Délimiter (Denise Vella-Chemla, 12.9.2020)

On a compris un certain nombre de choses autour de la conjecture de Goldbach [1]. Cependant on n'a pas réussi à démontrer qu'il existe toujours un décomposant car on n'a pas pu "délimiter la recherche".

Dernièrement on a choisi de représenter les nombres par des points sur un disque "normalisé".

On se focalise sur le nombre pair n dont on cherche des décomposants de Goldbach. n a une factorisation en produit de nombres premiers de la forme

$$F(n) = \prod_{p_k \leq \sqrt{n}} 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}.$$

On considère alors E $= \{p'_1, p'_2, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premiers qui apparaissent (ont une puissance non nulle) dans la décomposition $F(n)$. On représente géométriquement pour chaque nombre entier x inférieur à une certaine valeur, sa somme de complexes associée :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{k=|E|} e^{\frac{2i\pi(x \bmod p'_k)}{p'_k}}$$

Il aurait semblé, au premier abord, qu'il y ait toujours un décomposant de Goldbach de n que l'on appellera p, et qui ait une image $g(p)$ qui a son cosinus qui est minimal, i.e. qui se retrouve le plus à gauche qu'il est possible sur les visualisations ci-dessous, pour les nombres de 12 à 100. Du fait de la périodicité des restes, si cela s'était avéré toujours vrai, du moins sur les cas étudiés, cela nous aurait permis de nous focaliser sur quelques suites arithmétiques de nombres seulement, et peut-être de pouvoir démontrer l'impossibilité de l'absence d'un décomposant de Goldbach sur les seules suites $ax + b$ en question.

Cependant, cette hypothèse n'est pas valide pour les nombres 44, 52, 68 et 92. Bizarrement ce sont tous des $4p$ ($4 \times 11, 4 \times 13$, 4×17 et 4×23). En effet, les suites arithmétiques les "plus à gauche" pour 44 sont les $11x + 5$ et $11x + 6$ alors que ses décomposants sont 3, 7 et 13, d'aucune de ces 3 formes. Pour 52, ce sont les $13x + 6$ et les $13x + 7$ qui sont les plus à gauche alors que ses décomposants 5, 11 et 23 ne sont pas de ces formes et pour 68, ce sont les $17x + 8$ et les $17x + 9$ qui sont à l'extrême-gauche et 7 et 31, les décomposants de Goldbach de 68 ne sont pas de ces formes.

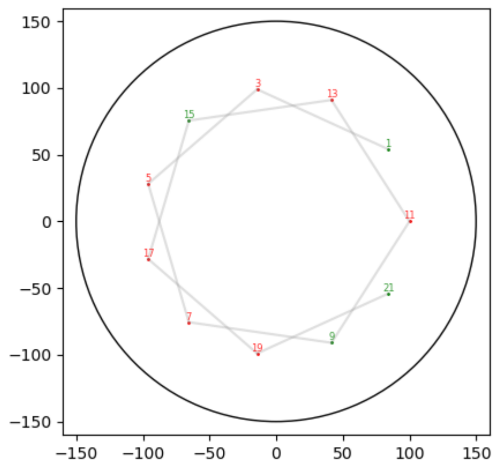
Concernant 54, même si aucun de ses décomposants n'apparaît parce qu'on n'a pas écrit les nombres "assez loin", l'un de ses décomposants (par exemple 11) est bien de la forme $(3x + 2)$ des nombres dont l'image est la plus à gauche qu'il est possible.

Remarque 1 : pour alléger les représentations, on ne visualise que les images des nombres impairs. Comme vu dans une note précédente [2], le fait de considérer également les nombres pairs ne fait qu'alourdir les dessins qui deviennent des "écheveaux" dans lesquels on passe systématiquement de gauche (les impairs) à droite (les pairs), ceci découlant de l'addition systématique de 1 (pour les pairs, correspondant à $e^{2i\pi(x \bmod 2)/2} = 1$) ou de -1 (pour les impairs, correspondant au $e^{2i\pi(x \bmod 2)/2} = e^{i\pi} = -1$).

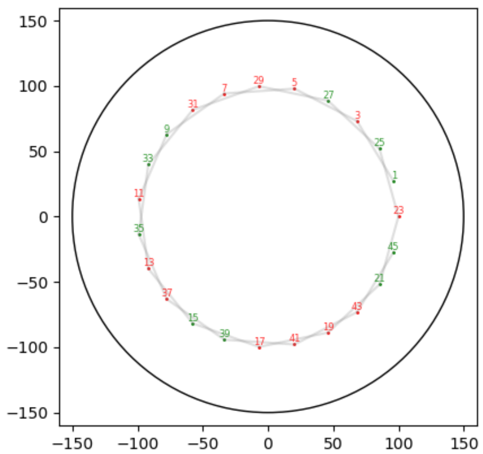
Remarque 2 : on oublie les doubles de nombres premiers qui vérifient trivialement la conjecture, on ne montre ci-dessous que les visualisations pour $n = 22$ (resp. $n = 46$) qui est le double du nombre premier 11 (resp. le double du nombre premier 23, ce sont les deux premières visualisations) et toutes les visualisations pour des doubles de nombres premiers seront du même style, une sorte de chaînette doublée entrelacée (les quadruples de nombres premiers ou les $2^k p$, comme 44, 52, 56 semblent avoir des visualisations associées similaires). Pour les $2p$ d'ailleurs, mais non pas pour les puissances de 2 supérieures strictement à 2 (les $4p$, les $8p$, etc., produits d'une puissance de 2 par un nombre premier simple), le décomposant trivial est tout à droite du dessin.

