Dés (Denise Vella-Chemla, 19.1.2019)

Il s'agit aujourd'hui de montrer où les probabilités ainsi que le non-discret interviennent dans la recherche de décomposants de Goldbach.

On a vu dans des notes précédentes que chercher un décomposant de Goldbach d'un nombre n consiste à éliminer 2 classes de congruences au plus par module p premier, pour tout p inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

On se fixe sur les nombres premiers 3, 5 et 7. On va étudier la manière dont se combinent des motifs rythmiques de périodes de longueur 3, 5 ou 7 sur un mot (une séquence) de longueur $105 = 3.5.7$ ("instant" à partir duquel on retrouvera le même motif rythmique global) et on se fixe pour but de compter précisément les occurrences de certains sous-motifs rythmiques dans le rythme global.

On représente le fait qu'un nombre sur 3 n'est pas satisfaisant pour être un décomposant potentiel de Goldbach tandis que 2 nombres sur 3 le sont par le couple $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

On représente le fait que deux nombres sur 5 ne sont pas satisfaisants pour être un décomposant potentiel de Goldbach tandis que 3 nombres sur 5 le sont par le couple $\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

Enfin, on représente le fait que deux nombres sur 7 ne sont pas satisfaisants pour être un décomposant potentiel de Goldbach tandis que 5 nombres sur 7 le sont par le couple $\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & \frac{5}{7}\end{pmatrix}$.

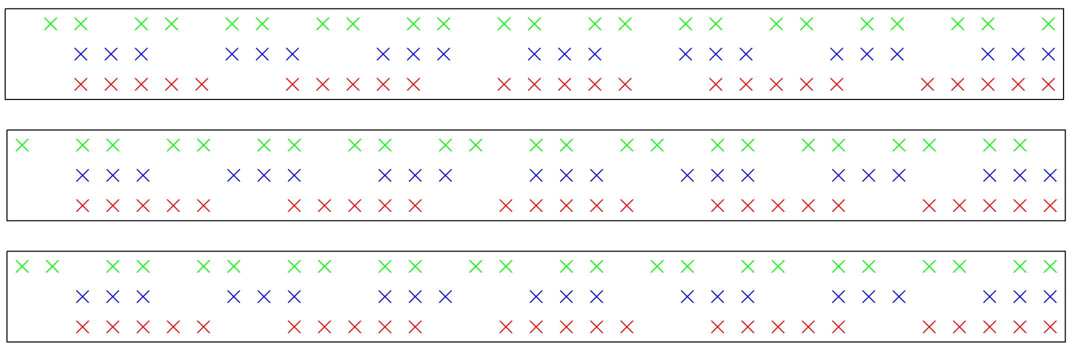
On calcule les probabilités par une sorte de produit tensoriel représenté à notre manière ainsi :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & \frac{5}{7}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{3}{15} & \frac{6}{15}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & \frac{5}{7}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\frac{4}{105} & \frac{8}{105} & \frac{6}{105} & \frac{12}{105} & \frac{10}{105} & \frac{20}{105} & \frac{15}{105} & \frac{30}{105}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

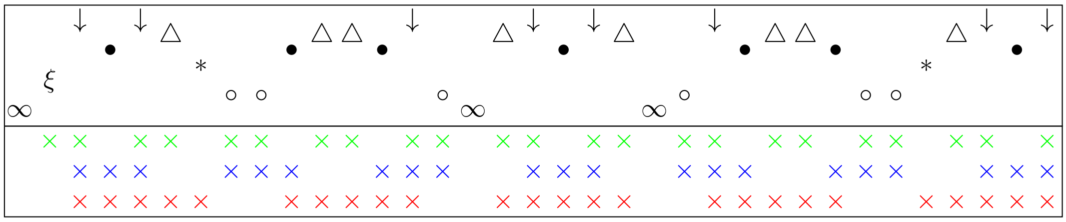
On a bien sûr obtenu 2^3 quantités (des cardinaux ensemblistes), à retrouver précisément parmi les colonnes de la première à la 105-ième.

