Minorer le nombre de décomposants de Goldbach

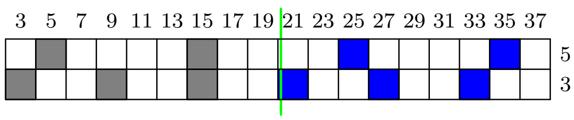
Denise Vella-Chemla

1/4/13

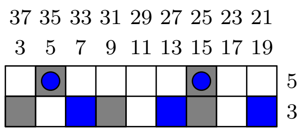
La conjecture de Goldbach stipule que tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers.

Les décomposants de Goldbach d'un nombre pair peuvent être caractérisés ainsi : un entier $m \in]\sqrt{n}, n/2]$ qui n'est divisible par aucun des nombres premiers $p < \sqrt{n}$ et dont le complémentaire à n qui est $n-m$ n'est pas non-plus divisible par p est un décomposant de Goldbach de n.

Découvrons graphiquement les décompositions de Goldbach du nombre pair 40 de sommants supérieurs à $\sqrt{40} = 6, \ldots$. On note en gris la divisibilité des nombres compris entre 3 et $n/2$ par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ et en bleu la divisibilité des nombres compris entre $n/2$ et n par ces mêmes nombres premiers.



En référence à l'arithmétique des tissus de Lucas, procédons à ce que l'on peut appeler un "pliage du tissu" autour de $n/2$ (le long de la ligne verte).



On obtient la grille ci-dessus, dont la longueur est réduite de moitié, et dans laquelle, trivialement, les décompositions de Goldbach de 40, dont les sommants sont supérieurs à $\sqrt{40}$, correspondent aux colonnes dans lesquelles aucune case n'est colorée.

On comprend aisément que parmi les nombres premiers de l'intervalle $]\sqrt{n}, n/2]$, seuls seront conservés ceux qui ne sont pas congrus à n selon un module premier inférieur à $\sqrt{n}$.

On peut donc minorer le nombre de décomposants de Goldbach de n en éliminant de l'ensemble des nombres premiers de l'intervalle $]\sqrt{n}, n/2]$ les nombres appartenant à une seule classe de congruence (la classe de congruence de n) selon tout module premier p inférieur à $\sqrt{n}$*.

Il semble ainsi naturel de minorer $dg(n)$, le nombre de décomposants de Goldbach de n ainsi :

$$dg(n) \quad \geqslant (\pi(n/2) - \pi(\sqrt{n})) \prod_{p \leqslant \sqrt{n}} \frac{p-1}{p}$$

Le nombre de nombres premiers compris entre $\sqrt{n}$ et $n/2$ croît de 1 à chaque pair double d'un nombre premier, mais décroît de 1 à chaque pair de la forme $p^2 + 1$ avec p premier. On peut utiliser pour minorer ce nombre la minoration fournie par Tchebychev.

*Dans la mesure où il faudrait éliminer les nombres premiers de la classe de congruence de n seulement selon les modules premiers ne divisant pas n, on doit, en éliminant une classe de congruence de manière systématique, indépendamment du fait que le module considéré soit ou ne soit pas un diviseur de n, minorer le nombre de décomposants de Goldbach.

Rosser et Schoenfeld (1962) fournissent la minoration suivante (pour $x \geqslant 285$):

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) > \frac{e^{-\gamma}}{log\ x} \left(1 - \frac{1}{2(log\ x)^2}\right)$$

On pourrait donc penser que (pour $x \geqslant 285$) :

$$dg(n) \quad \geqslant \left(\frac{n\ log\ 2}{2(log\ n + log\ 0.5)} - \frac{2\sqrt{n}\ log\ 2}{log\ n}\right) \frac{e^{-\gamma}}{log\ x} \left(1 - \frac{1}{2(log\ x)^2}\right)$$

Mais un professeur nous explique que les termes d'erreur devenant trop importants par rapport aux termes principaux, une telle approche de la conjecture de Goldbach est inenvisageable.