Quelques dessins trouvés dans les travaux de Gauss (Denise Vella-Chemla, février 2024)

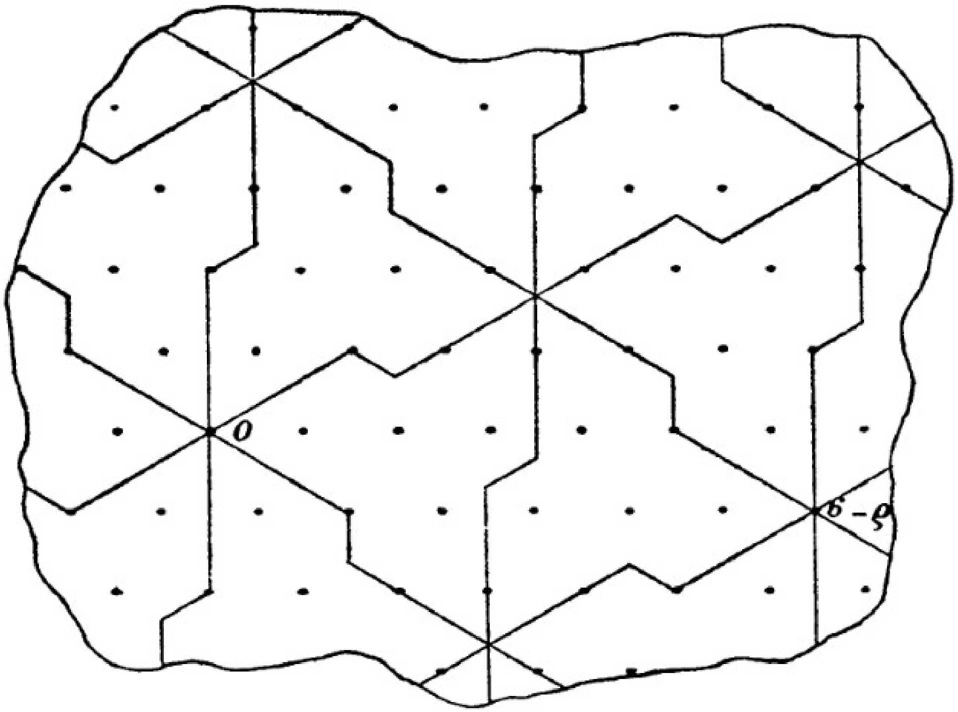
Les illustrations ci-après sont extraits de pages des travaux de Gauss :

- La première illustration est extraite de *Werke : Arithmetik und Algebra* ;

- Les deuxièmes et troisièmes illustrations sont extraites de *Werke : Hoehere Arithmetik* ;

- Toutes les illustrations suivantes sont extraites de *Werke : Nachtraege zur reinen Mathematik.*

Schema für 43.

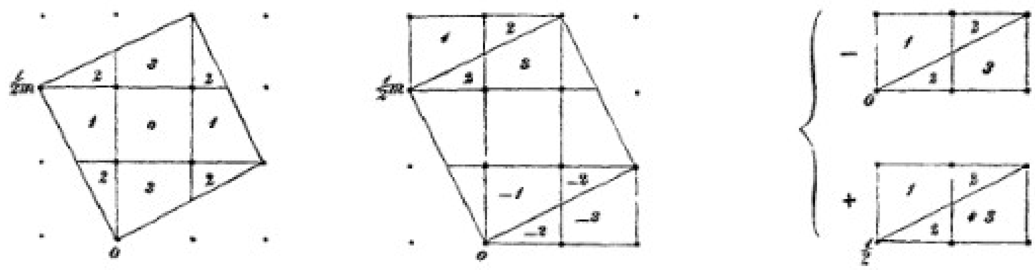


[18.]

Theorie des biquadratischen Restes $-1-2i$.

Der Modulus $= m = a + bi$ soll so beschaffen sein, dass a ungerade, b gerade; auch setzen wir voraus, dass derselbe eine Primzahl sei.

Der Decident wird durch folgende Schemata vorgestellt, von deren Identität man sich leicht überzeugt:



Der Kürze wegen bezeichnen wir $S(x,\ x+\alpha,\ x+\alpha+\mathfrak{b},\ x+\mathfrak{b})$ durch $[x, \alpha, \mathfrak{b}]$ so dass

