

Réinterprétation en théorie quantique des relations cinématique et mécanique

W. Heisenberg

Le présent article vise à établir une base pour la mécanique quantique fondée exclusivement sur les relations entre quantités qui sont en principe observables.

Il est bien connu que les règles formelles qui sont utilisées en théorie quantique pour calculer les quantités observables telles que l'énergie d'un atome d'hydrogène peuvent être sérieusement critiquées sur la base du fait qu'elles contiennent, comme éléments de base, des relations entre des quantités qui sont apparemment non observables en principe, e.g. comme la position et la période de révolution d'un électron. Par conséquent, ce problème des quantités physiques inobservables pourrait plus tard ne plus poser problème dans le cadre de la détermination expérimentale. Un tel espoir pourrait être justifiable si les règles mentionnées ci-dessus étaient intrinsèquement consistantes et applicables à des problèmes de mécanique quantique d'un domaine clairement défini. L'expérience montre pourtant que seul l'atome d'hydrogène et son effet brut peuvent être traités par ces règles formelles de la théorie quantique. Des difficultés fondamentales surgissent déjà dans le problème des champs croisés (un atome d'hydrogène dans des champs électrique et magnétique de directions différentes). De plus, la réaction des atomes à des champs variant périodiquement ne peut être décrite par ces règles. Finalement, l'extension des règles quantiques au traitement des atomes ayant plusieurs électrons s'est avérée infaisable.

C'est devenu une pratique courante que de caractériser cet échec des règles de la théorie quantique comme une déviation de la mécanique classique, puisque les règles elles-mêmes furent principalement dérivées à partir de la mécanique classique. Cette caractérisation a, pourtant, peu de signification quand on réalise que la condition de fréquence d'*Einstein-Bohr* (qui est valide dans tous les cas) représente déjà un éloignement complet de la mécanique classique ; ou plutôt (en utilisant le point de vue de la théorie ondulatoire) de la cinématique sous-tendant cette mécanique, à tel point que même pour les problèmes les plus simples de la théorie quantique, la validité de la mécanique classique ne peut tout simplement pas se maintenir. Dans cette situation, il semble judicieux d'abandonner tout espoir qu'on avait conservé jusqu'ici d'observer des quantités inobservables, telles que la position et la période de l'électron, et de concéder qu'un accord partiel des règles quantiques avec l'expérience est plus ou moins fortuit. Il semble plutôt plus raisonnable d'essayer d'établir une mécanique quantique théorique, analogue à la mécanique classique, mais dans laquelle seules des relations entre quantités observables adviennent. On peut voir la condition de fréquence et la théorie de la dispersion de Kramers [1], avec ses extensions dans des articles récents [2], comme les premières étapes les plus importantes vers une telle mécanique quantique théorique. Dans cet article, nous chercherons à établir quelques nouvelles relations mécaniques quantiques et à les appliquer à quelques problèmes particuliers. Nous nous restreindrons aux problèmes impliquant un seul degré de liberté.

Note de l'éditeur. Cet article a été publié dans *Zs. Phys.* 33 (1925) 879-893. Il était signé depuis le "Göttingen, Institut für theoretische Physik".

Traduction de la version anglaise de l'article, voir <http://fisica.ciens.ucv.ve/svincenz/SQM261.pdf>
Denise Vella-Chemla, décembre 2020.

1. H. A. Kramers, *Nature* **113** (1924) 673.
2. M. Born, *Zs. f. Phys.* **26** (1924) 379. H. A. Kramers and W. Heisenberg, *Zs. f. Phys.* **31** (1925) 681. M. Born and P. Jordan, *Zs. f. Phys.* (in course of Publication) [**33** (1925) 479 ; paper 7a].

1. En théorie classique, la radiation émise par un électron en mouvement (dans la zone d'onde, i.e., dans la région où \mathfrak{E} et \mathfrak{H} sont du même ordre de grandeur que $1/r$) n'est pas entièrement déterminée par les expressions

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{r^3 c^2} [\mathfrak{r} [\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{v}}]], \quad \mathfrak{h} = \frac{e}{r^2 c^2} [\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}],$$

mais des termes additionnels adviennent dans l'ordre suivant d'approximation, e.g. des termes de la forme $e\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{v}/rc^3$ que l'on peut appeler "radiation quadripole". Dans des ordres de grandeur encore plus élevés, des termes comme $e\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{v}^2/rc^4$ apparaissent. De cette manière, l'approximation peut être poussée selon un ordre arbitrairement grand. (Les symboles suivants ont été utilisés : \mathfrak{E} , \mathfrak{H} sont les forces des champs en un point, \mathfrak{r} le vecteur entre ce point et la position de l'électron, \mathfrak{v} la vitesse et e la charge de l'électron).

On peut se demander quelle forme ces termes d'ordres plus élevés prendraient en théorie quantique. Les approximations d'ordres plus élevés peuvent facilement être calculées en théorie classique si le mouvement de l'électron est donné en développement de Fourier, et on s'attendrait à un résultat similaire en théorie quantique. Ce point n'a rien à voir avec l'électrodynamique mais plutôt - et cela semble être particulièrement important - est de nature purement cinématique. On peut poser la question dans sa forme la plus simple : si plutôt qu'une quantité classique $x(t)$, nous avons une quantité de théorie quantique, quelle quantité de théorie quantique apparaîtra à la place de $x(t)^2$? Avant que nous ne puissions répondre à cette question, il est nécessaire de garder à l'esprit qu'en théorie quantique, il n'a pas été possible d'associer l'électron à un point dans l'espace, considéré comme une fonction du temps, au moyen de quantités observables. Pourtant, même en théorie quantique, il est possible d'attribuer à un électron l'émission d'une radiation. Pour caractériser cette radiation, nous avons d'abord besoin des fréquences qui apparaissent comme des fonctions de deux variables. En théorie quantique, ces fonctions sont de la forme

$$\nu(n, n - \alpha) = \frac{1}{h} \{W(n) - W(n - \alpha)\},$$

et en théorie classique, elles sont de la forme

$$\nu(n, \alpha) = \alpha \nu(n) = \alpha \frac{1}{h} \frac{dW}{dn}$$

(Ici, on a $nh = J$, où J est l'une des constantes canoniques).

