Nombres p-adiquement éloignés (Denise Vella-Chemla, 14.4.2022)

Suite à la lecture du magazine Tangente Hors série n° 81, intitulé *Les distances, un outil pour tout mesurer*, on a souhaité implémenter informatiquement les distances p-adiques entre nombres entiers naturels pour étudier si cette notion nous permettrait de trouver de façon systématique les décomposants de Goldbach d'un nombre pair.

On s'est permis de transcrire en Latex les deux pages du magazine sur lesquelles on s'est appuyée pour tenter cette recherche (voir http://denise.vella.chemla.free.fr/mag-distances.pdf[1] ; noter que la distance d'un point d'une boule au centre de cette boule est maximale lorsque le rayon de la boule est maximal, c'est-à-dire lorsque le rayon de la boule est la fraction ayant pour dénominateur une puissance d'un nombre premier qui est la plus petite possible, qui est donc une puissance d'exposant le plus petit possible, nul, et la puissance est alors égale à 1 ; cela est très contre-intuitif : les entiers naturels les plus petits se retrouvent dans les boules les plus grosses, de rayons 1, voir le schéma fourni dans l'article).

Voici le programme qu'on a utilisé, pour $n = 40$. Ce programme calcule les rayons des boules auxquelles appartiennent les nombres compris entre 1 et 20, la moitié de 40, boules de centres les restes de 40 dans des divisions euclidiennes par 2, 3 et 5 (qui sont les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{40}$).

```
n = 40
premiers = [2,3,5]
for p in premiers:
    print('')
    print('premier ', p)
    for reste in range(p):
        print(' reste = ',reste)
        puiss = 0
        while puiss <= 5:
            print(' 1/',p**puiss,'->',end='')
            moitie = int(n/2)
            for k in range(moitie):
                if k % p != 0:
                    calc = reste+k*(p**puiss)
                    if calc <= moitie:
                        print(' ',calc, end='')
            puiss = puiss+1
            print('')
```

Les distances aux centres (notées *reste* $= x$ dans le résultat du programme ci-après) pour $n = 40$ dans les différentes boules p-adiques (notées premier p dans le résultat du programme ci-après) obtenues par ce programme sont (on a supprimé les distances ne contenant pas de nombres inférieurs à $n/2$) :

[1]Je remercie Bertrand Hauchecorne pour son article. La transcription est concaténée à la fin de la présente note. Je crois qu'il y a une coquille sur l'un des deux nombres 4 dans le schéma du magazine, j'ai supprimé ce nombre, en espérant ne pas m'être trompée.

```
premier 2
    reste = 0
        1/ 1 –> 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19
        1/ 2 –> 2 6 10 14 18
        1/ 4 –> 4 12 20
        1/ 8 –> 8
        1/ 16 –> 16
    reste = 1
        1/ 1 –> 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
        1/ 2 –> 3 7 11 15 19
        1/ 4 –> 5 13
        1/ 8 –> 9
        1/ 16 –> 17

premier 3
    reste = 0
        1/ 1 –> 1 2 4 5 7 8 10 11 13 14 16 17 19
        1/ 3 –> 3 6 12 15
        1/ 9 –> 9 18
    reste = 1
        1/ 1 –> 2 3 5 6 8 9 11 12 14 15 17 18 20
        1/ 3 –> 4 7 13 16
        1/ 9 –> 10 19
    reste = 2
        1/ 1 –> 3 4 6 7 9 10 12 13 15 16 18 19
        1/ 3 –> 5 8 14 17
        1/ 9 –> 11 20

premier 5
    reste = 0
        1/ 1 –> 1 2 3 4 6 7 8 9 11 12 13 14 16 17 18 19
        1/ 5 –> 5 10 15 20
    reste = 1
        1/ 1 –> 2 3 4 5 7 8 9 10 12 13 14 15 17 18 19 20
        1/ 5 –> 6 11 16
    reste = 2
        1/ 1 –> 3 4 5 6 8 9 10 11 13 14 15 16 18 19 20
        1/ 5 –> 7 12 17
    reste = 3
        1/ 1 –> 4 5 6 7 9 10 11 12 14 15 16 17 19 20
        1/ 5 –> 8 13 18
    reste = 4
        1/ 1 –> 5 6 7 8 10 11 12 13 15 16 17 18 20
        1/ 5 –> 9 14 19
```

On a étudié deux cas : celui du nombre pair 98 et celui du nombre pair 40. Dans les deux cas, on ne considère que les nombres premiers inférieurs à la racine carrée du nombre pair considéré (voir http://denise.vella.chemla.free.fr/jade1.pdf pour comprendre pourquoi cela suffit).

