Deux en moins (Denise Vella-Chemla, juillet 2022).

À cause d'une proposition de trouver les décomposants de Goldbach d'un nombre pair, supérieurs à la racine carrée de ce nombre pair, en éliminant une ou deux (soit systématiquement moins de 2) classes de congruences, selon tout module premier inférieur à la racine carrée du nombre pair considéré[1], on cherche à calculer $\prod_{2<p\leqslant n}\left(1-\dfrac{2}{p}\right)$.

On trouve une réponse dans un blog, postée par le pseudo abiessu vers 2011, modifiée vers 2018[2], dans laquelle est écrit :

"J'aimerais calculer, ou trouver une estimation raisonnable pour le produit ressemblant à un produit de Mertens suivant :

$$\prod_{2<p\leqslant n}\left(1-\frac{2}{p}\right)^{-1}=\prod_{2<p\leqslant n}\frac{p}{p-2}.$$

Faisons cela aussi explicitement que possible (je voudrais trouver la constante et le terme d'erreur).

1. Le problème original. D'abord, considérons l'identité :

$$\log\left(1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)=\log\left(1-\frac{2}{p}\right).$$

De cela, il découle que :

$$\sum_{2<p\leqslant n}\log\left(1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2}\right)+\sum_{2<p\leqslant n}\log\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)=\sum_{2<p\leqslant n}\log\left(1-\frac{2}{p}\right).$$

En multipliant par -1 et en prenant l'exponentielle des deux côtés amène :

$$\left(\prod_{2<p\leqslant n}1-\frac{1}{p}\right)^{-2}\cdot\prod_{2<p<n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1}=\left(\prod_{2<p\leqslant n}1-\frac{2}{p}\right)^{-1}$$

Rappelons que $\Pi_2=\prod_{2<p}\left(1-\dfrac{1}{(p-1)^2}\right)$ est la constante de Brun des nombres premiers jumeaux, et que le produit du côté gauche converge vers l'inverse de celle-ci. C'est alors par une formule de Mertens que l'on sait que :

$$\left(\prod_{2<p\leqslant n}1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=\frac{1}{2}e^{\gamma}\log n+O(1)$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni (c'est précisément le théorème 2.7 (e) dans le livre de Montgomery *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory*). Par mise au carré de ce résultat asymptotique, on peut conclure :

$$\left(\prod_{2<p\leqslant n}1-\frac{2}{p}\right)^{-1}=\frac{1}{4}e^{2\gamma}\Pi_2^{-1}\log^2 n+O(\log n)$$

[1]://denise.vella.chemla.free.fr/jade1.pdf.

[2]https://math.stackexchange.com/questions/22411/computing-the-product-of-p-p-2-over-the-odd-primes?rq=1

Espérons que ça aide.

Note : j'ai substitué par la constante des nombres premiers jumeaux pour cet autre produit parce qu'elle converge très rapidement en comparaison avec le terme d'erreur. Je peux donner plus de détails si souhaité, mais je laisse cela en exercice.

2. Est-il possible de faire mieux ? Le terme d'erreur peut-il être amélioré ? Oui. Il s'avère que l'on peut rendre le terme d'erreur bien meilleur. En utilisant le théorème des nombres premiers, on trouve,

$$\left(\prod_{2<p\leqslant n} 1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{1}{2}e^{\gamma}\log n + e^{-c\sqrt{\log n}}$$

où c est la constante utilisée dans la preuve de la région sans zéro[3]. Puisque $e^{-\sqrt{\log n}}$ décroît plus rapidement que n'importe quelle puissance de log, on obtient un bien meilleur résultat en élevant au carré cette estimation. Précisément, on a :

$$\left(\prod_{2<p\leqslant n} 1-\frac{2}{p}\right)^{-1} = \frac{1}{4}e^{2\gamma}\Pi_2^{-1}\log^2 n + O(e^{-c\sqrt{\log n}})$$

(à nouveau, la convergence vers Π_2 est beaucoup trop rapide pour interférer avec le terme d'erreur).

Je souhaiterais parier que c'est le mieux que l'on puisse faire, et que quel que soit ce que l'on pourrait faire de mieux, cela impliquerait des résultats plus forts sur le terme d'erreur pour $\pi(x)$, la fonction de comptage des nombres premiers.