Comme caractéristique pour la comparaison entre les théories classique et quantique par rapport à la fréquence, on peut écrire les relations de combinaison :

Classique :

$$\nu(n, n - \alpha) + \nu(n - \alpha, n - \alpha - \beta) = \nu(n, n - \alpha - \beta).$$

Quantique :

$$\nu(n - \beta, n - \alpha - \beta) + \nu(n, n - \beta) = \nu(n, n - \alpha - \beta).$$

ou

$$\nu(n, \alpha) + \nu(n, \beta) = \nu(n, \alpha + \beta).$$

Pour compléter la description de la radiation, il est nécessaire d'avoir non seulement les fréquences mais également les amplitudes. Les amplitudes peuvent être traitées comme des vecteurs complexes, chacun déterminé par six composantes indépendantes, et cela détermine à la fois la polarisation et la phase. Comme les amplitudes sont aussi des fonctions des deux variables n et α , la partie correspondante de la radiation est donnée par les expressions suivantes :

Quantique :

$$(1) \quad \text{Re}\{\mathfrak{U}(n, n - \alpha)e^{i\omega(n, n - \alpha)t}\}.$$

Classique :

$$(2) \quad \text{Re}\{\mathfrak{U}_\alpha(n)e^{i\omega(n)\alpha t}\}.$$

Au premier abord, la phase contenue dans \mathfrak{U} semble être dépourvue de signification physique en théorie quantique, puisque dans cette théorie, les fréquences sont en général incommensurables à leurs harmoniques. Pourtant, nous verrons dans le cas présent qu'en théorie quantique également, la phase a une signification définie qui est analogue à sa signification en théorie classique. Si nous considérons maintenant une quantité donnée $x(t)$ dans la théorie classique, elle peut être vue comme représentée par un ensemble de quantités de la forme

$$\mathfrak{U}_\alpha(n)e^{i\omega(n)\alpha t},$$

qui, selon que le mouvement est périodique ou pas, peut être combinée en une somme ou une intégrale qui représente $x(t)$:

$$x(n, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{U}_\alpha(n)e^{i\omega(n)\alpha t}$$

ou

(2a)

$$x(n, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{U}_\alpha(n)e^{i\omega(n)\alpha t} d\alpha.$$

Une combinaison similaire des quantités en théorie quantique semble impossible à réaliser de manière unique et par conséquent n'a pas de sens, au regard du poids égal des variables n et $n - \alpha$. Pourtant, on peut facilement regarder l'ensemble des quantités $\mathfrak{U}(n, n - \alpha)e^{i\omega(n, n - \alpha)t}$ comme une représentation de la quantité $x(t)$ et alors tenter de répondre à la question ci-dessus : comment doit être représentée la quantité $x(t)^2$?

La réponse en théorie classique est évidente :

$$(3) \quad \mathfrak{B}_\beta(n)e^{i\omega(n)\beta t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{U}_\alpha \mathfrak{U}_{\beta-\alpha} e^{i\omega(n)(\alpha+\beta-\alpha)t}$$

ou

$$(4) \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{U}_\alpha \mathfrak{U}_{\beta-\alpha} e^{i\omega(n)(\alpha+\beta-\alpha)t} d\alpha,$$

de telle façon que

$$(5) \quad x(t)^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta \mathfrak{B}_\beta(n) e^{i\omega(n)\beta t}$$

ou, respectivement,

$$(6) \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{B}_\beta(n) e^{i\omega(n)\beta t} d\beta$$

En théorie quantique, il semble que la supposition la plus simple et la plus naturelle devrait être de remplacer les équations (3) et (4) par :

$$(7) \quad \mathfrak{B}(n, n - \beta) e^{i\omega(n, n - \beta)t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{U}(n, n - \alpha) \mathfrak{U}(n - \alpha, n - \beta) e^{i\omega(n, n - \beta)t}$$

or

$$(8) \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{U}(n, n - \alpha) \mathfrak{U}(n - \alpha, n - \beta) e^{i\omega(n, n - \beta)t} d\alpha,$$

et en fait, ce type de combinaison est une conséquence presque nécessaire des règles de combinaison des fréquences. En faisant les suppositions (7) et (8), on reconnaît que les phases des \mathfrak{U} en théorie quantique ont exactement autant de sens que leurs analogues classiques. Seule l'origine de l'échelle temporelle et par conséquent un facteur de phase commun à tous les \mathfrak{U} est arbitraire et donc dépourvu de sens physique, mais les phases des \mathfrak{U} individuels entrent de façon essentielle en jeu dans la quantité \mathfrak{B} ³. Une interprétation géométrique de telles relations de phases en théorie quantique en analogie avec celles de la théorie classique semble à présent à peine possible.

Si nous demandons alors, plus avant, une représentation pour la quantité $x(t)$ ³ nous trouvons sans difficulté :

Classique :

$$(9) \quad \mathfrak{I}(n, \gamma) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha, \beta \mathfrak{U}_\alpha(n) \mathfrak{U}_\beta(n) \mathfrak{U}_{\gamma-\alpha}(n).$$

Quantique :

$$(10) \quad \mathfrak{I}(n, n - \gamma) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha, \beta \mathfrak{U}(n, n - \alpha) \mathfrak{U}(n - \alpha, n - \alpha - \beta) \mathfrak{U}(n - \alpha - \beta, n - \gamma)$$

3. Cf. aussi H. A. Kramers et W. Heisenberg, loc.cit. Les phases interviennent principalement dans les expressions utilisées là pour le moment de la diffraction induite.

ou les formes intégrales correspondantes.

De façon similaire, on peut trouver une représentation en théorie quantique pour toutes les quantités de la forme $x(t)^n$, et si l'une des fonctions quelconques $f[x(t)]$ est donnée, on peut toujours trouver l'expression correspondante en théorie quantique, à partir du moment où la fonction peut être développée en une série de puissances de x . Une difficulté notable surgit, pourtant, si nous considérons deux quantités $x(t), y(t)$, et si nous nous interrogeons sur leur produit $x(t)y(t)$. Si $x(t)$ est caractérisée par \mathfrak{U} , et $y(t)$ par \mathfrak{B} , nous obtenons les représentations suivantes pour $x(t)y(t)$:

Classique :

$$\mathfrak{T}_\beta(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha \mathfrak{U}_\alpha(n) \mathfrak{B}_{\beta-\alpha}(n).$$

Quantique :

$$\mathfrak{T}(n, n - \beta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha \mathfrak{U}(n, n - \alpha) \mathfrak{B}(n - \alpha, n - \beta).$$

Tandis qu'en théorie classique $x(t)y(t)$ est toujours égal à $y(t)x(t)$, ce n'est pas nécessairement le cas en théorie quantique. Dans des cas particuliers, e.g., dans l'expression $x(t)x(t)^2$, cette difficulté ne survient pas.

Si, comme dans la question posée au début de cette section, on s'intéresse à des produits de la forme $v(t)\dot{v}(t)$, alors en théorie quantique, ce produit $v\dot{v}$ devrait être remplacé par $\frac{1}{2}(v\dot{v} + \dot{v}v)$, pour que $v\dot{v}$ soit le coefficient différentiel de $\frac{1}{2}v^2$. De façon similaire, il semble toujours possible de trouver des expressions naturelles pour les valeurs moyennes en théorie quantique, même si elles peuvent être encore plus hypothétiques que les formules (7) et (8).

En dehors de la difficulté juste mentionnée, les formules du type (7), (8) devraient assez généralement également suffire à exprimer l'interaction des électrons dans un atome en fonction des amplitudes caractéristiques des électrons.

