Une preuve simple de l'hypothèse de Riemann.

Hatem A. Fayed

Résumé : Dans cet article, on prouve que les zéros non triviaux de la fonction zeta de Riemann doivent être sur la droite critique, un problème connu sous le nom d'hypothèse de Riemann.

1. Fonction zeta de Riemann

La fonction zeta de Riemann est définie sur le plan complexe par ([1]),

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathfrak{Re}(s) > 1 \tag{1}$$

où $\mathfrak{Re}(s)$ dénote la partie réelle de s. Partout ailleurs, $\zeta(s)$ est définie par prolongement analytique. Un simple prolongement peut être obtenu en utilisant la fonction eta de Dirichlet définie par,

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad \mathfrak{Re}(s) > 0 \tag{2}$$

La fonction zeta peut s'écrire en fonction de la fonction eta ainsi ([2]),

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1-2^{1-s})}\eta(s) \tag{3}$$

Le prolongement aide à calculer $\zeta(s)$ pour $\mathfrak{Re}(s) > 0$ sauf pour $s = 1 + \dfrac{2\pi i k}{\log(2)}, k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ qui sont les zéros de $(1-2^{1-s})$.

Les zéros de la fonction zeta de Riemann

Les zéros de la fonction eta incluent tous les zéros de la fonction zeta : les zéros triviaux pour les entiers pairs négatifs et les zéros non triviaux qui sont sur la droite critique, $0 < \mathfrak{Re}(s) < 1$. On sait que tous les zéros non triviaux sont symétriques par rapport à l'axe des x et par rapport à la droite critique $\mathfrak{Re}(s) = 1/2$ ([1], [3]).

L'hypothèse de Riemann

Tous les zéros non triviaux de la fonction zeta de Riemann sont sur la droite critique $\mathfrak{Re}(s) = 1/2$.

Démonstration : Supposons que $s = -a + 1/2 + it$ où $0 \leq a < 1/2, t \neq 0$, est un zéro non trivial, alors

$$\eta\left(-a + \frac{1}{2} + it\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{-a+\frac{1}{2}+it}} = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n^{a-\frac{1}{2}} e^{-it\log(n)} = 0 \tag{4}$$

Université de Science et Technologie, Programme mathématique, Ville de Science et technologie Zewail, Jardins d'octobre, 6 octobre, Gizeh 12578, Égypte, `hfayed zewailcity.edu.eg`
Référence : https://arxiv.org/pdf/2209.01890.pdf.
7 septembre 2022.

ou,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \beta_n e^{-it\log(n)} = 1, \quad \beta_n = (-1)^n n^{a-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

ce qui implique que,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \cos(t \ \log(n)) = 1 \tag{6}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \sin(t \ \log(n)) = 0 \tag{7}$$

Par symétrie par rapport à la droite critique, $s = a + 1/2 + it$ doit être un zéro non trivial également ; c'est-à-dire,

$$\eta\left(a + \frac{1}{2} + it\right) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n^{-a-\frac{1}{2}} e^{-it\log(n)} = 0 \tag{8}$$

ou,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-2a} \beta_n e^{-it\log(n)} = 1 \tag{9}$$

ce qui implique que,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-2a} \beta_n \cos(t \ \log(n)) = 1 \tag{10}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-2a} \beta_n \sin(t \ \log(n)) = 0 \tag{11}$$

Supposons que l'équation (7) soit satisfaite et montrons que l'équation (11) ne peut être satisfaite (à moins que $a = 0$). Pour montrer cela, on utilise l'inégalité suivante ([4]),

$$\left\| \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \boldsymbol{x}_j \right\| \geq \left| \ |\alpha_k| \left\| \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{x}_j \right\| - \left\| \sum_{j=1}^{p} (\alpha_j - \alpha_i) \boldsymbol{x}_j \right\| \ \right| \tag{12}$$

où $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_j, j = 1, 2 \cdots p$ sont des éléments arbitraires d'un espace linéaire normé et i peut prendre n'importe quelle valeur de $\{1, 2 \cdots p\}$.

Dénotons par δ la différence entre les côtés gauches des équations (7) et (11), alors $|\delta|$ peut être borné inférieurement en utilisant l'équation (12) ainsi,

$$\begin{aligned} |\delta| &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} \left[1 - n^{-2a}\right] \beta_n \sin(t \ \log(n)) \right| \\ &\geq \left| \left[1 - m^{-2a}\right] \left| \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \sin(t \ \log(n)) \right| - \left| \sum_{n=2}^{\infty} \left[n^{-2a} - m^{-2a}\right] \beta_n \sin(t \ \log(n)) \right| \ \right| \\ &\geq \left| \sum_{n=2}^{\infty} \left[n^{-2a} - m^{-2a}\right] \beta_n \sin(t \ \log(n)) \right| \end{aligned} \tag{13}$$

où l'équation (7) est utilisée dans la dernière étape et $m \in \{2, 3 \cdots\}$.

Puisque $a \neq 0$, la somme des séries dans le côté droit de l'inégalité ci-dessus est dépendante de la valeur de m, ainsi, il est toujours possible de trouver une valeur de m pour toute valeur de t telle que le côté droit ne soit pas nul. Par conséquent, pour $a \neq 0$, si $\eta\left(a+\frac{1}{2}+it\right)=0$, alors $\eta\left(-a+\frac{1}{2}+it\right)\neq 0$ ce qui contredit la propriété de symétrie des zéros non triviaux par rapport à la droite critique $s=1/2+it$. Le seul moyen de satisfaire cette propriété est d'avoir $a=0$, ce qui signifie que tous les zéros doivent être sur la droite critique. $\square$

Références

[1] Bernhard Riemann, Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grösse, textitMonatsberichte der Berliner Akademie, pages 671–680, November 1859.

[2] Frank William John Olver, National Institute of Standards, Technology (U.S.), D.W. Lozier, R.F. Boisvert, and C.W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions Paperback and CD-ROM*, Cambridge University Press, 2010.

[3] Harold Davenport and Hans Arnold Heilbronn, On the zeros of certain Dirichlet series, *Journal of The London Mathematical Society-second Series*, pages 307–312, 1936.

[4] Sever Silvestru Dragomir, A generalisation of the Pečarić-Rajić inequality in normed linear spaces, *Math. Inequal. Appl.*, 12: 53-65, 2009.