3. Résultats numériques. Juste pour le plaisir, la constante exacte, devant le terme $\log^2 n$ est : 1.201303 [4]. C'est proche comment ? Bien, pour :

$n = 10$
on obtient une erreur de 0.630811.

$n = 50$
on obtient une erreur de 1.22144

$n = 100$
on obtient une erreur de 0.63493

$n = 1000$
on obtient une erreur de 0.438602

[3] Problème : avec les valeurs fournies dans la section 3 ci-après, je ne peux trouver quelle constante a été utilisée pour calculer le terme d'erreur.

[4] On rappelle les valeurs des différentes constantes : avec $e = 2.71828, \gamma = 0.5772156649$, on a $e^{2\gamma} = 3.17221895813$ dont le quart vaut 0.79305473953. Sur la toile, la constante de Brun est indiquée comme valant $\Pi_2 = 0.6601618158$ (voir https://mathworld.wolfram.com/TwinPrimesConstant.html), dont l'inverse est 1.51478012825, qui multiplié par le reste donne bien la valeur fournie de 1.201303 comme constante à multiplier par $\log^2 n$ dans la dernière formule ci-dessus.

$n = 10^4$
on obtient une erreur de 0.250181

$n = 10^5$
on obtient une erreur de 0.096783

$n = 10^6$
on obtient une erreur de 0.017807

où chaque fois, l'erreur est positive. C'est-à-dire que le produit semble être légèrement plus grand que l'asymptote (mais converger assez rapidement). Pourtant, mon intuition me dit qu'il est presque certain (je ne le prouverai pas ici) que le terme d'erreur oscille de négatif à positif infiniment souvent.

4. Sous l'hypothèse de Riemann.

Si l'on suppose que l'hypothèse de Riemann est vérifiée, le terme d'erreur est borné par

$$\frac{C \log^2 x}{\sqrt{x}}$$

pour une certaine constante C. En analysant les données ci-dessus avec des méthodes numériques, le terme d'erreur $\frac{C \log x}{\sqrt{x}}$ semble être mieux adapté".

Annexe : Traductions de deux extraits de *Multiplicative Number Theory : I. Classical theory* de H. L. Montgomery et R. C. Vaughan (p. 46-48)

(p. 13)

Théorème 1.3. *Soit* $A(x) = \sum_{n \le x} a_n$*. Si* $\sigma_c < 0$*, alors* $A(x)$ *est une fonction bornée et*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = s \int_1^{\infty} A(x) x^{-s-1} dx \tag{1.10}$$

pour $\sigma > 0$*. Si* $\sigma_c \ge 0$*, alors*

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\log |A(x)|}{\log x} = \sigma_c, \tag{1.11}$$

et (1.10) et vérifiée pour $\sigma > \sigma_c$*.*

(p. 22-23)

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{si} \quad n > 1. \end{cases} \tag{1.20}$$

(p. 23)

Corollaire 1.11. *Pour* $\sigma > 1$

$$\log\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log\, n} n^{-s}$$

et

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}.$$

(p. 24)

(1.22)
$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log\, n.$$

(p. 25)

Corollaire 1.13. *La fonction zeta de Riemann a un pôle simple en* $s = 1$*, mais sinon est analytique dans le demi-plan* $\sigma > 0$*.*

(p. 35)

2.1. Valeurs moyennes

On dit qu'une fonction arithmétique $F(n)$ a une valeur moyenne c si

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} F(n) = c.$$

Dans cette section, on développe une méthode simple par laquelle on peut montrer l'existence de valeurs moyennes dans de nombreux cas intéressants.

Si deux fonctions arithmétiques f et F sont reliées par l'identité
(2.1)
$$F(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

alors on peut écrire f en fonction de F :
(2.2)
$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F(n/d).$$

Cette formule est appelée *Formule d'inversion de Möbius*. Inversement, si (2.2) est vérifiée pour tout n alors (2.1) l'est également. Si f est généralement petit alors F a une valeur moyenne asymptotique. Pour voir cela, observons que

$$\sum_{n\le x} F(n) = \sum_{n\le x} \sum_{d|n} f(d).$$

En itérant les sommes dans l'ordre inverse, on voit que l'expression ci-dessus est

$$= \sum_{d\le x} f(d) \sum_{\substack{n\le x\\ d|n}} 1 = \sum_{n\le x} f(d)[x/d].$$

Puisque $[y] = y + O(1)$, ceci est

$$= x\sum_{d\le x} \frac{f(d)}{d} + O\left(\sum_{d\le x} |f(d)|\right). \tag{2.3}$$

Ainsi F a la valeur moyenne $\sum_{d=1}^{\infty} f(d)/d$ si cette série converge et si $\sum_{d\le x} |f(d)| = o(x)$. Cette approche, quoique assez brutale, amène souvent des résultats utiles.