Remarque 3 : toujours pour des raisons de lisibilité, on n'a pas refermé les boucles et on a fait apparaître seulement les valeurs des nombres du "premier tour", i.e. les nombres positifs inférieurs à $2 \times \prod_{k \in E} k$ (dans la note précédente, l'écriture de certains nombres ayant lieu au même endroit, on ne parvenait plus à les lire).

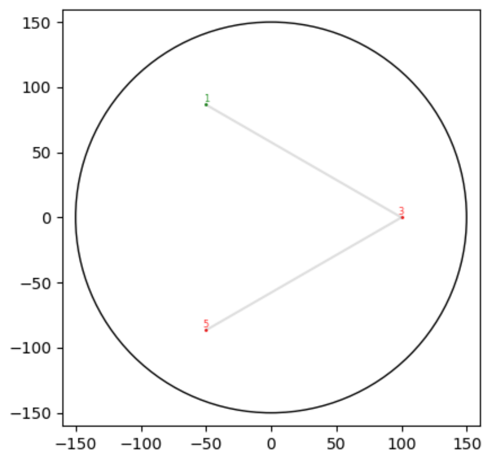
1. cf. http://denisevellachemla.eu/demo-caracterisation-DG.pdf.
2. http://denisevellachemla.eu/cgdv-sommes-de-complexes.pdf.