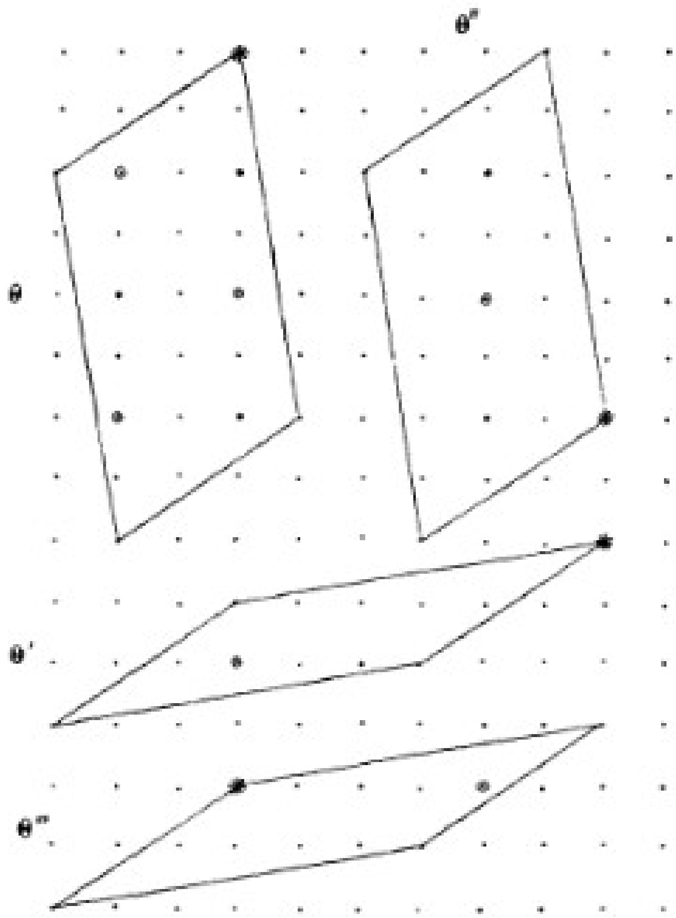
$$\begin{aligned}[x, \alpha, \mathfrak{b}] &= -[x, \mathfrak{b}, \alpha] = [x+\alpha, \mathfrak{b}, -\alpha] = -[x+\alpha, -\alpha, \mathfrak{b}] \\ &= [x+\alpha+\mathfrak{b}, -\alpha, -\mathfrak{b}] = -[x+\alpha+\mathfrak{b}, -\mathfrak{b}, -\alpha]\end{aligned}$$

Setzt man ferner

$$\frac{m}{-2-4i} = \frac{-a-2b}{10} + \frac{-b+2a}{10}\, i = Q$$

Für alle durch $1+i$ theilbaren	ist dann $\varepsilon =$	wenn
θ	$+1$	β positiv
θ'	-1	α positiv
θ''	-1	β positiv
θ'''	$+1$	α positiv

θ		θ'		θ''		θ'''	
$0-i$	-1	$+2-i$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	-1
$0-2i$	$+1$	$+3-i$	-1	$+1+i$	-1	-2	$+1$
$0-3i$	-1			$+1+2i$	$+1$		
$+1-i$	$+1$						
$+1-2i$	-1						
$+1-3i$	$+1$						



Modulus 3, $D = 9$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

$0 \mid +1 \parallel 1 \mid +1-i \parallel 2 \mid +i$

Indices der Elementargrössen.

$+i \mid 2 \parallel 1+i \mid 3 \parallel 1+2i \mid 1 \parallel 1-2i \mid 3$

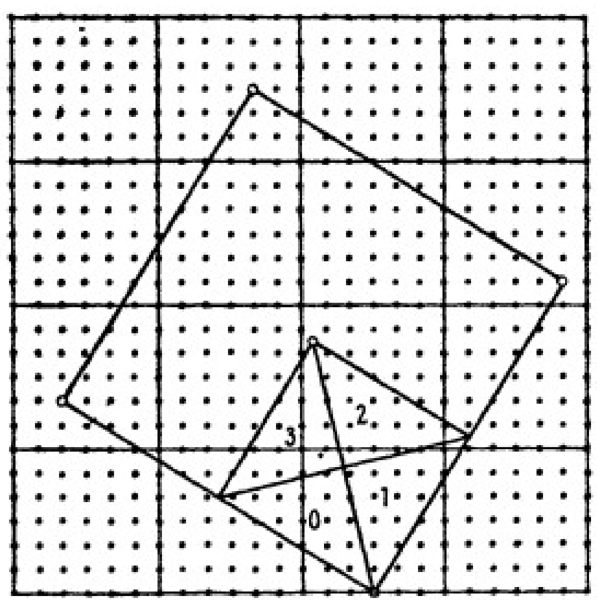
Modulus $1+2i$, $D = 5$.

Primitiv-Wurzel.

$+i$

Indices der Elementargrössen.

$+i \mid 1 \parallel 1+i \mid 3 \parallel 1-i \mid 2 \parallel 1-2i \mid 1$



$13+8i$

[IX.]

HAUPTMOMENTE DES BEWEISES FÜR DIE BIQUADRATISCHEN RESTE.

[Ein Zettel in Ec 3, Kapsel 43.]