---

p. 37.

Supposons que a_k, b_m, c_n soient liés par la relation de convolution

$$c_n = \sum_{km=n} a_k b_m, \tag{2.5}$$

et que $A(x), B(x), C(x)$ soient leurs fonctions de sommation respectives. Alors

$$C(x) = \sum_{km=n} a_k b_m, \tag{2.6}$$

et il est utile de noter que cette double somme peut être itérée de différentes manières. D'un côté, on voit que

$$C(x) = \sum_{k\le x} a_k B(x/k)\ ; \tag{2.7}$$

(p. 46)

2.2. Les estimations du nombre de nombres premiers de Chebyshev et de Mertens

À cause de l'espacement irrégulier entre les nombres premiers, il semble sans espoir de donner une formule exacte pour le $n^{\text{ième}}$ nombre premier. Comme compromis, on estime le $n^{\text{ième}}$ nombre premier, ou de façon équivalente on estime le nombre $\pi(x)$ de nombres premiers n'excédant pas x. De façon similaire, on pose $\vartheta(x) = \sum_{p\le x} \log\, p$, and $\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)$. Comme nous le verrons, ces trois fonctions sommatoires sont intimement liées. Estimons d'abord $\psi(x)$.

Théorème 2.4 (Chebyshev) *Pour* $x \ge 2, \psi(x) \asymp x$.

La preuve que nous donnons ci-dessous établit seulement qu'il existe un certain x_0 tel que $\psi(x) \asymp x$ uniformément pour $x \ge x_0$. Pourtant, à la fois $\psi(x)$ et x sont bornées en dehors de 0 et de ∞ dans l'intervalle $[2, x_0]$, et par conséquent les constantes implicites peuvent être ajustées de telle façon que l'on ait $\psi(x) \asymp x$ pour $x \ge 2$. Dans les situations ultérieures de cette sorte, on supposera sans commentaire que le lecteur comprend qu'il suffit de démontrer le résultat pour tout x suffisamment grand.

Preuve. En appliquant la formule d'inversion de Möbius à (1.22), on trouve que

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\, \log\, n/d.$$

Ainsi, de (2.7), il découle que

$$\psi(x) = \sum_{d\le x} \mu(d)T(x/d) \tag{2.10}$$

où $T(x) = \sum_{n\le x} \log n$. Par le test de l'intégrale, on voit que

$$\int_1^N \log u\, du \le T(N) \le \int_1^{N+1} \log u\, du$$

pour tout entier positif N. Puisque $\int \log x\, dx = x \log x - x$, il s'ensuit facilement que

$$T(x) = x \log x - x + O(\log 2x) \tag{2.11}$$

pour $x \ge 1$. Malgré la précision de cette estimation, on rencontre des difficultés quand on substitue cela dans (2.10), puisqu'on n'a pas d'information utile concernant les sommes

$$\sum_{d\le x} \frac{\mu(d)}{d}, \qquad \sum_{d\le x} \frac{\mu(d)\log d}{d},$$

qui émergent dans les termes principaux. Pour éviter ce problème, on introduit une idée qui est fondamentale dans de grands pans de la théorie des nombres premiers, notamment, on remplace $\mu(d)$ par une fonction arithmétique a_d qui d'une certaine manière forme une approximation tronquée de $\mu(d)$. Supposons que $\mathcal{D}$ est un ensemble fini de nombres, et que $\mathrm{a}_d = 0$ quand $d \notin \mathcal{D}$. Alors par (2.11), on voit que

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} a_d T(x/d) = (x \log x - x) \sum_{d\in\mathcal{D}} a_d/d - x \sum_{d\in\mathcal{D}} \frac{a_d \log d}{d} + O(\log 2x). \tag{2.12}$$

Ici, la constante implicite dépend du choix de a_d, que nous considérerons comme étant fixé. Puisque nous voulons que la relation ci-dessus approxime la relation (2.10), et puisque nous espérons que $\psi(x) \asymp x$, nous restreignons notre attention aux a_d qui satisfont la condition