2. Après ces considérations qui concernaient la cinématique en théorie quantique, tournons notre attention vers le problème dynamique qui consiste en la détermination des \mathfrak{U}, ν, W à partir des forces données du système. Dans la théorie précédente, ce problème était résolu en deux étapes :

1. Intégration de l'équation du mouvement

$$(11) \quad \ddot{x} + f(x) = 0.$$

2. Détermination des constantes pour le mouvement périodique par

$$(12) \quad \oint p dq = \oint m \dot{x} dx = J (= nh).$$

Si l'on cherche à construire un formalisme de mécanique quantique correspondant à la mécanique classique, de la façon la plus proche qui soit, il est très naturel de faire entrer l'équation du mou-

vement (11) directement dans la théorie quantique. À ce point, cependant, il est nécessaire, pour s'éloigner des fondements fermes fournis par ces quantités qui sont en principe observables - de remplacer les quantités \ddot{x} et $f(x)$ par leurs représentations en théorie quantique, comme fournies au § 1. En théorie classique, il est possible d'obtenir la solution de (11) en exprimant d'abord x comme une série de Fourier ou une intégrale de Fourier à coefficients (et fréquences) indéterminés. En général, on obtient alors un ensemble infini d'équations contenant un nombre infini d'inconnues, ou d'équations intégrales, qui peuvent être réduites à des relations récursives simples pour les \mathfrak{U} dans les cas particuliers seulement. En théorie quantique, nous sommes maintenant forcés d'adopter cette méthode pour résoudre l'équation (11) puisque, comme cela a été dit précédemment, il n'est pas possible de définir une fonction de théorie quantique directement analogue à la fonction $x(n, t)$.

Par conséquent, la solution en théorie quantique de (11) est seulement possible dans les cas les plus simples. Avant de considérer de tels exemples simples, fournissons une ré-interprétation en théorie quantique de la détermination, par (12), de la constante du mouvement périodique. Nous supposons (classiquement) que le mouvement est périodique :

$$(13) \quad x = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\alpha}(n) e^{i\alpha\omega_n t};$$

par conséquent

$$m\dot{x} = m \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\alpha}(n) i\alpha\omega_n e^{i\alpha\omega_n t}$$

et

$$\oint m\dot{x}dx = \oint m\dot{x}^2 dt = 2\pi m \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\alpha}(n) a_{-\alpha}(n) \alpha^2 \omega_n.$$

De plus, puisque $a_{\alpha}(n) = \overline{a_{-\alpha}(n)}$, comme x doit être réel, il en découle que

$$(14) \quad \oint m\dot{x}^2 dt = 2\pi m \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha |a_{\alpha}(n)|^2 \alpha^2 \omega_n.$$

Dans la théorie précédente, cette intégrale de phase était habituellement supposée égale à un multiple entier de h , i.e. égale à nh , mais une telle condition ne s'adapte pas naturellement au calcul dynamique. Il semble, même quand on regarde cela selon le point de vue adopté jusqu'ici, arbitraire au sens du principe de correspondance, parce que selon ce point de vue les J sont déterminés seulement à une constante additive près comme des multiples de h . Plutôt que (14), il serait plus naturel d'écrire

$$\frac{d}{dn}(nh) = \frac{d}{dn} \oint m\dot{x}^2 dt,$$

c'est-à-dire,

$$(15) \quad h = 2\pi m \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha \frac{d}{dn} (\alpha\omega_n \cdot |a_{\alpha}|^2).$$

Une telle condition détermine de façon évidente les a_α seulement à une constante près, et en pratique, cette indétermination a donné naissance aux difficultés dues à l'occurrence de nombres quantiques demi-entiers.

Si nous cherchons une relation de théorie quantique correspondant à (14) et (15) et contenant des quantités observables seulement, l'unicité qui avait été perdue est automatiquement rétablie.

Nous devons admettre que seule l'équation (15) a une reformulation simple en théorie quantique, qui est reliée à la théorie de la dispersion de *Kramers*⁴:

$$(16) \quad h = 4\pi m \sum_0^\infty \{|a(n, n + \alpha) - |a(n, n - \alpha)|^2 \omega(n, n - \alpha)\}.$$

À nouveau, cette relation suffit pour déterminer les a de manière unique puisque la constante indéterminée contenue dans la quantité a est automatiquement fixée par la condition qu'un état de plus basse énergie devrait exister, état dans lequel aucune radiation n'est émise. Notons cet état de plus basse énergie n_0 ; alors nous devrions avoir $a(n_0, n_0 + \alpha) = 0$ (pour $\alpha > 0$). Par conséquent, nous pourrions nous attendre à ce que la question de la quantification entière ou demi-entière ne se pose pas dans la mécanique quantique théorique basée uniquement sur les relations entre des quantités observables.

Les équations (11) et (16), si on peut les résoudre, contiennent la détermination complète non seulement des fréquences et des valeurs d'énergie mais également des probabilités de transition de la théorie quantique. Pourtant, à présent, la solution mathématique effective ne peut être obtenue que dans les cas les plus simples. Dans de nombreux systèmes, e.g. l'atome d'hydrogène, une complication particulière survient parce que les solutions correspondent à un mouvement qui est en partie périodique et en partie apériodique. Comme conséquence de cette propriété, les séries de la théorie quantique (7), (8) et l'équation (16) se décomposent en une somme et une intégrale. En mécanique quantique, une telle décomposition d'un mouvement en une composante périodique et une composante apériodique ne peut avoir lieu en général.

Cependant, on pourrait regarder les équations (11) et (16) comme solutions satisfaisantes, au moins en principe, du problème dynamique, s'il était possible de montrer qu'elles s'accordent avec (ou bien n'entrent pas en contradiction à quelque niveau que ce soit avec) les relations de la mécanique quantique que nous connaissons à présent. Il devrait, par exemple, être établi que l'introduction d'une petite perturbation dans un problème dynamique amène des termes additionnels dans l'énergie, ou la fréquence, du type trouvé par *Kramers* et *Born* - mais non pas du type trouvé par la théorie classique. De plus, on devrait aussi voir que l'équation (11) dans sa forme actuelle de la théorie quantique doit en général donner naissance à une intégrale d'énergie $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = \text{const.}$, et que l'énergie dérivée doit satisfaire la condition $\Delta W = h\nu$, en analogie avec la condition classique $\nu = \partial W / \partial J$. Une réponse générale à ces questions devrait permettre d'élucider les connexions intrinsèques entre les recherches précédentes en mécanique quantique et paver le chemin vers une connexion générale entre la formule de dispersion de *Kramers* et les équations (11) et (16), nous pouvons répondre aux questions ci-dessus dans des cas très particuliers qui peuvent être résolus

4. Cette relation a déjà été dérivée de considérations de dispersion par W. Kuhn, Zs. Phys. **33** (1925) 408, et W. Thomas, Naturwiss. **13** (1925) 627.

par de simples relations récursives.