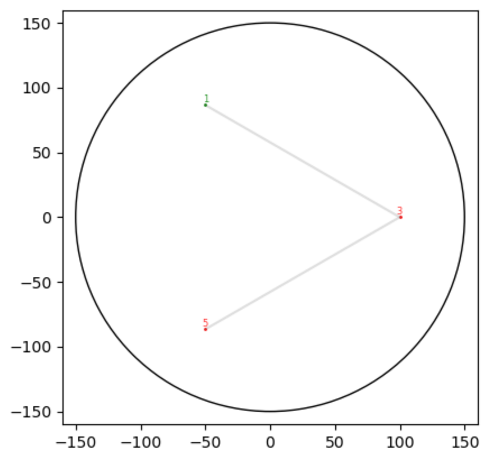
n = 22 (2p) ; E = {11}



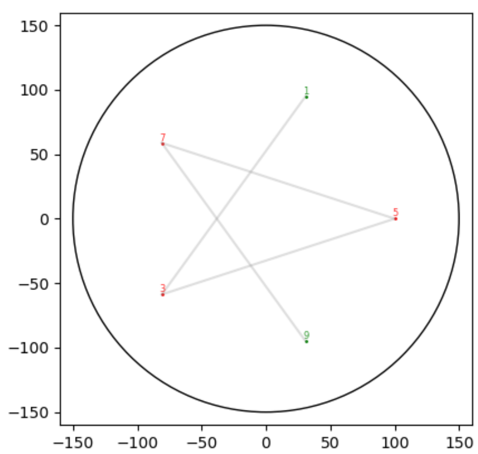
n = 46 (2p) ; E = {23}



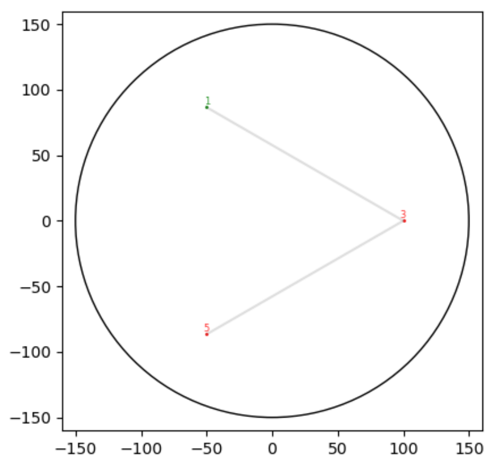
n = 12 ; E = {3}



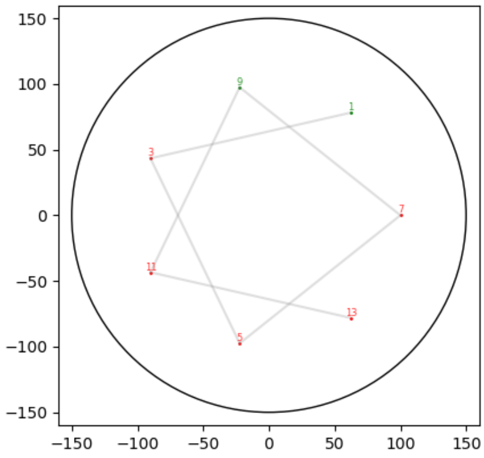
n = 18 ; E = {3}



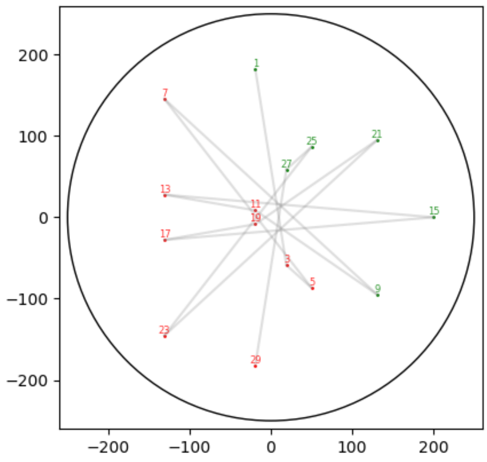
n = 20 ; E = {5}



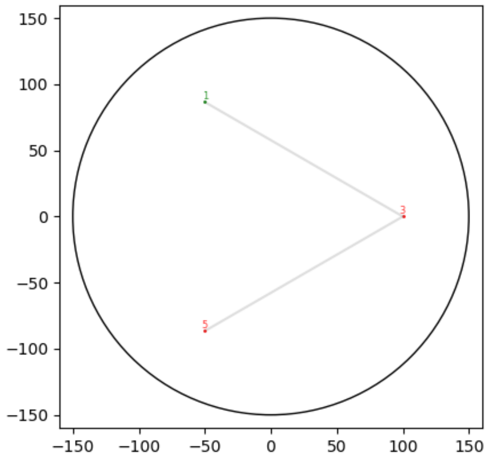
n = 24 ; E = {3}



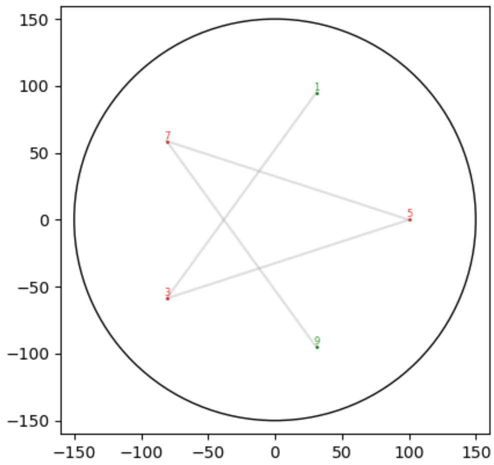
n = 28 ; E = {7}



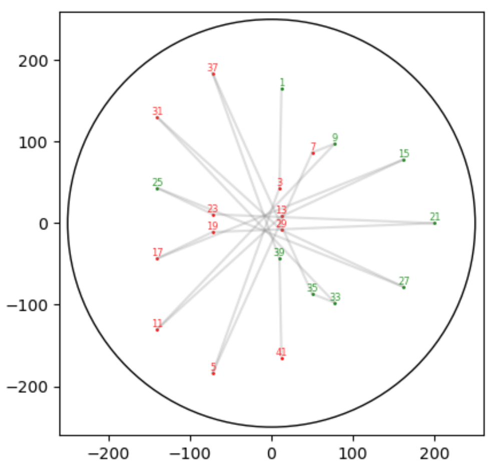
n = 30 ; E = {3,5}



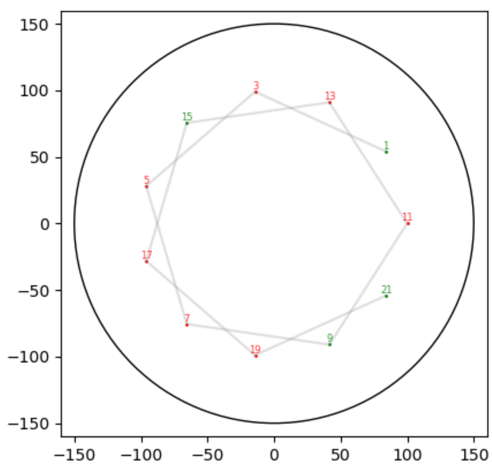
n = 36 ; E = {3}



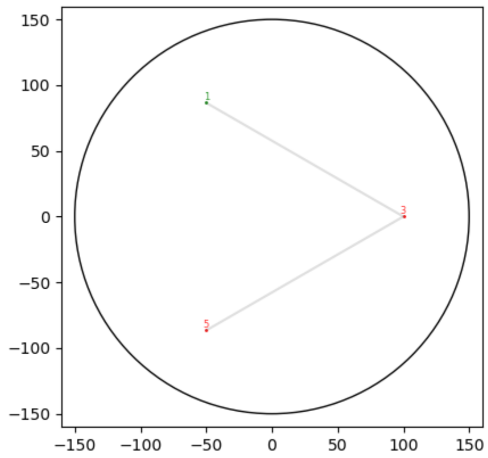