Prenons le cas du nombre pair 40 dont les résultats des distances p-adiques sont les résultats du programme fournis ci-dessus. On a le tableau de distances suivant. Les entêtes de colonne sont les restes modulaires de 40 ou bien le reste 0 selon chaque module premier inférieur à $\sqrt{n}$. La boule 2-adique est centrée en 0, on considère une boule 3-adique centrée en 0 et une autre centrée en 1, la boule 5-adique est centrée en 0. Une croix dans la colonne DG indique que le nombre entête de ligne est un décomposant de Goldbach de n.

	0 (mod 2)	0 (mod 3)	1 (mod 3)	0 (mod 5)	*DG*
3	1/1	1/3	1/1	1/1	
5	1/1	1/1	1/1	1/5	
7	1/1	1/1	1/3	1/1	
9	1/1	1/9	1/1	1/1	
11	1/1	1/1	1/1	1/1	$*$
13	1/1	1/1	1/3	1/1	
15	1/1	1/3	1/1	1/5	
17	1/1	1/1	1/1	1/1	$*$
19	1/1	1/1	1/9	1/1	

Les 3 décomposants de Goldbach que sont les nombres 3, 11 et 17 maximisent les distances aux centres dans chacune des boules, centrées sur les restes de 40 ou sur 0.

Pour 98, on obtient les distances suivantes aux restes modulaires de 98 ou aux centres nuls, indiqués en tête des colonnes : une case de la colonne d'entête $r_k \pmod p$ fournit la distance p-adique du nombre entête de ligne au centre de la boule (et donc au rayon de la boule) à laquelle ce nombre appartient. La boule en question est centrée en r_k pour k compris entre 0 et $p-1$, r_k étant le reste modulaire considéré.

	0 (mod 2)	0 (mod 3)	2 (mod 3)	0 (mod 5)	3 (mod 5)	0 (mod 7)	*DG*
3	1/1	1/3	1/1	1/1	0 ?	1/1	
5	1/1	1/1	1/3	1/5	1/1	1/1	
7	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/7	
9	1/1	1/9	1/1	1/1	1/1	1/1	
11	1/1	1/1	1/9	1/1	1/1	1/1	
13	1/1	1/1	1/1	1/1	1/5	1/1	
15	1/1	1/3	1/1	1/5	1/1	1/1	
17	1/1	1/1	1/3	1/1	1/1	1/1	
19	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	$*$
21	1/1	1/3	1/1	1/1	1/1	1/7	
23	1/1	1/1	1/3	1/1	1/5	1/1	
25	1/1	1/1	1/1	1/25	1/1	1/1	
27	1/1	1/27	1/1	1/1	1/1	1/1	
29	1/1	1/1	1/27	1/1	1/1	1/1	
31	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	$*$
33	1/1	1/3	1/1	1/1	1/5	1/1	
35	1/1	1/1	1/3	1/5	1/1	1/7	
37	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	$*$
39	1/1	1/3	1/1	1/1	1/1	1/1	
41	1/1	1/1	1/3	1/1	1/1	1/1	
43	1/1	1/1	1/1	1/1	1/5	1/1	
45	1/1	1/9	1/1	1/5	1/1	1/1	
47	1/1	1/1	1/9	1/1	1/1	1/1	
49	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/49	

On voit que les 3 décomposants de Goldbach de 98 que sont 19, 31 et 37 maximisent la distance dans les 6 boules centrées sur les restes modulaires de 98 ou bien sur 0[2]. On voit également que les

[2]On s'était intéressée, en 2015 http://denise.vella.chemla.free.fr/distancesupreme1.pdf et en mai 2016

distances “amenuisées” dans les colonnes des restes de n indiquent les diviseurs du complémentaire du nombre premier considéré (entête d’une ligne) à 98.