Le lien général entre la théorie de la dispersion de Kramers et nos équations (11) et (16) s'établit comme suit. De l'équation (11) (plus précisément, de son analogue en théorie quantique), on trouve, juste comme en théorie classique, que l'électron oscillant se comporte comme un électron libre quand on agit sur lui avec un rayon lumineux de fréquence plus grande que les fréquences propres du système. Ce résultat découle aussi de la théorie de la dispersion de Kramers si en plus on prend en compte l'équation (16). En fait, Kramers trouve pour le moment induit par une onde de la forme $E \cos 2\pi\nu t$:

$$M = e^2 E \cos 2\pi\nu t \frac{2}{h} \sum_0^\infty \alpha \left\{ \frac{|a(n, n + \alpha)|^2 \nu(n, n + \alpha)}{\nu^2(n, n + \alpha) - \nu^2} - \frac{|a(n, n - \alpha)|^2 \nu(n, n - \alpha)}{\nu^2(n, n - \alpha) - \nu^2} \right\},$$

de telle façon que pour $\nu \gg \nu(n, n + \alpha)$,

$$M = -\frac{2Ee^2 \cos 2\pi\nu t}{\nu^2 h} \sum_0^\infty \alpha \{ |a(n, n + \alpha)|^2 \nu(n, n + \alpha) - |a(n, n - \alpha)|^2 \nu(n, n - \alpha) \},$$

qui, à cause de l'équation (16), devient

$$M = -\frac{e^2 E \cos 2\pi\nu t}{4\pi^2 m \nu^2}.$$

3. Comme exemple simple, on va traiter maintenant l'oscillateur anharmonique :

$$(17) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x + \lambda x^2 = 0.$$

Classiquement, cette équation est satisfaite par une solution de la forme

$$x = \lambda a_0 + a_1 \cos t + \lambda a_2 \cos 2\omega t + \lambda^2 a_3 \cos 3\omega t + \dots \lambda^{\tau-1} a_\tau \cos \tau\omega t,$$

où les a sont des séries de puissances en λ , dont les premiers termes sont indépendants de λ . Quantiquement, nous essayons de trouver une expression analogue, représentant x par des termes de la forme

$$\begin{aligned} &\lambda a(n, n); && a(n, n - 1) \cos \omega(n, n - 1)t; \\ &&& \lambda a(n, n - 2) \cos \omega(n, n - 2)t; \\ &&& \dots \lambda^{\tau-1} a(n, n - \tau) \cos \omega(n, n - \tau)t \dots \end{aligned}$$

Les formules récursives qui déterminent les a et ω (en termes à λ près, exclus) selon les équations (3), (4) ou (7), (8) sont :

Classique :

(18)

$$\begin{aligned}
 \omega_0^2 a_0(n) + \frac{1}{2} a_1^2(n) &= 0; \\
 -\omega^2 + \omega_0^2 &= 0; \\
 (-4\omega^2 + \omega_0^2) a_2(n) + \frac{1}{2} a_1^2 &= 0; \\
 (-9\omega^2 + \omega_0^2) a_3(n) + a_1 a_2 &= 0; \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Quantique :

(19)

$$\begin{aligned}
 \omega_0^2 a_0(n) + \frac{1}{4} [a^2(n+1, n) + a^2(n, n-1)] &= 0; \\
 -\omega^2(n, n-1) + \omega_0^2 &= 0; \\
 [-\omega^2(n, n-2) + \omega_0^2] a(n, n-2) + \frac{1}{2} [a(n, n-1) a(n-1, n-2)] &= 0; \\
 [-\omega^2(n, n-3) + \omega_0^2] a(n, n-3) + \frac{1}{2} [a(n, n-1) a(n-1, n-3)] \\
 + \frac{1}{2} [a(n, n-2) a(n-2, n-3)] &= 0; \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

La condition quantique supplémentaire est :

Classique ($J = nh$) :

$$1 = 2\pi m \frac{d}{dJ} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} \tau^2 |a_\tau|^2 \omega.$$

Quantique :

$$h = \pi m \sum_0^\infty [|a(n+\tau, n)|^2 \omega(n+\tau, n) - |a(n, n-\tau)|^2 \omega(n, n-\tau)].$$

Nous obtenons pour le premier ordre, à la fois selon le paradigme classique et selon celui de la mécanique quantique

$$(20) \quad a_1^2(n) \quad \text{ou} \quad a^2(n, n-1) = \frac{(n + \text{const})h}{\pi m \omega_0}.$$

En théorie quantique, la constante dans l'équation (20) peut être déterminée à partir de la condition que $a(n_0, n_0-1)$ devrait s'évanouir dans l'état de plus basse énergie. Si nous numérotions les n de telle façon que dans l'état de plus basse énergie, n vaut zero, i.e. $n_0 = 0$, alors $a^2(n, n-1) = nh/\pi m \omega_0$.

Il découle alors des relations récursives (18) que dans la théorie classique, le coefficient a_τ a (au premier ordre en λ) la forme $\varkappa(\tau) n^{\frac{1}{2}\tau}$ où $\varkappa(\tau)$ représente un facteur indépendant de n . En théorie quantique, l'équation (19) implique

$$(21) \quad a(n, n-\tau) = \varkappa(\tau) \sqrt{\frac{n!}{(n-\tau)!}},$$

où $\varkappa(\tau)$ est le même facteur de proportionnalité, indépendant de n . Naturellement, pour des grandes valeurs de n , la valeur dans la théorie quantique de a_τ tend asymptotiquement vers la valeur en théorie classique.

Une étape évidente serait d'essayer d'insérer l'expression classique pour l'énergie $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 + \frac{1}{3}m\lambda x^3 = W$, parce que dans le calcul de notre présente première approximation, il est effectivement constant, même lorsque traité en théorie quantique. Sa valeur est donnée par (19), (20) et (21) comme valant :

Classique :

$$(22) \quad W = nh\omega_0/2\pi.$$

Quantique :

$$(23) \quad W = (n + \frac{1}{2})h\omega_0/2\pi$$

ou
$$\nu(n, \alpha) + \nu(n, \beta) = \nu(n, \alpha + \beta).$$

(les termes d'ordre λ^2 ont été omis).

Ainsi, selon le point de vue présent, même l'énergie d'un oscillateur harmonique n'est pas donnée par la "mécanique classique", i.e. par l'équation (22), mais a la forme (23).

Le calcul plus précis, prenant en compte des approximations d'ordre plus élevé dans W, a, ω sera maintenant effectué pour l'exemple le plus simple de l'oscillateur anharmonique $\ddot{x} + \omega_0^2x + \lambda x^3 = 0$.

Classiquement, on peut dans ce cas supposer

$$x = a_1 \cos \omega t + \lambda a_3 \cos 3\omega t + \lambda^2 a_5 \cos 5\omega t + \dots;$$

en théorie quantique, nous tentons de supposer par analogie

$$a(n, n-1) \cos \omega(n, n-1)t; \quad \lambda a(n, n-3) \cos \omega(n, n-3)t; \dots$$

Les quantités a sont une fois de plus des séries de puissances en λ dont le premier terme a la forme, comme dans l'équation (21),

$$a(n, n-\tau) = \varkappa(\tau) \sqrt{\frac{n!}{(n-\tau)!}},$$

comme on le trouve en évaluant les équations correspondant à (18) et (19).