n = 40 ; E = {5}



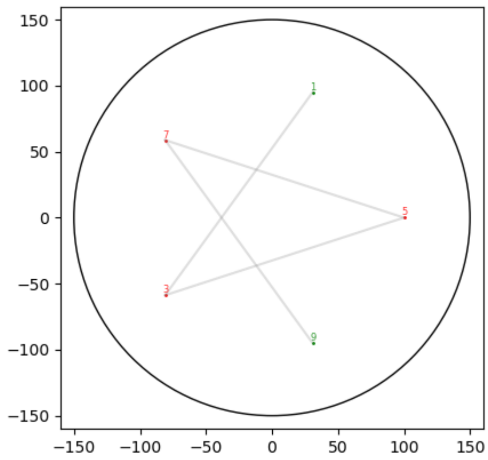
n = 42 ; E = {3,7}



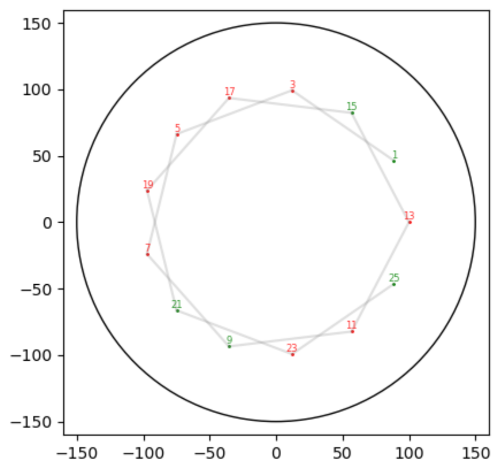
n = 44 ; E = {11}



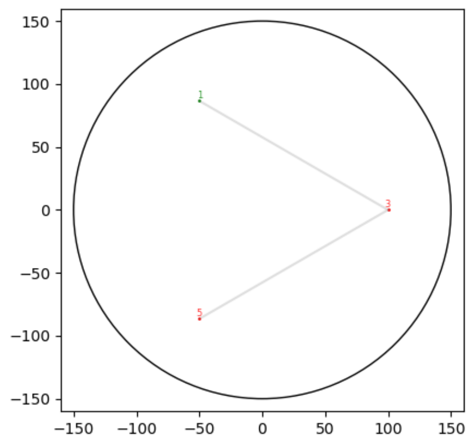
n = 48 ; E = {3}



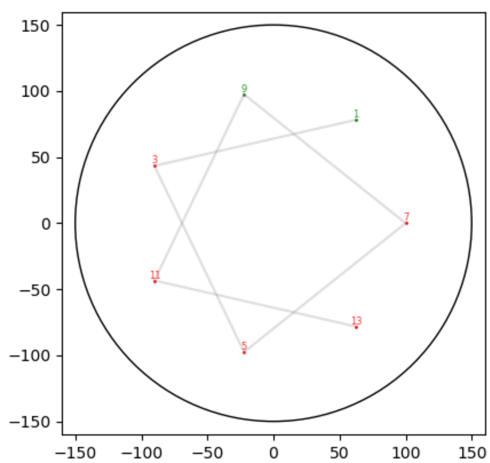
n = 50 ; E = {5}



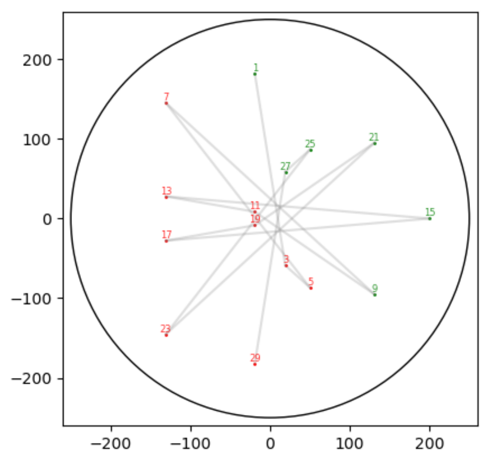
n = 52 ; E = {13}



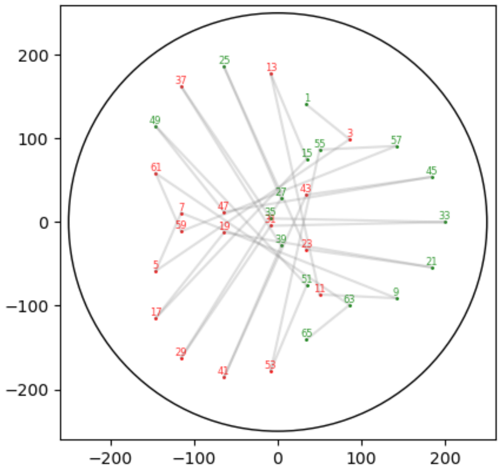
n = 54 ; E = {3}



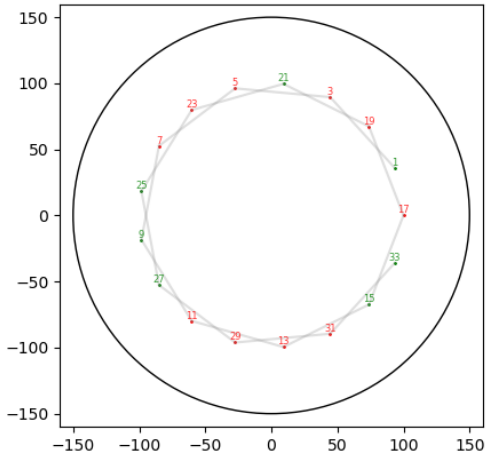
n = 56 ; E = {7}



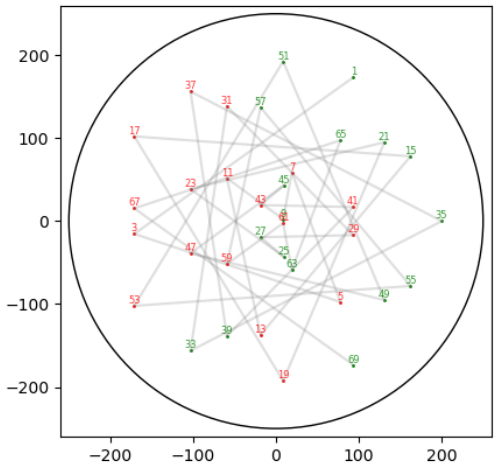
n = 60 ; E = {3,5}



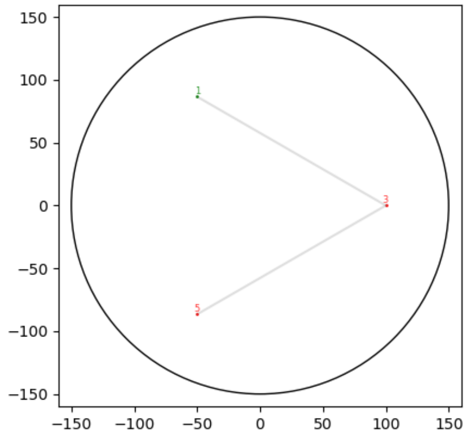
n = 66 ; E = {3,11}



