Perseverare (Denise Vella-Chemla, 24.6.2018)

On cherche à démontrer la conjecture de Goldbach. On définit 4 variables ainsi :

$$X_a(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ et } q \textit{ premiers}\}$$

$$X_b(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ composé et } q \textit{ premier}\}$$

$$X_c(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ premier et } q \textit{ composé}\}$$

$$X_d(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ et } q \textit{ composés}\}$$

Dans la suite de ce document, on note $E(x)$ la partie entière de x (i.e. $\lfloor x \rfloor$) et $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. On dispose de l'égalité ci-dessous : elle découle des démonstrations par récurrence d'une note [DV] d'octobre 2014 [*].

$$X_d(n) - X_a(n) = E(n/4) - \pi(n) + \delta(n) \qquad (1)$$

$\delta(n)$ prend les valeurs 0,1 ou 2.

Simplification des propositions de la note [DV] par Alain Connes en mai 2018 : [(1) résulte du fait très général sur des sous-ensembles quelconques et les cardinalités d'intersection et réunion :

$$\#(P \cup Q) + \#(P \cap Q) = \#(P) + \#(Q) \qquad (2)$$

Ici (en négligeant les cas limites qui contribuent à $\delta(n)$), on voit que
(a) $\#(P \cap Q)$ correspond à $X_a(n)$.
(b) $\#(P \cup Q)$ correspond à $E(n/4) - X_d(n)$.
(c) $\#(P) + \#(Q)$ correspond à $\pi(n)$.
On a donc une preuve très simple de (1) comme conséquence de (2).]

Voyons maintenant une propriété concernant $X_d(n)$.

On décide de représenter les nombres composés par la couleur grise et les nombres premiers par la couleur blanche.

On représente les nombres impairs compris entre 3 et $n/2$ par les rectangles de la partie inférieure du dessin ci-dessous et les nombres impairs compris entre $n/2$ et n, complémentaires à n des nombres de la partie inférieure par les rectangles de la partie supérieure. Les rectangles symbolisent ainsi des ensembles de colonnes contigues contenant dans leur partie inférieure un nombre x et dans leur partie supérieure son complémentaire $n-x$. On positionne les colonnes contigument selon la nature des décompositions qu'elles contiennent (selon que les colonnes sont de type a, b, c ou d).

On utilise les couleurs :
- verte pour $\#(P \cap Q)$;
- rouge pour $\#(P \cup Q)$;
- bleue pour $\#(P) + \#(Q) = \pi(n)$.

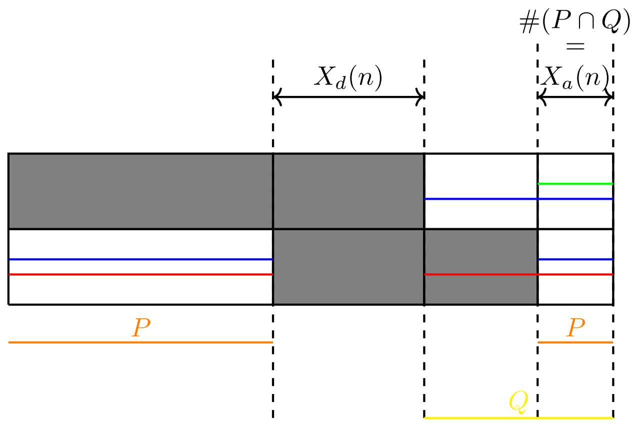

FIGURE 1 : ensembles de décompositions de n disposées contigument selon leur nature

[*]. Note [DV] : http://denise.vella.chemla.free.fr/nombres-et-lettres.pdf, version en anglais sur Hal https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01109052.

Réécrivons pour rappel l'identité ensembliste (2) en $\#(P) + \#(Q) - \#(P \cup Q) = \#(P \cap Q)$.

et remplaçons les cardinaux par les variables associées, on obtient bien

$$\pi(n) - E(n/4) + X_d(n) - \delta(n) = X_a(n)$$

dont on veut avoir l'assurance qu'il est toujours strictement positif puisque $X_a(n)$ compte les décompositions de Goldbach de n (en somme de deux nombres premiers).

Cependant, si on a démontré que $X_a(n) = X_d(n) - E(n/4) + \pi(n) - \delta(n)$ est une relation toujours vérifiée, cette relation ne garantit pas qu'à partir d'un certain rang, $X_a(n)$ est toujours strictement positif.