Si l'évaluation de ω et a à partir des équations (18) et (19) est effectuée jusqu'à l'ordre λ^2 ou λ respectivement, on obtient

$$(24) \quad \omega(n, n-1) = \omega - 0 + \lambda \frac{3nh}{8\pi\omega_0^2 m} - \lambda^2 \frac{3h^2}{256\omega_0^5 m^2 \pi^2} (17n^2 + 7) + \dots$$

$$(25) \quad a(n, n-1) = \sqrt{\frac{nh}{\pi\omega_0 m}} \left(1 - \lambda \frac{3nh}{16\pi\omega_0^3 m} + \dots \right)$$

$$(26) \quad a(n, n-3) = \frac{1}{32} \sqrt{\frac{h^3}{\pi^2 \omega_0^7 m^3} n(n-1)(n-2)} \cdot \left(1 - \lambda \frac{39(n-1)h}{32\pi\omega_0^3 m} \right).$$

L'énergie, définie comme le terme constant dans l'expression

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4}m\lambda x^4,$$

(je n'ai pas pu prouver en général que tous les termes périodiques s'évanouissent effectivement, mais c'était le cas pour tous les termes évalués) s'avère être égale à

$$(27) \quad W = \frac{(n + \frac{1}{2})h\omega_0}{2\pi} + \lambda \frac{3(n^2 + n + \frac{1}{2})h^2}{8.4\pi^2\omega_0^2 m} - \lambda^2 \frac{h^3}{512\pi^3\omega_0^5 m^2} (17n^3 + \frac{51}{2}n^2 + \frac{59}{2}n + \frac{21}{2}).$$

Cette énergie peut aussi être déterminée en utilisant l'approche de *Kramers-Born* en traitant le terme $\frac{1}{4}m\lambda x^4$ comme une perturbation de l'oscillateur harmonique. Le fait qu'on obtienne exactement le même résultat (27) me semble remarquablement corroborer les équations de la mécanique quantique qui ont été prises comme base. De plus, l'énergie calculée à partir de (27) satisfait la relation (cf. eq. 24) :

$$\frac{\omega(n, n-1)}{2\pi} = \frac{1}{h} [W(n) - W(n-1)],$$

qui peut être vue comme une condition nécessaire pour la possibilité d'une détermination des transitions de probabilités selon les équations (11) et (16).

En conclusion, nous considérons le cas d'un objet qui tourne et nous attirons l'attention sur la relation des équations (7), (8) aux formules d'intensité pour l'effet Zeeman⁵ et pour le multiplet⁶. Considérons l'objet tournant (rotator) comme représenté par un électron qui entoure un noyau à distance constante a . À la fois du point de vue classique et du point de vue de la théorie quantique, les "équations du mouvement" établissent simplement que l'électron subit une rotation uniforme, plane, à une distance a et avec une vitesse angulaire ω autour du noyau. Les "conditions quantiques" (16) amènent, selon (12),

$$h = \frac{d}{dn} (2\pi m a^2 \omega),$$

et selon (16)

$$h = 2\{a^2\omega(n+1, n) - a^2\omega(n, n-1)\},$$

5. S. Goudsmit et R. de L. Kronig, *Naturwiss.* **13** (1925) 90; H. Hönl, *Zs. f. Phys.* **31** (1925) 340.

6. R. de L. Kronig, *Zs. f. Phys.* **31** (1925) 885; A. Sommerfeld and H. Hönl, *Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss.* (1925) 141; H. N. Russell, *Nature* **115** (1925) 835.

d'où, dans les deux cas, il découle que

$$\omega(n, n-1) = \frac{h(n + \text{const})}{2\pi ma^2}.$$

La condition que la radiation doive s'évanouir dans l'état d'énergie la plus basse ($n_0 = 0$) amène à la formule

$$(28) \quad \omega(n, n-1) = \frac{hn}{2\pi ma^2}.$$

L'énergie est

$$W = \frac{1}{2}mv^2,$$

ou, des équations (7), (8),

$$(29) \quad W = \frac{m}{2}a^2 \frac{\omega^2(n, n-1) + \omega^2(n+1, n)}{2} = \frac{h^2}{8\pi^2 ma^2} (n^2 + n + \frac{1}{2}),$$

satisfait à nouveau la condition $\omega(n, n-1) = (2\pi/h)[W(n) - W(n-1)]$.

Comme corroborant la validité des formules (28) et (29), selon Kratzer⁷, de nombreux spectres de raies (incluant les spectres pour lesquels l'existence d'un moment pour l'électron est improbable) semblent nécessiter des formules du type (28), (29), formules que, pour éviter la rupture avec la théorie de la mécanique classique, on s'était efforcé jusqu'ici d'expliquer par la quantification en demi-entiers.

Pour arriver à la formule de *Goudsmit-Kronig-Hönl* pour l'objet tournant, on doit laisser de côté le domaine des problèmes à un degré de liberté. On suppose que le tourniquet à une direction dans l'espace qui est sujette à une très lente précession σ autour de l'axe des coordonnées z d'un champ extérieur.

Appelons m le nombre quantique correspondant à cette précession. Le mouvement est alors représenté par les quantités

$$\begin{aligned} z &: a(n, n-1; m, m) \cos \omega(n, n-1)t; \\ x + iy &: b(n, n-1; m, m-1) e^{i[\omega(n, n-1) + \sigma]t}; \\ & b(n, n-1; m-1, m) e^{i[-\omega(n, n-1) + \sigma]t}. \end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont simplement

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

À cause de (7), la façon dont cela amène à l'équation⁸

7. Cf. par exemple, B. A. Kratzer, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. (1922) p. 107.

8. Cette équation (30) est assez identique aux règles sommatoires de *Ornstein-Burger*.

$$(30) \quad \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} a^2(n, n-1; m, m) + b^2(n, n-1; m, m-1) + b^2(n, n-1; m, m+1) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} a^2(n+1, n; m, m) + b^2(n+1, n; m-1, m) + b^2(n+1, n; m+1, m) \right\} = a^2.$$

$$(31) \quad \frac{1}{2} a(n, n-1; m, m) a(n-1, n-2; m, m) \\ = b(n, n-1; m, m+1) b(n-1, n-2; m+1, m) \\ + b(n, n-1; m, m-1) b(n-1, n-2; m-1, m).$$

On a aussi la condition quantique correspondant à (16) :

$$(32) \quad 2\pi m \{ b^2(n, n-1; m, m-1) \omega(n, n-1) \\ - b^2(n, n-1; m-1, m) \omega(n, n-1) \} = (m + \text{const}) h.$$

Les relations classiques correspondant à ces équations sont

$$(33) \quad \frac{1}{2} a_0^2 + b_1^2 + b_{-1}^2 = a^2; \\ \frac{1}{4} a_0^2 = b_1 b_{-1}; \\ 2\pi m (b_{+1}^2 - b_{-1}^2) \omega = (m + \text{const}) h.$$

Elles suffisent (à une constante inconnue près ajoutée à m) à déterminer a_0 , b_1 , b_{-1} de manière unique.