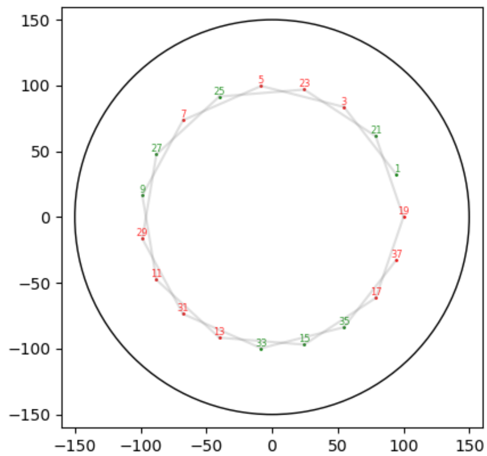
n = 68 ; E = {17}



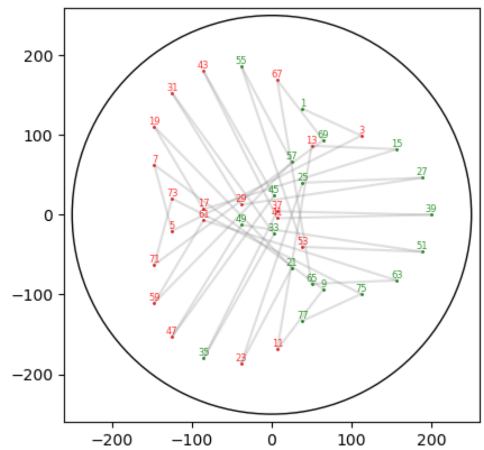
n = 70 ; E = {5,7}



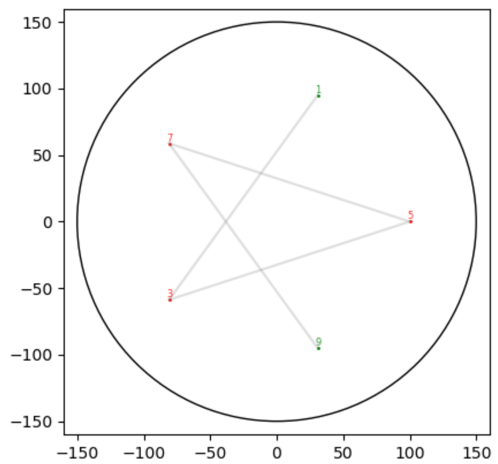
n = 72 ; E = {3}



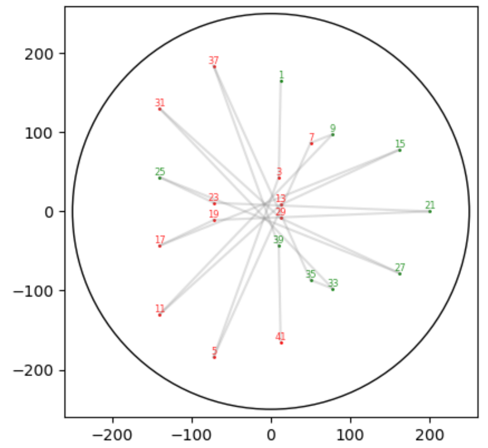
n = 76 ; E = {19}



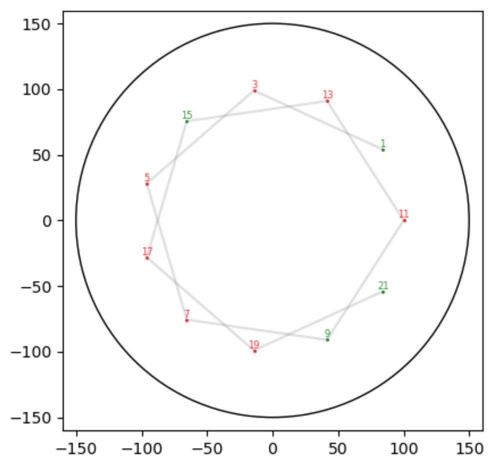
n = 78 ; E = {3,13}



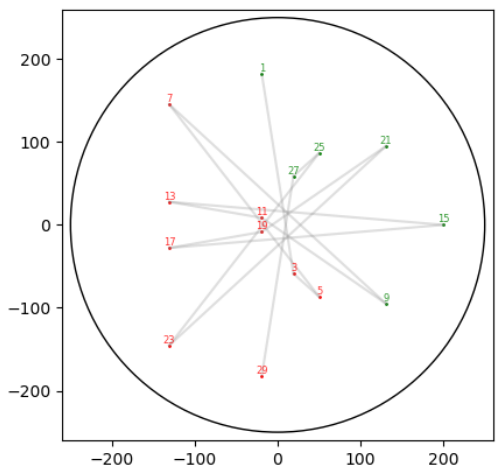
n = 80 ; E = {5}



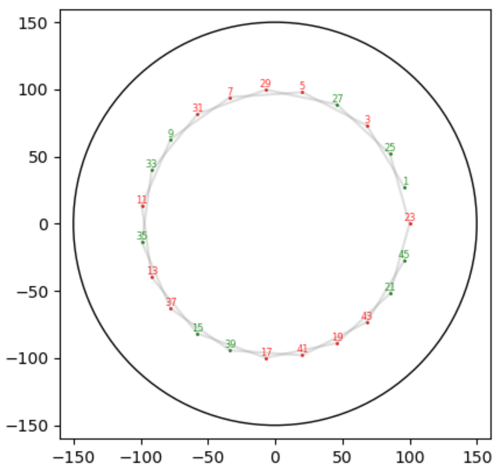
n = 84 ; E = {3,7}



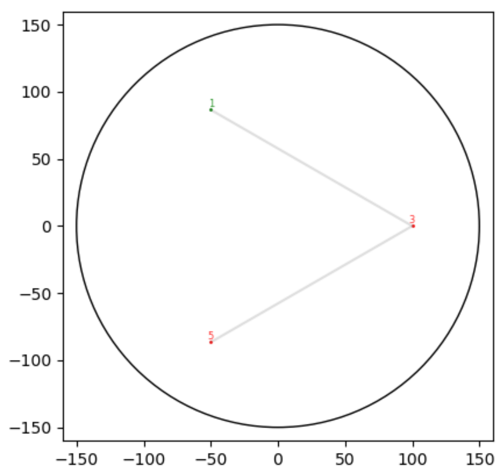
n = 88 ; E = {11}



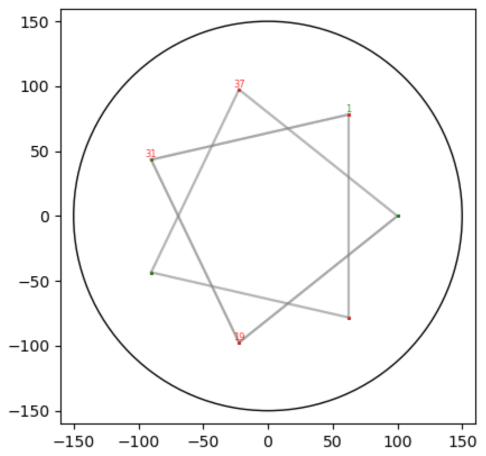
n = 90 ; E = {3,5}



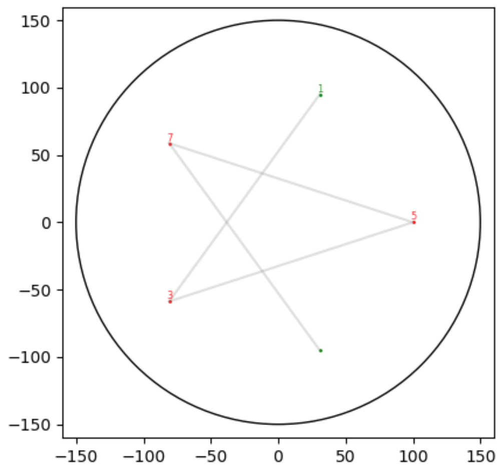
n = 92 ; E = {23}



n = 96 ; E = {3}



n = 98 ; E = {7}



n = 100 ; E = {5}

Pour les nombres posant problème de la forme $4p$ que sont 44, 52 et 68, on "réussit" cependant à placer l'un de leur décomposant à l'extrême gauche du graphique en prenant $E = \{5\}$. On obtient alors comme visualisation la même étoile à 5 branches déjà obtenue pour 20, 40, 50, 80 et 100. Il faudrait pouvoir démontrer que pour les nombres de forme $4p$, les suites arithmétiques $10x + 3$ ou $10x + 7$ permettraient systématiquement de trouver un décomposant, en poussant plus loin les expérimentations dans un premier temps.