Pour démontrer qu'$X_a(n)$ est toujours strictement positif, il faudrait réussir à démontrer par récurrence que $X_a(n)$ est toujours supérieur à la plus grande diminution envisageable de $X_d(n)$, qui vaut $X_d(n) - X_d(n+2)$.

Détour : On voit clairement dans le second tableau en annexe, qui contient les valeurs des variables pour les nombres autour d'un million, que la diminution de $X_d(n)$ est plus importante lorsqu'on passe d'un nombre pair $n = 6k$ divisible par 6 au nombre pair suivant $6k + 2$ que lorsque n n'est pas divisible par 6. Les complémentaires à n partagent cette propriété de divisibilité par 6 (la même idée est applicable quel que soit le diviseur) et ont alors une plus forte probabilité d'être composés tous les deux, propriété commune qu'ils perdent quand on change de nombre pair.

On n'arrive pas à borner supérieurement la diminution de $X_d(n)$, ce qui pourrait permettre de garantir la positivité de $X_a(n)$.

Après avoir réalisé l'inutilité du détour, on décide de s'intéresser directement à $X_a(n)$, sans en passer par $X_d(n)$. On étudie les règles de réécriture des mots fournies en annexe, et on réalise que 6 seulement d'entre elles peuvent affecter le nombre $X_a(n)$ (les règles $aa \to a$, $ac \to a$, $ba \to a$, $bc \to a$, $ca \to c$, $da \to c$). 4 règles sur ces 6 ne sont pas "dangereuses" dans le sens où elles ne font pas diminuer ce nombre de lettres a, ce sont les règles $aa \to a$, $ba \to a$, $ac \to a$ (qui décale le a à droite dans le mot de $n + 2$ par rapport à la position qu'il occupe dans le mot de n) et enfin, la règle $bc \to a$ qui engendre des a ex nihilo ou presque. Les deux règles "dangereuses" sont les règles $ca \to c$ et $da \to c$ dont il faudrait être capable d'estimer le nombre possible de leur application dans le mot de n. On peut deviner leur nombre en se remémorant les booléens auxquels elles correspondent : aa correspond à la configuration $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et ba correspond à la configuration $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire qu'à elles deux, ces règles comptent le nombre de couples de nombres premiers jumeaux compris entre $n/2$ et n. Les règles $ca \to c$ et $da \to c$, qui nous intéressent quant à elles, correspondant aux configurations $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, comptent les nombres premiers compris entre $n/2$ et n sauf ceux qui sont élément d'un couple de nombres premiers jumeaux. Le nombre de règles faisant diminuer le nombre de lettres a, c'est-à-dire la diminution maximum que semble pouvoir subir la variable $X_a(n)$ devrait pouvoir être majoré par $\pi(n) - \pi(n/2) - Nbjum(n/2, n)$ si on appelle $Nbjum(x, y)$ le nombre de couples de nombres premiers jumeaux compris entre x et y, que l'on majore par $\pi(n) - \pi(n/2) - Nbjum(n)$ avec $Nbjum(n)$ le nombre de couples de nombres premiers jumeaux inférieurs ou égaux à n (on fait ici l'erreur de soustractions abusives pour les triplons de lettres caa ou daa).

Malheureusement, autour de 100000 (passage de 99996 à 99998), le nombre $\pi(n) - \pi(n/2) - Nbjum(n)$ reste bien trop élevé (de l'ordre de 3200 quand $X_a(n)$ vaut à peine 1300 et subit une diminution maximum aux alentours de 700) pour assurer que la diminution de $X_a(n)$ ne le rendra jamais nul. Il faut trouver une autre idée.

La dernière idée consiste à penser que pour s'assurer que toutes les lettres a ne disparaissent pas, il suffit peut-être de s'assurer qu'on en engendre davantage qu'on en détruit. Les règles qui engendrent une lettre a à une position donnée sont les règles $ac \to a$ et $bc \to a$. Pour trouver le nombre de ces deux telles règles susceptibles de s'appliquer sur le mot de n, on se remémore à quelles configurations elles correspondent : la première correspond à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la seconde à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c'est à dire qu'elles comptent, "par la droite" le nombre de nombres premiers grands sommants, et ce indépendamment du fait qu'ils soient élément d'un couple de nombres premiers jumeaux ou pas, c'est-à-dire que ces règles comptent le nombre de nombres premiers compris entre $n/2$ et n et sont donc au nombre de $\pi(n) - \pi(n/2)$; ce nombre serait toujours supérieur au nombre potentiel de disparitions de lettres a calculé plus haut si le nombre de couples de nombres premiers jumeaux compris entre $n/2$ et n était strictement positif, mais on n'est pas assuré de cela puisque cet énoncé est une autre manière de formuler la conjecture des nombres premiers jumeaux, qui n'est pas démontrée.