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} \frac{a_d}{d} = 0, \tag{2.13}$$

et espérer que

$$-\sum_{d\in\mathcal{D}} \frac{a_d \log d}{d} \text{ est proche de 1.} \tag{2.14}$$

Par la définition de $T(x)$, on voit que le côté gauche de (2.12) est

$$\begin{aligned} \sum_{dn\le x} a_d \log n &= \sum_{dn\le x} a_d \sum_{k\mid n} \Lambda(k) = \sum_{dkm\le x} a_d \Lambda(k) \\ &= \sum_{k\le x} \Lambda(k) E(x/k) \end{aligned} \tag{2.15}$$

où $E(y) = \sum_{dm\le y} a_d = \sum_d a_d[y/d]$. L'expression ci-dessus sera proche de $\psi(x)$ si $E(y)$ est proche de 1. Si $y \ge 1$ alors

$$\sum_d \mu(d)[y/d] = \sum_d \mu(d) \sum_{k\le y/d} 1 = \sum_{dk\le y} \mu(d) = \sum_{n\le y} \sum_{d\mid n} \mu(d) = 1,$$

en voyant (1.20). Ainsi $E(y)$ sera proche de 1 pour y pas trop grand si a_d est proche est $\mu(d)$ pour de petites valeurs de d. De plus, par (2.13), on voit que $E(y) = -\sum_{d\in\mathcal{D}} a_d[y/d]$, de telle façon que

$E(y)$ est périodique avec une période qui divise $\mathrm{lcm}_{d\in\mathcal{D}}\, d$. Par conséquent, pour un choix donné de a_d, le comportement de $E(y)$ peut être déterminé par un calcul fini.

La réalisation la plus simple de cette approche implique de prendre $a_1 = 1, a_2 = -2, a_d = 0$ pour $d > 2$. Alors (2.13) est vérifiée, l'expression (2.14) est log 2, $E(y)$ a pour période 2 et $E(y) = 0$ pour $0 \le y < 1$, $E(y) = 1$ pour $1 \le y < 2$. Par conséquent, pour ce choix de a_d, la somme en (2.15) satisfait les inégalités

$$\psi(x) - \psi(x/2) = \sum_{x/2<k\le x} \Lambda(k) \le \sum_{k\le x} \Lambda(k)E(x/k) \le \sum_{k\le x} \Lambda(k) = \psi(x)$$

Donc $\psi(x) \ge (\log 2)x + O(\log x)$, qui est une borne inférieure de la forme désirée. De plus,

$$\psi(x) - \psi(x/2) \le (\log 2)x + O(\log x).$$

En remplaçant x par $x/2^r$ et en sommant sur r, on déduit que

$$\psi(x) \le 2(\log 2)x + O((\log x)^2),$$

ainsi, la démonstration est terminée. $\square$

(p. 50-52)

Théorème 2.7 Pour $x \ge 2$,

(a) $\displaystyle\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1)$,

(b) $\displaystyle\sum_{p\le x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1)$,

(c) $\displaystyle\int_1^x \psi(u)u^{-2}du = \log x + O(1)$,

(d) $\displaystyle\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \log\log x + b + O(1/\log x)$,

(e) $\displaystyle\prod_{p\le x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = e^{C_0}\log x + O(1)$

où C_0 est la constante d'Euler et

$$b = C_0 - \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k}.$$

Preuve. En prenant $f(d) = \Lambda(d)$ dans (2.1), on voit grâce à (2.3) que

$$T(x) = \sum_{n\le x} \log n = x\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(d)}{d} + O(\psi(x)).$$

Par le théorème 2.4, le terme d'erreur est $\ll x$. Ainsi (2.11) donne (a). La somme en (b) diffère de celle en (a) par ceci

$$\sum_{\substack{p^k \le x \\ k \ge 2}} \frac{\log p}{p^k} \le \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} \ll 1.$$

