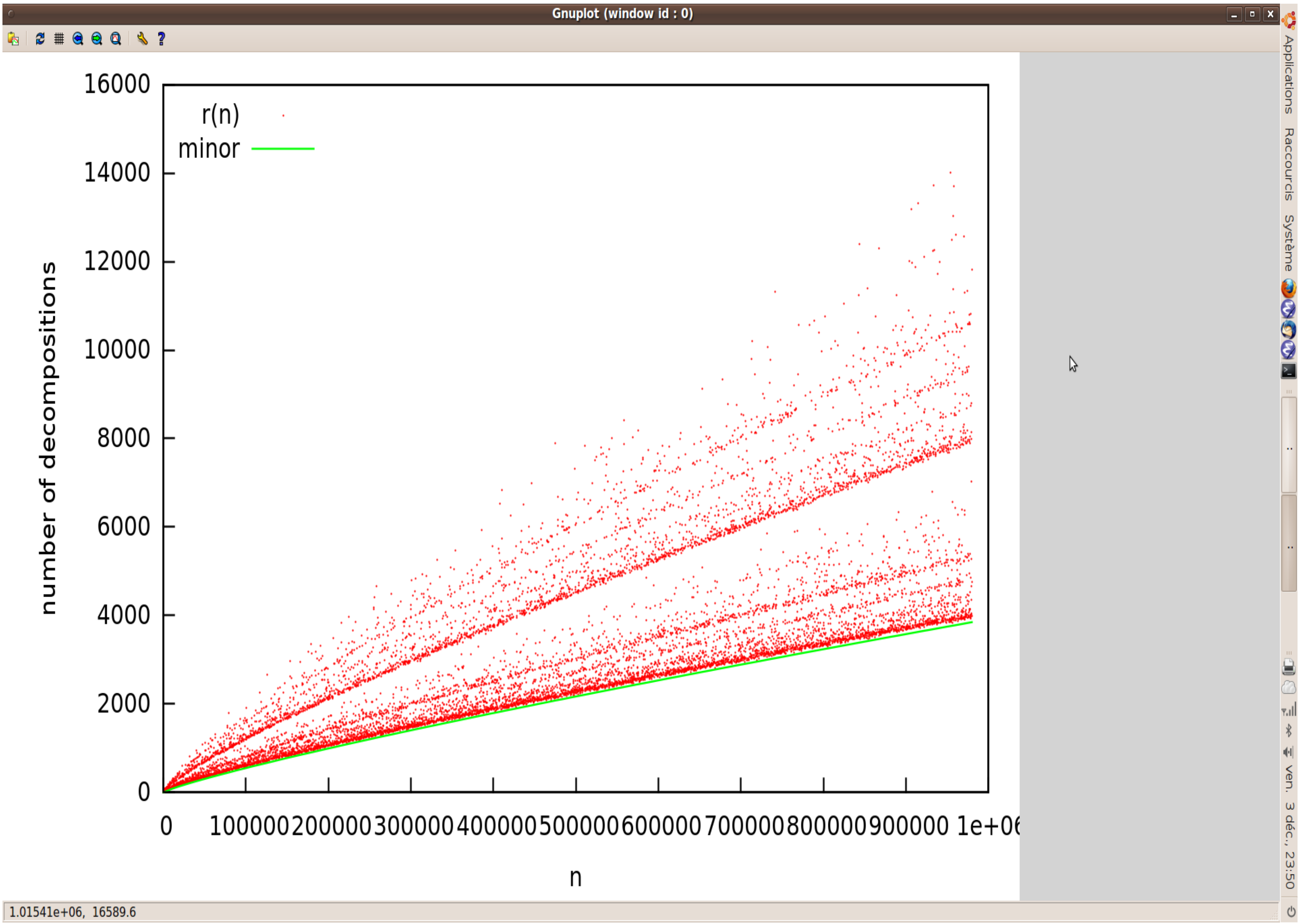


r(n)
minor
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
number of decompositions
0
100000
200000
300000
400000
500000
600000
700000
800000
900000
1e+06
n

Ces constantes ne semblant pas correspondre à des constantes mathématiques déjà identifiées, on essaie de s'approcher des nombres ci-dessus en utilisant des constantes mathématiques "connues".
On décide d'utiliser la constante de Gauss-Kuzmin-Wirsin, qui vaut 0.3036630029 et la constante de Niven qui vaut 1.70521114010537.
On propose la formule :

$$h(2x) = \left\lfloor 0.03036630029.x^{0.85260557} \right\rfloor$$

dans laquelle $m = 0.03036630029$ est la constante de Gauss-Kuzmin-Wirsin divisée par 10 et $n = 0.85260557$ est la constante de Niven divisée par 2 ; elle semble permettre d'obtenir systématiquement une minoration pour des nombres supérieurs à 3 614 168.