Annexe 1 : valeurs des variables pour $n \leqslant 100$ *et pour* $999\,900 \leqslant n \leqslant 1\,000\,000$

n	$X_a(n)$	$X_d(n)$	$X_d(n) - X_a(n)$	$E(n/4)$	$\pi(n)$	$\delta(n)$	$E(n/4) - \pi(n) + \delta(n)$	$\pi(n/2)$
6	1	0	−1	1	3	1	−1	2
8	1	0	−1	2	4	1	−1	2
10	2	0	−2	2	4	0	−2	3
12	1	0	−1	3	5	1	−1	3
14	2	0	−2	3	6	1	−2	4
16	2	0	−2	4	6	0	−2	4
18	2	1	−1	4	7	2	−1	4
20	2	0	−2	5	8	1	−2	4
22	3	0	−3	5	8	0	−3	5
24	3	1	−2	6	9	1	−2	5
26	3	0	−3	6	9	0	−3	6
28	2	0	−2	7	9	0	−2	6
30	3	2	−1	7	10	2	−1	6
32	2	0	−2	8	11	1	−2	6
34	4	1	−3	8	11	0	−3	7
36	4	2	−2	9	11	0	−2	7
38	2	0	−2	9	12	1	−2	8
40	3	1	−2	10	12	0	−2	8
42	4	3	−1	10	13	2	−1	8
44	3	1	−2	11	14	1	−2	8
46	4	1	−3	11	14	0	−3	9
48	5	3	−2	12	15	1	−2	9
50	4	2	−2	12	15	1	−2	9
52	3	1	−2	13	15	0	−2	9
54	5	4	−1	13	16	2	−1	9
56	3	1	−2	14	16	0	−2	9
58	4	2	−2	14	16	0	−2	10
60	6	5	−1	15	17	1	−1	10
62	3	1	−2	15	18	1	−2	11
64	5	3	−2	16	18	0	−2	11
66	6	5	−1	16	18	1	−1	11
68	2	1	−1	17	19	1	−1	11
70	5	4	−1	17	19	1	−1	11
72	6	5	−1	18	20	1	−1	11
74	5	3	−2	18	21	1	−2	12
76	5	3	−2	19	21	0	−2	12
78	7	6	−1	19	21	1	−1	12
80	4	3	−1	20	22	1	−1	12
82	5	3	−2	20	22	0	−2	13
84	8	7	−1	21	23	1	−1	13
86	5	3	−2	21	23	0	−2	14
88	4	3	−1	22	23	0	−1	14
90	9	9	0	22	24	2	0	14
92	4	3	−1	23	24	0	−1	14
94	5	4	−1	23	24	0	−1	15
96	7	7	0	24	24	0	0	15
98	3	4	1	24	25	2	1	15
100	6	6	0	25	25	0	0	15