Si on essaye de généraliser [3] les résultats pour les nombres dont la factorisation contient seulement deux nombres premiers (2 et un autre nombre premier p), on a remarqué sur les cas étudiés que :

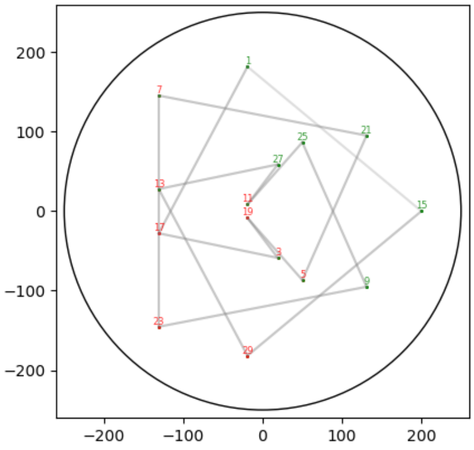
- les nombres factorisables comme 2^a3^b ont 5 ou bien un autre nombre $3x+2$ parmi leurs décomposants de Goldbach (12, 18, 24, 36, 48, 54, 72, 96, dessin ressemblant au signe $>$) ;
- les nombres factorisables comme 2^a5^b ont 3 et/ou 7 ou bien un autre $5x+2$ et/ou $5x+3$ parmi leurs décomposants de Goldbach (20, 40, 50, 80, 100, étoile de Noël) ;
- les nombres de la forme 2^a7^b ont 3 et/ou 11 ou bien un autre $7x+3$ et/ou $7x+4$ parmi leurs décomposants de Goldbach (28, 56, 98) ;
- les nombres de la forme 2^a11^b ont 5 et/ou 17 ou bien un autre $11x + 5$ et/ou $11x + 6$ parmi leurs décomposants de Goldbach ;
- les nombres de la forme 2^a13^b ont 7 et/ou 19 ou bien un autre $13x + 6$ et/ou $13x + 7$ parmi leurs décomposants de Goldbach ;
- les nombres de la forme 2^a19^b ont 29 ou bien un autre $19x+9$ et/ou $19x+10$ parmi leurs décomposants de Goldbach ;
- les nombres de la forme 2^a23^b ont 11 ou bien un autre $23x+11$ et/ou $23x+12$ parmi leurs décomposants de Goldbach ;

ce qu'on aimerait pouvoir résumer par :

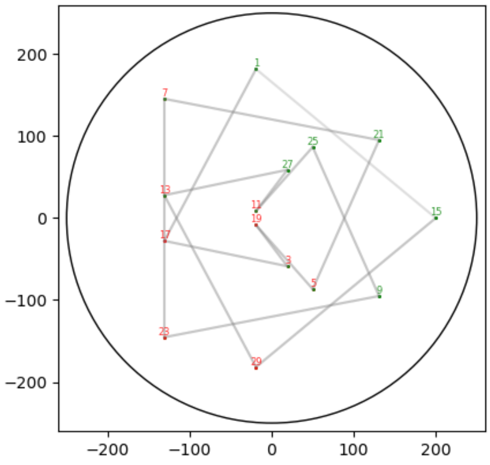
- les nombres de la forme 2^ap^b ont un $px + \dfrac{p \pm 1}{2}$ parmi leurs décomposants de Goldbach.

Pour mémoire, le fait d'avoir éliminé les pairs des représentations fait un peu perdre de vue les structures, même si cela allège les visualisations. On reprend ci-dessous les visualisations complètes, pour les nombres 30, 42, 60, 66, 78, 90 qui ont au moins 3 nombres premiers différents dans leur factorisation ainsi que 210, 2310, des doubles de primorielles ou 770. Il faut garder à l'esprit que c'est parfois au "second tour" que les nombres impairs "plus grands", i.e. ceux des moitiés hautes des intervalles, sont "attrapés".

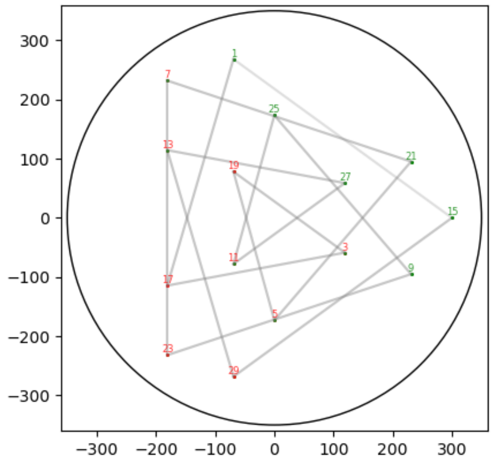
3. Ce qui ne prouve rien.