La solution la plus simple des équations de la théorie quantique (30), (31), (32) qui se présente est :

$$b(n, n-1; m, m-1) = a \sqrt{\frac{(n+m+1)(n+m)}{4(n+\frac{1}{2})n}}; \\ b(n, n-1; m-1, m) = a \sqrt{\frac{(n-m)(n-m+1)}{4(n+\frac{1}{2})n}}; \\ a(n, n-1; m, m) = a \sqrt{\frac{(n+m+1)(n-m)}{(n+\frac{1}{2})n}}.$$

Ces expressions sont en accord avec les formules de *Goudsmit*, *Kronig* et *Hönl*. On ne voit cependant pas facilement que ces expressions représentent les *seules* solutions possibles des équations (30), (31), (32), bien que cela me semble provenir de considération de conditions aux bornes (évanouissement de a et b aux "limites"; cf. les articles de *Kronig*, *Sommerfeld* et *Hönl*, *Russell* cités plus haut).

Des considérations similaires à celles ci-dessus, appliquées aux formules d'intensité du multiplet amènent au résultat que ces règles d'intensité sont en accord avec les équations (7) et (16). Cette découverte peut à nouveau être vue comme corroborant la validité de l'équation cinématique (7).

Si une méthode pour déterminer les données théoriques en utilisant des relations entre les quantités observables, telle que celle proposée ici, peut être regardée comme satisfaisante en principe, ou si cette méthode permet de représenter une approche beaucoup trop grossière du problème physique de construire une mécanique quantique théorique, un problème évidemment très étudié en ce moment, la pertinence de cette méthode ne pourra être jugée que par des recherches mathématiques intensives ayant pour sujet la méthode qui a été utilisée de façon très superficielle ici.

Algèbres de Hecke, facteurs de type III et transitions de phase avec brisure spontanée de symétrie en théorie des nombres

Jean-Benoît BOST - Alain CONNES

Résumé Dans cet article, nous construisons un système C^* -dynamique naturel, dont la fonction de partition est la fonction ζ de Riemann. Notre construction est générale et associe à une inclusion d'anneaux (sous une condition adéquate de finitude) une inclusion de groupes discrets (les groupes $ax + b$ associés) et les algèbres de Hecke correspondantes de fonctions bi-invariantes. Cette algèbre est munie d'un groupe canonique à un paramètre d'automorphismes qui mesure le manque de normalité du sous-groupe. L'inclusion d'anneaux $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ fournit le système C^* -dynamique souhaité, qui admet la fonction ζ comme fonction de partition et le groupe de Galois $Gal(\mathbb{Q}^{\text{cycl}}/\mathbb{Q})$ de l'extension cyclotomique \mathbb{Q}^{cycl} de \mathbb{Q} comme groupe de symétrie. En outre, ce système présente une transition de phase avec brisure spontanée de symétrie à température inverse $\beta = 1$ (cf. [Bos-C]). La motivation initiale de ces résultats vient des travaux de B. Julia [J] (cf. aussi [Spe]).

1 Description du système et de sa transition de phase

Rappelons d'abord les notions générales de mécanique quantique statistique et des transitions de phase. Un système statistique quantique consiste en :

(α) une C^* -algèbre d'observables : A ;

(β) une évolution dans le temps $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$, qui est un groupe à un paramètre d'automorphismes de A . Un état d'équilibre, ou état KMS_β , à température inverse β sur (A, σ_t) est un état φ sur A qui satisfait la condition KMS_β relativement à σ_t , c'est-à-dire tel que pour tous $x, y \in A$, il existe une fonction bornée holomorphe (continue sur la bande fermée), $F_{x,y}(z), 0 \leq \Im z \leq \beta$ telle que

$$\begin{aligned} F_{x,y}(t) &= \varphi(x\sigma_t(y)) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ F_{x,y}(t + i\beta) &= \varphi(\sigma_t(y)x) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dans le cas le plus simple où $A = M_N(\mathbb{C})$ est l'algèbre des matrices $N \times N$, tout groupe à un paramètre d'automorphismes $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de A est de la forme

$$\sigma_t(x) = e^{itH} x e^{-itH} \quad \forall x \in A, t \in \mathbb{R}$$

pour un élément auto-adjoint $H = H^* \in A$. Alors pour tout $\beta \in [0, \infty[$, on a un unique état KMS_β pour σ_t , et il est donné par

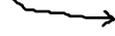
$$\varphi_\beta(x) = \frac{\text{Trace}(e^{-\beta H} x)}{\text{Trace}(e^{-\beta H})} \quad \forall x \in A.$$

Noter ici que la normalisation additive de H peut être fixée en imposant que $H \geq 0$ et $0 \in \text{Sp}H$. Alors le facteur de normalisation $\text{Trace}(e^{-\beta H})$ est appelé la fonction de partition de (A, σ_t) . La formule suivante est vérifiée :

$$\text{Log Trace}(e^{-\beta H}) = \sup_{\varphi} (S(\varphi) - \beta \varphi(H))$$

article original de référence *Selecta Mathematica*, New Serie, Vol.1, No.3 (1995), 1995, Birkhäuser Verlag, Basel.
lisible ici : <http://alainconnes.org/docs/bostconnesscan.pdf>

Transcription corrigée en décembre 2020, Denise Vella-Chemla.

 <https://alainconnes.org/wp-content/uploads/bostconnesscan.pdf>

où φ varie sur tous les états de A et $S(\varphi)$ est l'entropie de l'état

$$S(\varphi) = -\text{Trace}(\rho \text{Log} \rho) \quad \text{pour} \quad \varphi = \text{Trace}(\rho).$$

Plus généralement, si (A, σ_t) est un système C^* -dynamique quelconque et si φ est un état KMS_β tel que la fermeture faible de A est un facteur de type I, alors les conditions ci-dessus s'appliquent et l'énergie libre $S(\varphi) - \beta\varphi(H)$ est bien définie.

Dans une situation un peu plus contrainte que celle où $A = M_N(\mathbb{C})$, notamment pour les *systèmes sans interaction*, il est encore vrai que pour n'importe quel $\beta \in [0, \infty[$, il existe un unique état KMS_β . Plus précisément, on a comme conséquence immédiate la :

PROPOSITION 1. *Soit $A = \otimes_{\nu \in I} A_\nu$, un produit tensoriel infini d'algèbres de matrices $A_\nu = M_{n_\nu}(\mathbb{C})$, et $\sigma_t = \otimes_{\nu \in I} \sigma_t^\nu$ un produit d'évolutions temporelles. Alors pour tout $\beta \geq 0$, il existe un unique état KMS_β φ_β pour (A, σ_t) , et on a $\varphi_\beta = \otimes_{\nu} \varphi_{\beta, \nu}$, où $\varphi_{\beta, \nu}$ est l'unique état KMS_β pour (A_ν, σ_t^ν) .*

Pour les systèmes intéressants *avec interaction*, on s'attend en général à ce que pour les *hautes températures*, i.e. pour les β petits, le désordre prédominera de telle façon qu'il existera seulement un état KMS_β . Pour les températures suffisamment faibles, un certain ordre devrait apparaître qui autorisera l'existence de phases thermodynamiques variées, i.e., d'états KMS_β variés. C'est un fait important très général de la formulation C^* -algébrique de la mécanique quantique statistique qui fait que, pour un certain β donné, tout état KMS_β se décompose *de manière unique* comme une superposition d'états KMS_β *extrêmes* :

PROPOSITION 2. ([Br-R] [H]) *Soit (A, σ_t) un système C^* -dynamique et $\beta \in [0, \infty[$. Alors l'espace des états KMS_β est un simplexe convexe compact de Choquet. Les points extrêmes sont les facteurs d'états KMS_β et, quand ils sont de type I, ils cèdent une énergie libre bien définie.*

Pour un exposé détaillé du lien entre les états KMS_β extrêmes et les phases thermodynamiques, nous renvoyons le lecteur à [H].