n	$X_a(n)$	$X_d(n)$	$X_d(n) - X_a(n)$	$E(n/4)$	$\pi(n)$	$\delta(n)$	$E(n/4) - \pi(n) + \delta(n)$	$\pi(n/2)$
999900	12079	183564	171485	249975	78490	0	171485	41534
999902	4270	175756	171486	249975	78490	1	171486	41534
999904	4054	175540	171486	249976	78490	0	171486	41534
999906	8729	180216	171487	249976	78490	1	171487	41534
999908	5545	177032	171487	249977	78491	1	171487	41534
999910	5343	176830	171487	249977	78491	1	171487	41534
999912	8260	179747	171487	249978	78491	0	171487	41534
999914	4061	175548	171487	249978	78491	0	171487	41535
999916	4120	175608	171488	249979	78491	0	171488	41535
999918	8047	179536	171489	249979	78492	2	171489	41535
999920	5596	177084	171488	249980	78492	0	171488	41535
999922	5548	177037	171489	249980	78492	1	171489	41535
999924	8156	179645	171489	249981	78492	0	171489	41535
999926	4083	175573	171490	249981	78492	1	171490	41535
999928	4053	175543	171490	249982	78492	0	171490	41535
999930	10819	182310	171491	249982	78492	1	171491	41535
999932	4409	175900	171491	249983	78493	1	171491	41535
999934	4387	175878	171491	249983	78493	1	171491	41535
999936	10033	181524	171491	249984	78493	0	171491	41535
999938	4107	175598	171491	249984	78493	0	171491	41536
999940	5748	177240	171492	249985	78493	0	171492	41536
999942	8087	179580	171493	249985	78493	1	171493	41536
999944	4500	175993	171493	249986	78493	0	171493	41536
999946	4071	175564	171493	249986	78493	0	171493	41537
999948	8501	179995	171494	249987	78493	0	171494	41537
999950	6454	177949	171495	249987	78493	1	171495	41537
999952	4089	175584	171495	249988	78493	0	171495	41537
999954	8315	179811	171496	249988	78494	2	171496	41537
999956	4041	175536	171495	249989	78494	0	171495	41537
999958	4034	175529	171495	249989	78494	0	171495	41538
999960	11746	183242	171496	249990	78495	1	171496	41538
999962	4206	175702	171496	249990	78496	2	171496	41538
999964	4951	176446	171495	249991	78496	0	171495	41538
999966	9167	180663	171496	249991	78496	1	171496	41538
999968	4024	175520	171496	249992	78496	0	171496	41538
999970	5742	177239	171497	249992	78496	1	171497	41538
999972	8309	179806	171497	249993	78496	0	171497	41538
999974	4313	175811	171498	249993	78496	1	171498	41538
999976	4113	175611	171498	249994	78496	0	171498	41538
999978	10112	181611	171499	249994	78496	1	171499	41538
999980	5347	176846	171499	249995	78497	1	171499	41538
999982	4114	175613	171499	249995	78497	1	171499	41538
999984	8269	179768	171499	249996	78498	1	171499	41538
999986	4385	175884	171499	249996	78498	1	171499	41538
999988	4484	175983	171499	249997	78498	0	171499	41538
999990	11143	182643	171500	249997	78498	1	171500	41538
999992	4858	176358	171500	249998	78498	0	171500	41538
999994	4235	175736	171501	249998	78498	1	171501	41538
999996	8194	179695	171501	249999	78498	0	171501	41538
999998	4206	175708	171502	249999	78498	1	171502	41538
1000000	5402	176904	171502	250000	78498	0	171502	41538

Annexe 2 : les règles de réécriture qui permettent de passer d'un doublon de lettres du mot de n à la lettre sous la lettre de droite du mot de $n+2$

$aa \to a$	$ba \to a$	$ca \to c$	$da \to c$
$ab \to b$	$bb \to b$	$cb \to d$	$db \to d$
$ac \to a$	$bc \to a$	$cc \to c$	$dc \to c$
$ad \to b$	$bd \to b$	$cd \to d$	$dd \to d$

Annexe 3 : extraits des mots associés aux nombres pairs de 6 à 100 (ne sont fournies que les lettres associées aux décompositions de petit sommant premier).

a							
a							
aa							
ca							
aca							
aac							
caa							
aca							
aac	a						
caa	a						
aca	ca						
cac	ac						
cca	aa						
acc	ca						
aac	ac	a					
caa	ca	a					
cca	cc	ca					
acc	ac	ac					
cac	aa	ca					
aca	ca	cc					
aac	cc	ac	a				
caa	ac	aa	c				
aca	ca	ca	c				
cac	ac	cc	a				
cca	aa	ac	a				
acc	ca	ca	c				
cac	ac	ac	c	a			
cca	ca	aa	a	a			
acc	cc	ca	c	ca			
aac	ac	ac	a	cc			
caa	ca	ca	a	ac			
cca	cc	cc	c	ca			
acc	ac	ac	a	ac			
cac	aa	ca	c	aa			
aca	ca	cc	c	ca	a		
aac	cc	ac	a	ac	c		
caa	ac	aa	c	ca	a		
cca	ca	ca	c	cc	a		
acc	ac	cc	a	ac	c	a	
cac	aa	ac	a	ca	a	a	
aca	ca	ca	c	cc	c	ca	
cac	cc	ac	c	ac	c	ac	
cca	ac	aa	a	aa	a	ca	
acc	ca	ca	c	ca	c	cc	
cac	ac	cc	a	cc	c	ac	a
cca	ca	ac	a	ac	a	ca	c
ccc	cc	ca	c	ca	a	cc	c
acc	ac	ac	c	ac	c	ac	a