Pour déduire (c), on note que la somme en (a) est

$$\int_{2^-}^{x} u^{-1} d\psi(u) = \frac{\psi(u)}{u}\Big|_2^{-x} + \int_2^x \psi(u) u^{-2} du = \int_2^x \psi(u) u^{-2} du + O(1)$$

par le théorème 2.4. On démontre maintenant (d) sans déterminer la valeur de la constante b. On exprime (b) sous la forme $L(x) = \log x + R(x)$ où $R(x) \ll 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{p \le x} \frac{1}{p} &= \int_{2^-}^{x} (\log u)^{-1} dL(u) = \int_{2^-}^{x} \frac{1}{\log u} d \log u + \int_{2^-}^{x} \frac{d\,R(u)}{\log u} \\
&= \int_{2^-}^{x} \frac{du}{u \log u} + \left[\frac{R(u)}{\log u}\Big|_{2^-}^{x} - \int_{2^-}^{x} R(u) d(\log u)^{-1} \right. \\
&= \log\log x - \log\log 2 + 1 + \frac{R(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{R(u)}{u(\log u)^2}\, du.
\end{aligned}$$

Le dernier terme est $\ll 1/\log x$, et l'intégrale est $\int_2^\infty - \int_x^\infty = \int_2^\infty + 0(1/\log x)$, de telle façon qu'on a (d) avec

$$b = 1 - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{R(u)}{u(\log u)^2} du.$$

Comme pour (e), on note que

$$\sum_{p \le x} \log \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \sum_{p \le x} \frac{1}{p} + \sum_{p \le x} \left(\log \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} - \frac{1}{p} \right).$$

La seconde somme sur la droite est

$$\sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k} + O\left(\sum_{p > x} p^{-2}\right)$$

et le terme d'erreur est ici $\ll \sum_{n > x} n^{-2} \ll x^{-1}$, de telle façon que de (d), on a

$$\sum_{p \le x} \log \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \log\log x + c + O(1/\log x) \tag{2.16}$$

où $c = b + \sum_p \sum_{k \ge 2} (kp^k)^{-1}$. Puisque $e^z = 1 + O(|z|)$ pour $|z| \le 1$, en prenant l'exponentielle, on déduit que

$$\prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = e^c \log x + O(1).$$

Pour compléter la démonstration, il suffit de montrer que $c = C_0$. Pour cela, on note d'abord que si $p \le x$ et $p^k > x$, alors $k \ge (\log x)/\log p$. Par conséquent

$$\sum_{\substack{p\le x\\ p^k>x}} \frac{1}{kp^k} \ll \sum_{\substack{p\le x\\ p^k>x}} \frac{\log p}{(\log x)\, p^k} \ll \sum_p \frac{\log p}{\log x} \sum_{k\ge 2} p^{-k} \ll \frac{1}{\log x} \sum_p \frac{\log p}{p^2} \ll \frac{1}{\log x},$$

de telle façon qu'à partir de (2.16) on a

$$\sum_{1<n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n \log n} = \log\log x + c + O(1/\log x).$$

Par le corollaire 1.15, on peut réécrire cela en

$$\sum_{1<n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n \log n} = \sum_{n\le \log x} \frac{1}{n} + (c - C_0) + O(1/\log 2x).$$

Puisque ceci est trivial quand $1 \le x < 2$, la formule ci-dessus est vérifiée pour tout $x \ge 1$. On exprime cela brièvement par $T_1 = T_2 + T_3 + T_4$, et on estime les quantités $I_i = \delta \int_1^\infty x^{-1-\delta} T_i(x)dx$. En comparant les résultats lorsque $\delta \to 0^+$, on déduira que $c = C_0$. Par le théorème 1.3, corollaire 1.11, et corollaire 1.13, on voit que

$$I_1 = \log \zeta(1+\delta) = \log \frac{1}{\delta} + O(\delta)$$

lorsque $\delta \to 0^+$. Deuxièmement,

$$\begin{aligned} I_2 &= \delta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{e^n}^{\infty} x^{-1-\delta} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\delta n} = \log(1-e^{-\delta})^{-1} \\ &= \log(\delta + O(\delta^2))^{-1} = \log 1/\delta + O(\delta). \end{aligned}$$

Troisièmement

$$I_3 = c - C_0,$$

et finalement

$$I_4 \ll \delta \int_1^\infty x^{-1-\delta} \frac{dx}{\log 2x} \ll \delta + \delta \int_2^{e^{1/\delta}} \frac{dx}{x \log x} + \delta^2 \int_{e^{1/\delta}}^{\infty} x^{-1-\delta} dx \ll \delta \log 1/\delta.$$

Puisque les principaux termes s'éliminent, en faisant tendre $\delta \to 0^+$, on voit que $c = C_0$.

$\square$