Ces “intersections de boules topologiques” permettraient peut-être d’établir l’existence obligatoire d’un décomposant de Goldbach pour tout nombre pair supérieur ou égal à 6. Un problème est que les rayons sont incommensurables d’une colonne à l’autre. Peut-être faudrait-il utiliser une propriété surprenante qui est que dans un espace ultramétrique, tout triangle est isocèle, en considérant systématiquement les nombres 3 par 3.

http://denise.vella.chemla.free.fr/tore.pdf à l’idée de distance suprême entre nombres premiers, dans des corps de restes, sans succès. Cette idée de considérer une distance suprême provenait de la lecture, sans maîtrise, du livre *Noncommutative geometry* d’Alain Connes (https://alainconnes.org/wp-content/uploads/book94bigpdf.pdf), qui définit la distance comme un supremum à la page 35. Il est également question d’une distance ultramétrique à la page 10 de cette traduction qu’on a faite (http://denise.vella.chemla.free.fr/trad-bc-source.pdf) de l’article d’Alain Connes et Jean-Benoît Bost *Hecke Algebras, Type III Factors and Phase Transitions with Spontaneous Symmetry Breaking in Number Theory*, Selecta Math. (N.S.), vol. 1, no. 3, pp. 411–457, 1995, ISSN: 1022-1824, https://alainconnes.org/wp-content/uploads/bostconnesscan.pdf, mais on n’a pas le bagage mathématique suffisant pour voir si cela correspondrait aux mêmes distances que celles qui sont calculées ici.

Pages 32 et 33 du magazine Tangente (Hors série n° 81) sur les distances (Denise Vella-Chemla, 9.4.2022)

Les distances ultramétriques

Considérons un ensemble E et définissons, pour tous éléments a et b de E, $\delta(a,b) = 1$ si a est différent de b et $\delta(a,a) = 0$. En quelque sorte, il s'agit d'un indicateur booléen qui teste si deux éléments sont distincts on non. Il vérifie clairement les axiomes de positivité, de symétrie et de coïncidence.

Prenons trois éléments a, b et c de E. Si a est différent de c, alors $\delta(a,c) = 1$. Or soit a est différent de b et $\delta(a,b) = 1$, soit b est différent de c et $\delta(b,c) = 1$, soit les deux. Alors $\delta(a,c) = 1 \leq \max(\delta(a,b), \delta(b,c)) \leq \delta(a,b) + \delta(b,c)$. Ainsi, l'axiome du triangle est vérifié. Mais on a obtenu en fait un résultat bien plus fort, plus restrictif. De manière plus générale, on parle de distance ultramétrique lorsque l'axiome du triangle est remplacé par le suivant, plus exigeant, affirmant que pour tous les éléments a, b et c de E on a $\delta(a,c) \leq \max(\delta(a,b), \delta(b,c))$.

De tels espaces *ultramétriques* recèlent des propriétés qui défient l'intuition. Dans notre exemple, la boule ouverte et de rayon 1, centrée en un point a quelconque, ne contient que le point a, tandis que la boule fermée associée englobe tout l'espace, donc contient toutes les boules ouvertes de rayon 1, quel que soit leur centre.

De manière plus générale, dans un espace ultramétrique, les boules ouvertes sont des parties fermées et tout point d'une boule en est le centre (voir encadré). Autre particularité des espaces ultramétriques, tous les triangles y sont isocèles ! Pour le montrer, considérons trois éléments a, b et c de l'espace ultramétrique E.

Supposons que le triangle de sommets a, b et c ne soit pas équilatéral et que $\delta(a,b) < \delta(b,c)$. Alors $\delta(a,c) = \delta(b,c)$ car sinon le plus grand de ces deux termes ne vérifierait pas l'inégalité ultramétrique, étant strictement plus grand que chacun des deux autres. Ainsi, si le triangle n'est pas équilatéral, le côté inégal aux deux autres est nécessairement le plus petit.

Les espaces ultramétriques se sont révélés particulièrement intéressants (voir Tangente 190, 2019), en particulier pour l'étude des distances p-adiques dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ (voir encadré). En voici un exemple. Considérons un ensemble G et les suites d'éléments de G indexées sur les entiers strictement positifs. Considérons deux suites distinctes $A = a_1, a_2, a_3, \ldots$ et $B = b_1, b_2, b_3, \ldots$ Posons $\delta(A,B) = 1$ si $a_1 \neq b_1$, $\delta(A,B) = 1/2$ si $a_1 = b_1$ et $a_2 \neq b_2$, et plus généralement $\delta(A,B) = 1/n$ si n désigne le plus petit indice tel que $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$ et $a_n \neq b_n$. En ajoutant la convention $\delta(A,A) = 0$ pour toute suite A, on obtient une distance ultramétrique. Vérifions le troisième axiome en prenant trois suites A, B et C avec $C = c_1, c_2, c_3, \ldots$. Si $\delta(A,C) = 1/n$, alors $a_n \neq c_n$ donc soit $a_n \neq b_n$, soit $b_n \neq c_n$. Cela revient à dire que soit $\delta(A,B) \geq 1/n$, soit $\delta(B,C) \geq 1/n$. Finalement, $\delta(A,C) = 1/n \leq \max(\delta(A,B), \delta(B,C))$. CQFD.