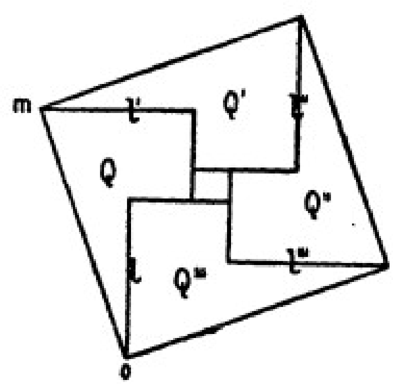
Rest $a+bi=m$, Modulus $A+Bi=M$, beide $\equiv 1$ (mod. $2+2i$).

1. Man bildet den ersten Quadranten von M und macht durch Division mit m dessen Variegation.

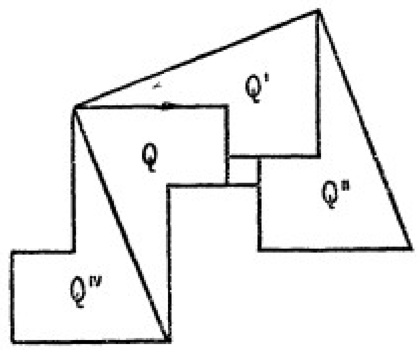
2. Man verbinde den Punkt 0 auf irgend eine Weise, doch ohne aus den Ligamenten der Variegation herauszugehn, mit $\frac{m-1}{1+i}$ durch die Linie l und zieht gleichfalls die Linien (l', l'', l''')

$$il+m,\quad -l+(1+i)m,\quad -il+im.$$

Dadurch wird das ganze Quadrat, das mittelste Quadrat abgerechnet, welches ohnehin den Intensor 0 hat, in 4 Theile symmetrisch getheilt; zwischen l und l' liegt Q, zwischen l' und l'' liegt Q' u. s. w.



3. Es sei $-iQ''' = Q^{IV}$. Wir setzen an die Stelle von Q''' dessen Variegation Q^{IV}; allein, da dessen Quadrate durchgehends Intensoren haben, die um 1 kleiner sind als die Intensoren von Q''', so wird noch der ganze Inhalt von Q^{IV} hinzuzusetzen seyn. Der Apparat sieht also so aus:



4. Ebenso sei

$$Q'' - im = Q^{V},\ im - iQ' = Q^{VI};$$

die Intensoren von Q^{VI} sind die von Q negativ, genau so wie die von Q^{V} ....

BEMERKUNG.

Vgl. zu diesem Bruchstücke die »*Vorbereitungen zur allgemeinen Theorie der biquadratischen Reste*« Werke II, S. 326—331. Unter »Variegation des ersten Quadranten von M durch Division mit m« dürfte das Quadrat mit den Ecken 0, $\frac{M}{m}$, $(1+i)\frac{M}{m}$, $i\frac{M}{m}$ zu verstehen sein. Der Begriff des Intensors wird a. a. O. in art. 4, Werke II, S. 328 festgesetzt. Statt »Ligamenten« braucht GAUSS daselbst den Ausdruck »Ligaturen«; man geht wohl nicht fehl, wenn man dem Bruchstücke ein früheres Datum beilegt als den »Vorbereitungen«. Dasselbe dürfte gelten für Notizen des Nachlasses im Handbuch 18, Bd (begonnen Oktober 1805) S. 248—256 und andere in der Scheda An, S. 74—88 befindliche Studien, von denen SCHERING in seiner Fußnote Werke II, S. 334 Gebrauch gemacht zu haben scheint, die sich aber ihrer allzu skizzenhaften Form wegen zur Veröffentlichung nicht eignen.

BACHMANN.

Idem alio modo.

Valor seriei

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2+\text{etc.}$$

fit

$$=\frac{4}{\pi\pi}\int\int\frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(1-\cos\varphi^2\cos\psi^2)}}$$

a $\varphi=0$ usque ad $\varphi=90^0$ et a $\psi=0$ usque ad $\psi=90^0$.

Faciendo itaque

$$\cos\varphi\cos\psi=\cos v,$$

idem valor fit

$$=\frac{4}{\pi\pi}\int\int\frac{d\varphi\, dv}{\sqrt{(\cos\varphi^2-\cos v^2)}}$$

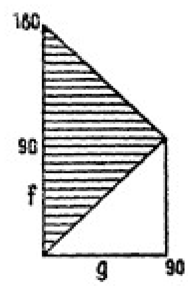
et quidem ab $v=0$ usque ad $v=90^0$ et a $\varphi=0$ usque ad $\varphi=v$. Denique statuendo

$$\varphi+v=f,\ v-\varphi=g$$

erit expressio nostra

$$=\frac{2}{\pi\pi}\int\int\frac{df\, dg}{\sqrt{\sin f.\sin g}}$$

a $g=0$ usque ad $g=90^0$ et ab $f=g$ usque ad $f=180^0-g$. Sed haud difficulter probatur integrale eundem valorem nancisci, si sumatur ab $f=0$ usque ad $f=90^0$ et a $g=0$ usque ad $g=90^0$, unde ipsius valor deducitur



$$=2\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi},$$

uti supra.