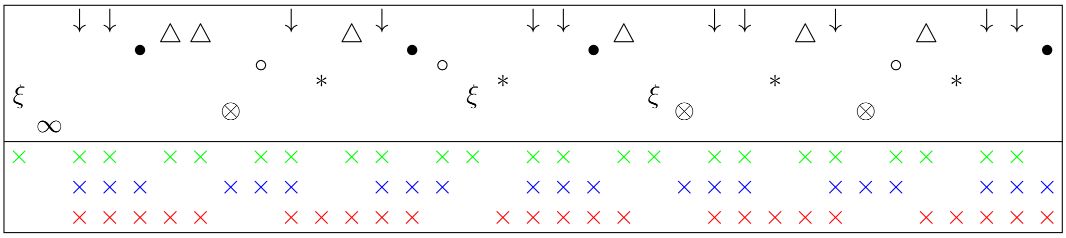
Attention : il est important de préciser qu'on compte ici des cardinaux d'ensembles obtenus par la combinatoire d'intersections ensemblistes et il ne faut en aucune manière essayer de voir à quels nombres les rangs des colonnes correspondent car on ne factorise rien ici.

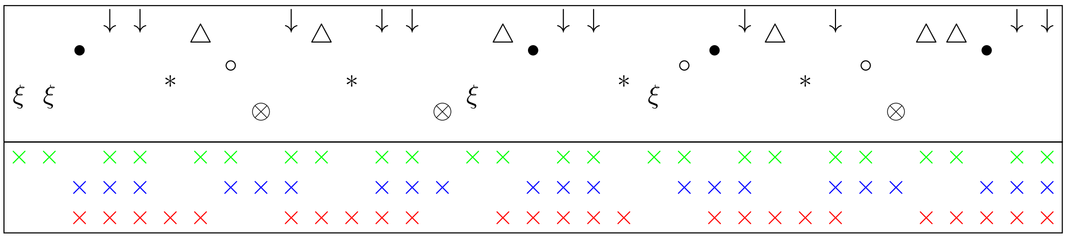
D'abord, dessinons des croix dans 3 grilles à lire à la suite l'une de l'autre, et qui respectent bien les motifs rythmiques qu'on s'est fixé (1/3, 2/3 pour la première ligne de chaque grille, 2/5, 3/5 pour la seconde ligne, et 2/7, 5/7 pour la troisième ligne.



Maintenant, utilisons 8 symboles différents, qu'on place au-dessus des grilles, et qui dénotent les colonnes appartenant à la même classe, c'est-à-dire les colonnes qui ont leurs croix au même endroit.





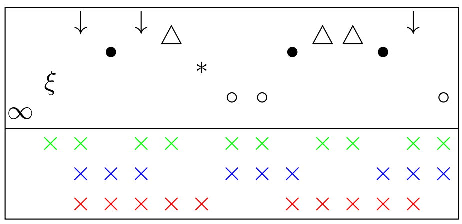


On retrouve nos cardinaux d'ensembles : 4 ∞, 6 $\otimes$, 8 ξ, 10 $*$, 12 $\circ$, 15 $\bullet$, 20 $\triangle$ et 30 $\downarrow$.

Il s'agit de bien observer que, même si dans chaque ligne existe une palindromie du mot complet autour d'un certain centre à retrouver, et ce pour chaque symbole, les séquences de symboles prises indépendamment présentent des motifs rythmiques très irréguliers.

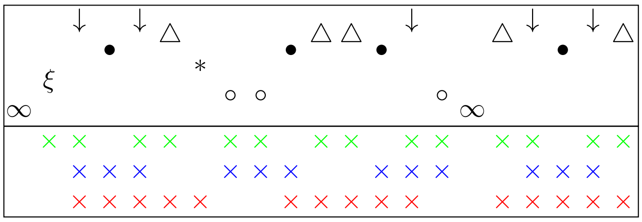
Imaginons maintenant que l'on ne veuille prendre qu'une sous-partie de la séquence des symboles, par exemple ses 15 premières colonnes, histoire de bien couper la séquence totale en 7, ou bien ses 21 premières colonnes (pour la couper en 5) ou enfin, ses 35 premières colonnes (pour la couper en 3, cette dernière possibilité correspondant à la première des 3 grilles vues précédemment et on ne la reproduira donc pas ci-dessous).