En prenant des ensembles G différents, on obtient de nombreux exemples ; en voici un dans le domaine de la linguistique. Prenons pour G l'ensemble $\{a, b, c,$ ç$, d, e,$ é$,$ è$,$ ê$, ..., z, -, \omega\}$, c'est-à-dire

toutes les lettres (y compris accentuées...) utilisées en français, auxquelles on ajoute un symbole ω pour représenter les espaces. Tout mot de notre langue, et même toute phrase, est une suite d'éléments de G, à condition de terminer par des ω pour la rendre infinie. On définit ainsi avec δ, comme vu précédemment, une distance sur les mots de notre langue.
Prenons $A =$ "barrette", $B =$ "barreau" et $C =$ "barrique" ; on obtient $\delta(A, B) = 1/6$ puisque les mots "barrette" et "barreau" diffèrent seulement à la sixième lettre tandis que $\delta(A, C) = \delta(B, C) = 1/5$ puisque le mot "barrique" diffère dès la cinquième lettre des deux autres mots. Comme on le voit, ces trois éléments forment un triangle équilatéral pour la distance δ.

Le concept d'espace métrique, élaboré dans l'esprit fertile de Maurice Fréchet, étayé par le sérieux germanique de Felix Hausdorff, avait pour objectif de généraliser la notion de limite dans des espaces de fonctions. Comme souvent en mathématiques, cette structure s'est avérée féconde dans des domaines les plus variés.

Topologie d'un espace métrique

Dans un espace métrique E, lorsqu'une boule ouverte contient a, les points immédiatement "proches" de a y appartiennent également. Cette propriété est intéressante pour étudier une fonction au voisinage d'un point. C'est pourquoi on dit qu'une partie A de E est *ouverte* si, pour tout point a de A, il existe une boule centrée en a contenue entièrement dans A : clairement, les boules ouvertes sont ouvertes (ouf !). Ce n'est pas une tautologie, mais une adéquation des définitions.

Si une suite d'éléments d'une boule fermée $B'(a, r)$ converge, sa limite appartient encore à cette boule. Plus généralement, on appelle *partie fermée* celle vérifiant cette propriété (et les boules fermées sont donc fermées, ouf !).

Des boules ouvertes et fermées

En général, dans un espace métrique, les boules ouvertes ne sont pas fermées. C'est pourtant le cas dans les espaces ultramétriques. Soit en effet une suite convergente $(x_n)_{n\leq 0}$ appartenant à la boule ouverte $B(a, r)$ et soit L sa limite. Alors $\delta(a, L) \leq \max(\delta(a, x), \delta(x, L))$. En prenant n "assez grand" pour que $\delta(x_n, L) < r$, on obtient $\delta(a, L) < r$, ce qui montre que L appartient à $B(a, r)$: cette boule ouverte est fermée ! Fermez le ban.

De même, tout point d'une boule est le centre de cette boule. En effet, considérons la boule $B(a, r)$ de centre a et de rayon r et un point b dans cette boule. Alors, pour tout x de $B(a, r)$, on a $\delta(b, x) \leq \max(\delta(b, a), \delta(a, x)) < r$ puisque b comme r appartiennent à la boule $B(a, r)$. En inversant les rôles de a et b, on a l'égalité $B(a, r) = B(b, r)$: tous les points de la boule sont donc des centres. On en conclut que deux boules ne peuvent pas être "sécantes" : si elles ne sont pas disjointes, l'une des deux contient nécessairement l'autre.

Distances p-adiques sur les entiers

Prenons un nombre premier p. Tout entier relatif non nul s'écrit de manière unique sous la forme $a = \pm b \times p^k$, où k est la plus grande puissance de p qui divise a et b désigne un nombre premier avec p. Ainsi, en prenant $p = 3$, on a par exemple $2 = 2 \times 3^0, 14 = 14 \times 3^0$ ou encore $315 = 35 \times 3^2$. On note $v_p(a) = k$ pour signifier que la plus grande puissance de p qui divise a est k. Si a et a' sont deux entiers, alors $v_p(a + a') \geq \min(v_p(a), v_p(a'))$ et $v_p(a \times a') = v_p(a) + v_p(a')$.