Gnuplot (window id : 0)
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
r(n)
minor
number of decompositions
0
100000
200000
300000
400000
500000
600000
700000
800000
900000
1e+06
n
1.01541e+06, 16589.6
Applications
Raccourcis
Système
ven. 3 déc., 23:50

Les formules ci-dessous quant à elles :

$$k(2x) = \left\lfloor 0.033333333333.x^{0.8346268} \right\rfloor$$

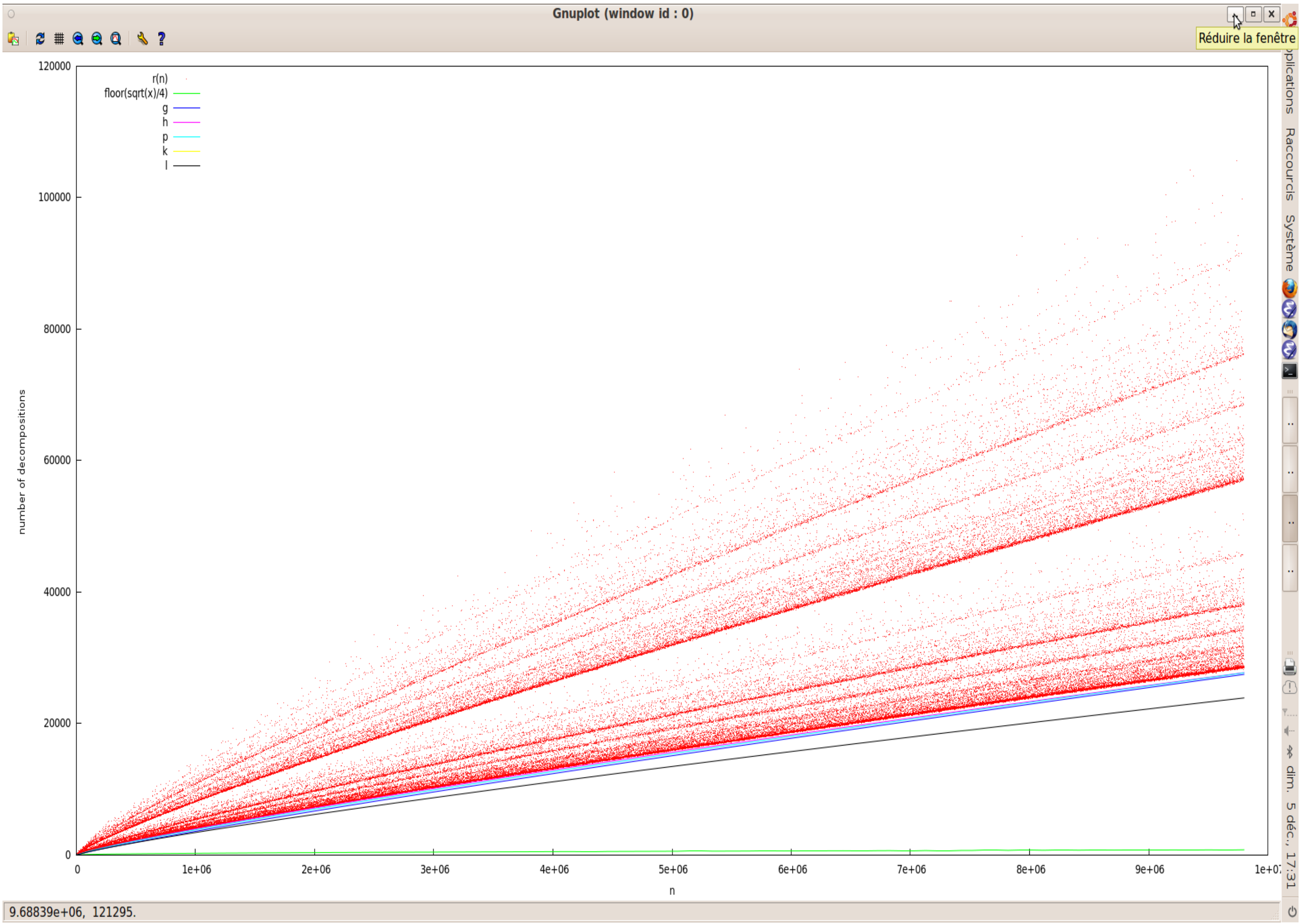
(qui utilise $m = \frac{1}{30}$, 30 étant l'une des premières primorielles et $n = 0.8346268$ qui est la constante de Gauss) et

$$l(2x) = \left\lfloor 0.0261497.x^{0.85260557} \right\rfloor$$

(qui utilise $m = 0.0261497$, la constante de Meissel-Mertens, et $n = 0.85260557$, à nouveau la constante de Niven divisée par 2) semblent également permettre d'obtenir systématiquement une minoration pour tout nombre jusqu'à 10^8.
Enfin, la fonction proposée par D.Diaz :

$$p(2x) = 1,11.B.\frac{x}{log\ x^2}$$

dans laquelle $B = 0.660161815846869573$ est la constante de Brun ne minore pas le nombre de décompositions de Goldbach seulement 18 fois jusqu'à 10^8.


Gnuplot (window id : 0)
Réduire la fenêtre
r(n)
floor(sqrt(x)/4)
g
h
p
k
l
number of decompositions
n
0
20000
40000
60000
80000
100000
120000
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
9.68839e+06, 121295.
Raccourcis
Système
dim. 5 déc., 17:31

Bibliographie

(1) Bernard TEISSIER, *Crible de Brun*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, no 2 (1965-1966), exp. no 11, p. 1-13., consultable à l'adresse $http : //www.numdam.org/item?id = SDPP\_1965-1966\_\_7\_2\_A1\_0$