Comme exemple simple illustrant la coexistence des phases aux températures basses, on peut penser au diagramme des phases de l'eau et de la vapeur ou mieux aux matériaux ferromagnétiques. Dans ce dernier exemple, quand la température T est supérieure à la température *critique* T_c , de l'ordre de $10^3 K$, le désordre domine, alors que pour $T < T_c$, les moments des spins individuels ont tendance à s'aligner les uns avec les autres, ce qui dans le cas classique à 3 dimensions amène un ensemble de phases thermodynamiques homogènes paramétré par la sphère en 2 dimensions des directions dans l'espace à 3 dimensions.

Cet exemple sert à illustrer le phénomène de *brisure spontanée de symétrie* : le groupe $SO(3)$ des rotations dans \mathbb{R}^3 est le groupe de symétrie du système dynamique avec lequel on commence et, pour les grandes valeurs de T , $T > T_c$, l'état d'équilibre est unique et par conséquent invariant par rotation. Pour les petites valeurs de T cependant, $T < T_c$, le groupe $SO(3)$ agit de façon non triviale sur l'ensemble des phases thermodynamiques et le choix d'un état d'équilibre brise la symétrie.

La formulation C^* -algébrique de cela est évidente. On a un groupe (compact) G d'automorphismes de la C^* -algèbre A qui commute avec l'évolution temporelle

$$\alpha_g \in \text{Aut}A, \quad \forall g \in G, \quad \alpha_g \sigma_t = \sigma_t \alpha_g \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Un tel groupe agit de façon évidente sur l'espace compact convexe des états KMS_β et par conséquent sur ses points extrêmes.

Nous allons maintenant décrire (la motivation précise sera expliquée ci-dessous) un système C^* -dynamique intimement relié à la distribution des nombres premiers et exhibant le comportement ci-dessus de brisure spontanée de symétrie.

La C^* -algèbre A est une *algèbre de Hecke*, qui contient l'algèbre des opérateurs de Hecke usuels de la théorie des nombres, i.e., ceux qui sont reliés aux correspondances de Hecke pour les treillis dans \mathbb{C} ([Sh], [Ser₁]). Cette dernière algèbre est commutative et c'est l'algèbre de composition des classes doubles

$$\gamma \in GL(2, \mathbb{Z}) \backslash GL(2, \mathbb{Q}) / GL(2, \mathbb{Z}).$$

Plus généralement, étant donné un groupe discret Γ et un sous-groupe Γ_0 qui est *presque normal*, c'est-à-dire qui satisfait la condition que

$$\text{“les orbites de } \Gamma_0 \text{ agissant à gauche sur } \Gamma/\Gamma_0 \text{ sont } \textit{finies}\text{”},$$

on définit l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$ comme l'algèbre de convolution de fonctions (\mathbb{C} -valuées pour notre objectif) à support fini sur $\Gamma_0 \backslash \Gamma / \Gamma_0$. Plus spécifiquement, étant données 2 telles fonctions $f, f' \in \mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$, leur convolution est

$$(f * f')(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} f(\gamma \gamma_1^{-1}) f'(\gamma_1) \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Dans cette formule, f et f' sont vues comme des fonctions Γ_0 -bi-invariantes sur Γ et à support fini dans $\Gamma_0 \backslash \Gamma / \Gamma_0$.

Pour compléter \mathcal{H} en une C^* -algèbre, on la ferme en norme dans la *représentation régulière* de \mathcal{H} dans $\ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)$ (cf. [Bi]) :

PROPOSITION 3. Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un sous-groupe presque normal du groupe discret Γ . Alors la formule suivante définit une représentation (involutive) λ de $\mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$ dans $\ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)$:

$$(\lambda(f)\xi)(\gamma) = \sum_{\Gamma_0 \backslash \Gamma} f(\gamma \gamma_1^{-1}) \xi(\gamma_1) \quad \forall \gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

On vérifie que $\lambda(f)$ est bornée pour tout $f \in \mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$. L'involution sur \mathcal{H} telle que

$$\lambda(f^*) = \lambda(f)^* \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

est donnée par l'égalité suivante :

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})} \quad \forall \gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma / \Gamma_0.$$

Alors, prenons A la C^* -algèbre fermée en norme de $\mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$ dans $\ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)$. Une bonne notation pour cette algèbre, compatible avec le cas des groupes discrets est

$$\overline{\mathcal{H}}(\Gamma, \Gamma_0) = C_r^*(\Gamma, \Gamma_0).$$

Définissons maintenant le groupe à un paramètre d'automorphismes $\sigma_t \in \text{Aut } A$. Nous avons d'abord besoin d'introduire les notations. Puisque toute Γ_0 orbite sur Γ/Γ_0 est finie, nous noterons, pour $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \text{cardinalité de l'image de } \Gamma_0 \gamma \Gamma_0 \text{ dans } \Gamma/\Gamma_0 \\ R(\gamma) &= \text{cardinalité de l'image de } \Gamma_0 \gamma \Gamma_0 \text{ dans } \Gamma_0 \backslash \Gamma. \end{aligned}$$

Alors, par construction, $L(\gamma) \in \mathbb{N}^*$, $R(\gamma) \in \mathbb{N}^*$, $R(\gamma) = L(\gamma^{-1})$, L et R sont toutes deux des fonctions Γ_0 -bi-invariantes.

PROPOSITION 4. Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un sous-groupe presque normal du groupe discret Γ .

Il existe un seul groupe à un paramètre d'automorphismes $\sigma_t \in \text{Aut}(C_r^*(\Gamma, \Gamma_0))$ tel que

$$(\sigma_t(f))(\gamma) = \left(\frac{L(\gamma)}{R(\gamma)} \right)^{-it} f(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma/\Gamma_0$$

En fait, comme nous le verrons plus tard, σ_{-t} est la réduction du groupe modulaire d'automorphismes σ_t^φ pour l'état sur $M = \lambda(\mathcal{H})''$ donnés par le vecteur unité correspondant à la classe $\Gamma_0 \in \Gamma_0 \backslash \Gamma$.

Considérons maintenant l'algèbre de Hecke \mathcal{H} pour les groupes :

$$\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^+, \quad \Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+$$

où P est le groupe des matrices 2×2 défini par $P = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}; aa^{-1} = a^{-1}a = 1 \right\}$ et où le $+$ indique que nous nous restreignons aux cas pour lesquels $a > 0$. On vérifie que $P_{\mathbb{Z}}^+$ est presque normal dans $P_{\mathbb{Q}}^+$ (cf. Lemme 13).