Posons alors $\delta(a, a') = p^{-v_p(a-a')}$ si $a \neq a'$ et $\delta(a, a) = 0$. Cette quantité est clairement positive. Elle n'est nulle que si $a = a'$. Manifestement, $\delta(a, a') = \delta(a', a)$ puisque $v_p(a - a') = v_p(a' - a)$. Enfin, l'inégalité ultramétrique découle de l'inégalité vue plus haut. Reprenons $p = 3$ et considérons une boule ouverte centrée en 2. La distance ne prenant, par définition de δ, que des valeurs de la forme $r_n = 1/3^n$, les boules ouvertes sont fermées, et réciproquement.
Supposons que $3^{-(n+1)} \leq r < 3^{-n}$; alors la boule $B(a, r)$ contient les éléments dont la différence avec 2 est divisible par 3^n, c'est-à dire les termes de la forme $2 + 3^n \times u$ où u désigne un entier relatif.

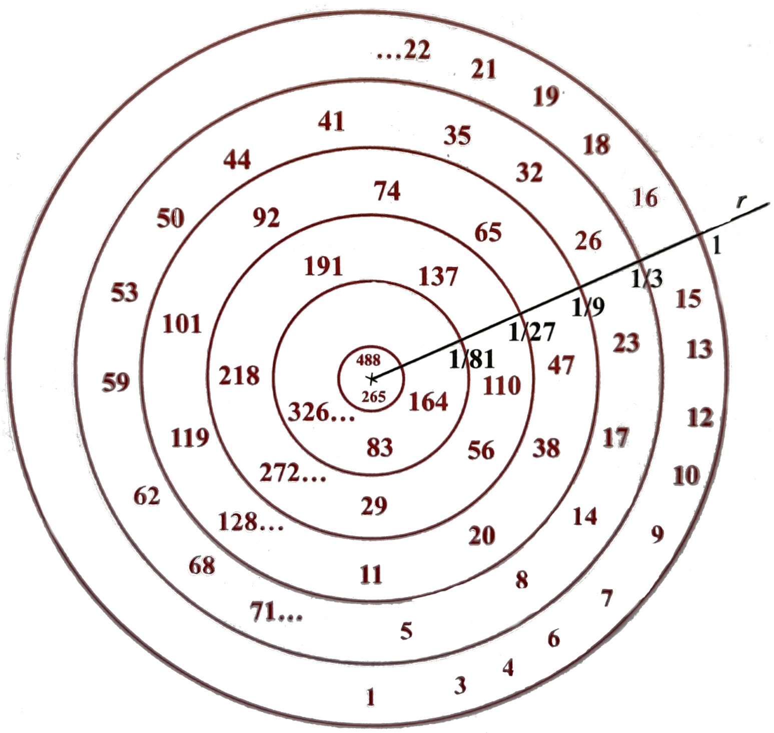

FIGURE 1 : Boules fermées de centre 2 et de rayons $r = 1/81, 1/27, 1/9, 1/3$ et 1 pour la distance p-adique.

δ s'appelle la *distance p-adique* sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Elle se généralise sans difficulté à tous les rationnels, en posant, pour tout nombre rationnel de la forme $r = a/b$ avec a et b entiers, b non nul, $v_p(r) = v_p(a) - v_p(b)$.

La convergence des suites peut surprendre. On sait que si un nombre réel t est compris strictement entre -1 et 1, alors la suite définie par $t_n = 1 + t + t^2 + ... + t^n$ converge vers $1/(1-t)$. Dans le cadre des nombres p-adiques, cette formule peut subsister pour des nombres plus grands que 1 ! Prenons toujours $p = 3$ et la suite $T_n = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^n$; alors $1/(1 - 3) = -1/2$.

Montrons que ce nombre est bien la limite de notre suite. Comme $T_n = \dfrac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3^{n+1}}{2}$ pour tout entier n, on a aussi $T_n - \left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{3^{n+1}}{2}$. Or, $\nu_3\left(\dfrac{3^{n+1}}{2}\right) = \nu_3(3^{n+1}) - \nu_3(2) = n + 1 - 0 = n + 1$

donc $\delta\left(T_n, -\frac{1}{2}\right) = 3^{-n-1}$, quantité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ceci montre que la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ tend vers -1/2.