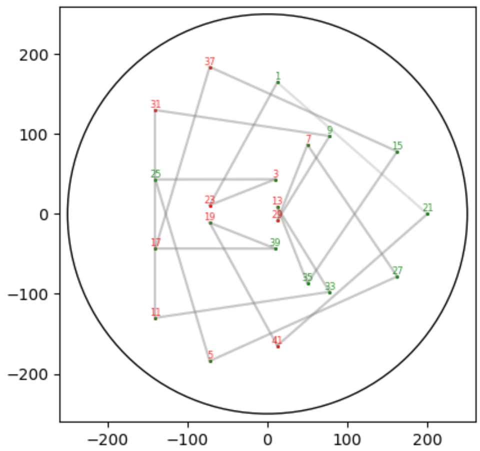
n = 30 ; E = {3,5}



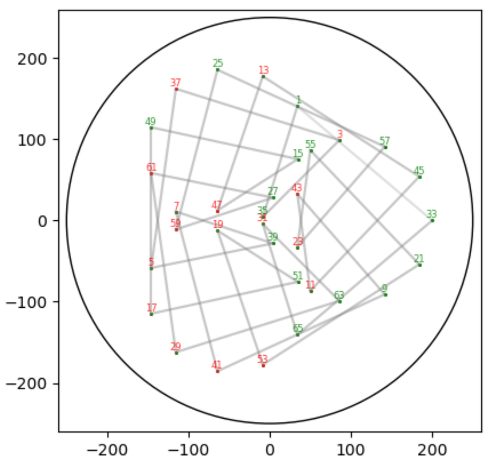
n = 60 ; E = {3,5}



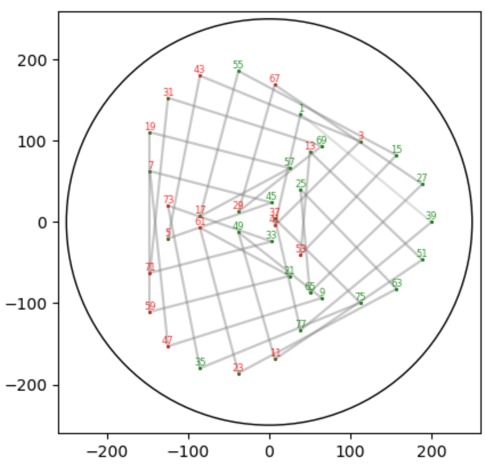
n = 90 ; E = {3,5}



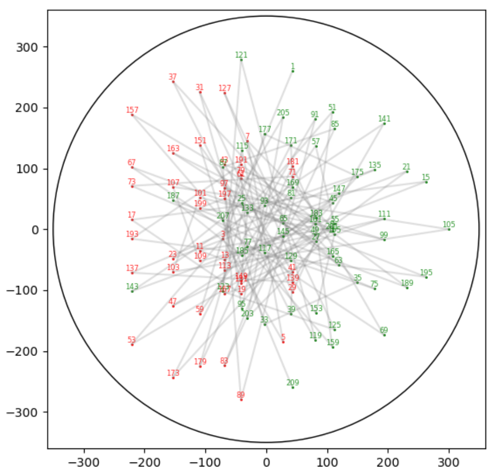
n = 42 ; E = {3,7}



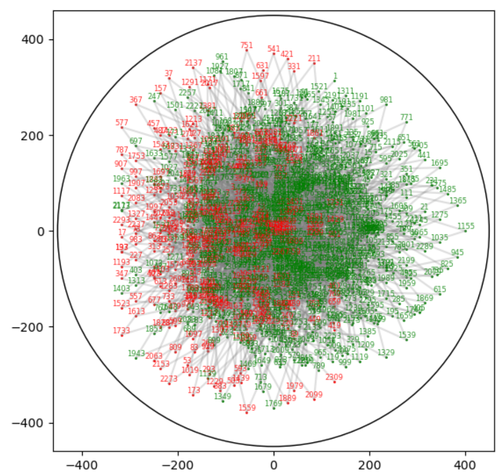
n = 66 ; E = {3,11}



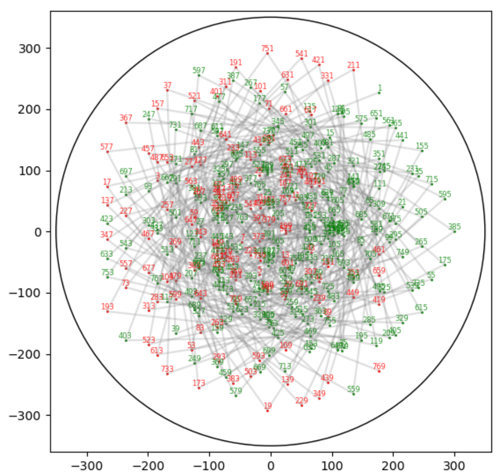
n = 78 ; E = {3,13}



n = 210 ; E = {3,5,7}



n = 2310 ; E = {3,5,7,11}



n = 770 ; E = {5,7,11}