Voici les 15 premières colonnes :



Etudions les cardinaux des ensembles de symboles obtenus : 1 ∞, 1 ξ, 1 $*$, 3 $\circ$, 3 $\bullet$, 3 $\triangle$ et 3 $\downarrow$. Ces nombres ramenés aux cardinaux globaux sont en général à multiplier par des nombres entiers (par exemple, multiplier par 4 le nombre de $\circ$ pour obtenir le nombre global de $\circ$ qui est 12). Mais pour le symbole $\triangle$, la division ne tombe pas juste parce que le rythme est coupé n'importe où.

Voici les 21 premières colonnes :



Ici, les cardinaux des ensembles de symboles sont : 2 ∞, 1 ξ, 1 $*$, 3 $\circ$, 4 $\bullet$, 5 $\triangle$ et 5 $\downarrow$. Et c'est alors pour le symbole $\bullet$ que la division ne tombe pas juste parce que le motif rythmique est coupé n'importe où.

Enfin, pour la grille dont on prend les 35 premières colonnes, ce sont 4 motifs rythmiques sur les 8 qui sont coupés quelque part dans le motif, ce qui fait que les divisions ne tombent pas juste : les motifs rythmiques codés par les symboles $\infty, \bullet, \triangle$ et $\downarrow$.

Voici dans un tableau les ratios résumés. Si on fait la moyenne des multiplicandes entre parenthèses (nombre k par lequel il faudrait multiplier le nombre de symboles d'une certaine sorte pour obtenir le nombre total de symboles de cette sorte dans le mot global), on obtient bien un nombre proche de 3, proche de 5 ou proche de 7 suivant la colonne dans laquelle on se situe. On vérifie que le décompte des symboles est juste dans la dernière ligne. La dernière colonne totalise les symboles.

1 ∞ (4)	2 ∞ (2)	3 ∞ $(1,\dots)$	4
0 $\otimes$ (0)	0 $\otimes$ (0)	0 $\otimes$ (0)	6
1 ξ (8)	1 ξ (2)	1 ξ (8)	8
1 $*$ (10)	1 $*$ (10)	2 $*$ (5)	10
3 $\circ$ (4)	3 $\circ$ (4)	6 $\circ$ (2)	12
3 $\bullet$ (5)	4 $\bullet$ $(3,\dots)$	7 $\bullet$ $(1,\dots)$	15
3 $\triangle$ $(6,\dots)$	5 $\triangle$ (4)	8 $\triangle$ $(2,\dots)$	20
3 $\downarrow$ (10)	5 $\downarrow$ (6)	8 $\downarrow$ $(3,\dots)$	30
15 $(47/7 = 6,\dots)$	21 $(31/7 = 4,\dots)$	35 $(22/7 = 3,\dots)$	105

Lorsqu'on cherche les décomposants de Goldbach, c'est exactement ce genre de raisonnement que l'on tient. On pourrait considérer toutes les périodes possibles (y compris les périodes de longueur impaire composée ou de longueur paire), mais c'est inutile puisque les périodes en question ne sont que redondantes par rapport aux périodes de longueurs des nombres premiers.

Un calcul simple donne (dans la première ligne, si l'on considère l'impair composé 9, et dans les lignes suivantes en ne gardant que les nombres premiers) :

$$\frac{1}{3}\frac{3}{5}\frac{5}{7}\frac{7}{9}\frac{9}{11} = \frac{1}{11}$$

$$\frac{1}{3}\frac{3}{5}\frac{5}{7}\frac{9}{11} = \frac{9}{7}\frac{1}{11} > \frac{1}{11}$$

$$\frac{1}{3}\frac{3}{5}\frac{5}{7}\frac{9}{11}\frac{11}{13} > \frac{1}{13}$$

$$\frac{1}{3}\frac{3}{5}\frac{5}{7}\frac{9}{11}\frac{11}{13}\frac{15}{17} = \frac{135}{91}\frac{1}{17} > \frac{1}{17}\dots$$

On a pu voir dans les grilles que certains motifs rythmiques apparaissent très tardivement (ici le motif codé par le symbole $\otimes$) mais peut-être que le fait que le numérateur de la fraction obtenue dans les calculs ci-dessus soit toujours supérieur à 1 garantit cependant l'existence d'un décomposant de Goldbach.