Nous allons maintenant décrire la transition de phase avec brisure spontanée de symétrie pour le système dynamique correspondant à $\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^+, \Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+$. Notons par ψ_β la fonction suivante sur le groupe \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Étant donné $n = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$, avec a premier à $b > 0$, soit

$$b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{k_p}$$

la décomposition en facteurs premiers de b et posons

$$\psi_\beta(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}, k_p \neq 0} p^{-k_p \beta} (1 - p^{\beta-1})(1 - p^{-1})^{-1}.$$

L'inclusion du sous-groupe unipotent

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; n \in \mathbb{Q} \right\} \subset P_{\mathbb{Q}}^+$$

définit un plongement $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \subset \Gamma_0 \backslash \Gamma/\Gamma_0$ et des morphismes injectifs d'algèbres involutives

$$\mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \subset \mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$$

et

$$C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_r^*(\Gamma, \Gamma_0).$$

Le résultat principal de cet article est le

THÉORÈME 5. *Soit (A, σ_t) le système C^* -dynamique associé au sous-groupe presque normal $P_{\mathbb{Z}}^+$ de $P_{\mathbb{Q}}^+$. Alors*

- (a) *Pour $0 < \beta \leq 1$, il existe un unique état KMS_{β} φ_{β} sur (A, σ_t) . Sa restriction à $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$ est donnée par la fonction ci-dessus de type positif ψ_{β} sur \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Chaque φ_{β} est un facteur d'états et le facteur associé est le facteur hyperfini de type III_1 , R_{∞} .*
- (b) *Pour $\beta > 1$ les états KMS_{β} sur (A, σ_t) forment un simplexe dont les points extrêmes $\varphi_{\beta, \chi}$ sont paramétrés par les plongements complexes $\chi : \mathbb{Q}^{\text{cycl}} \rightarrow \mathbb{C}$ du sous-corps \mathbb{Q}^{cycl} de \mathbb{C} engendré par les racines de l'unité et dont les restrictions à $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ sont données par la formule suivante :*

$$\varphi_{\beta, \chi}(\gamma) = \zeta(\beta)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \chi(\gamma)^n$$

Ces états sont des facteurs d'états de type I_{∞} .

- (c) *La fonction de partition est la fonction zêta de Riemann.*

Le facteur de normalisation est l'inverse de la fonction ζ de Riemann évaluée en β . En d'autres termes, la température critique est ici $T_c = 1$ et à basse température ($\beta > 1$), les phases du système sont paramétrées par tous les plongements possibles de $K = \mathbb{Q}^{\text{cycl}}$ dans le corps des nombres complexes.

Comme nous le verrons ci-dessous, le groupe de Galois $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}}/\mathbb{Q})$ agit naturellement comme un groupe d'automorphismes de $C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$ qui commute avec l'évolution temporelle $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$, et la brisure spontanée de symétrie a lieu pour $\beta > 1$.

Avant que nous ne commençons la démonstration du théorème 5, nous allons expliquer comment le système C^* -dynamique ci-dessus est relié à la distribution des nombres premiers.

2 Seconde quantification des bosons et nombres premiers comme sous-ensemble de \mathbb{R}

E. Nelson a dit que la première quantification est un mystère tandis que la seconde est un *foncteur*. Dans le cas des bosons, ce foncteur \mathbf{S} , de la catégorie des espaces de Hilbert vers elle-même, assigne à chaque espace de Hilbert \mathcal{H} un nouvel espace de Hilbert $\mathbf{S}\mathcal{H}$ donné par

$$\mathbf{S}\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n \mathcal{H}$$

où $S^n \mathcal{H}$ est la n -ième puissance symétrique de \mathcal{H} munie du produit intérieur suivant :

$$\langle \xi_1 \dots \xi_n, \eta_1 \dots \eta_n \rangle = \sum_{\sigma} \prod_1^n \langle \xi_i, \eta_{\sigma(i)} \rangle \quad \forall \xi_j, \eta_j \in \mathcal{H}$$

(voir par exemple [G]). Étant donné un opérateur T dans \mathcal{H} (plus généralement $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$), l'opérateur $\mathbf{S}T$ dans $\mathbf{S}\mathcal{H}$ est donné par

$$(\mathbf{S}T)(\xi_1 \dots \xi_n) = (T\xi_1)(T\xi_2) \dots (T\xi_n) \quad \forall \xi_i \in \mathcal{H}.$$

Même si T est borné, $\mathbf{S}T$ n'est pas borné en général mais si T est auto-adjoint (non-borné), il en est de même de $\mathbf{S}T$. Aussi, nous travaillerons avec de tels opérateurs. On a la formule suivante :

$$\text{Trace}(\mathbf{S}T) = \frac{1}{\det(1 - T)} \quad (*)$$

qui fait sens si $\|T\| < 1$ et $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$.

Le problème que nous allons maintenant étudier est le suivant : trouver une caractérisation simple des opérateurs auto-adjoints T dans \mathcal{H} dont le spectre est le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ formé de tous les nombres premiers, chacun avec une multiplicité de 1 :

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\} \subset \mathbb{R}.$$

Le problème correspondant pour l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ des entiers naturels, ou pour $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, est plus facile, et a été résolu dans l'article de Dirac [Dir] qui a inauguré la théorie quantique des champs. Dans ce cas, la solution est simplement qu'il existe un opérateur a tel que

$$aa^* - a^*a = 1, \quad a^*a = T.$$

(Pour \mathbb{N}^* , il est nécessaire que aa^* soit égal à T). Établissons maintenant le résultat pour le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$:

LEMME 6. *Soit T un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert \mathcal{H} ; alors (en comptant les multiplicités)*

$$\text{Spectrum } T = \mathcal{P} \iff \text{Spectrum } \mathbf{S}T = \mathbb{N}^*.$$

Preuve. Assumons d'abord que Spectre $\mathbf{S}T = \mathbb{N}^*$. Alors, comme généralement $\text{Spec } T \subset \text{Spec } \mathbf{S}T$, (en utilisant l'inclusion $\mathcal{H} \subset \mathbf{S}\mathcal{H}$), on voit que $\sum = \text{Spec}(T) \subset \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{P} \subset \sum$. Effectivement, prenons $p \in \mathcal{P}$ et qui n'est pas dans \sum . Alors, puisque $\sum \subset \mathbb{N}^*$, on a $p \notin \sum^n$ pour tout n (avec $\sum^n = \{k_1 k_2 \dots k_n; k_j \in \sum\}$). Cela montre que $p \notin \text{Spec}(\mathbf{S}T) = \cup \sum^n$, d'où une contradiction. Ainsi $\mathcal{P} \subset \sum$. Si $k \in \sum \setminus \mathcal{P}$, alors puisque $k \in \mathcal{P}^n$ pour un certain $n > 1$, cela signifierait que k n'est pas une valeur propre simple pour $\mathbf{S}T$. Ainsi $\mathcal{P} = \sum$. L'inverse est évident et découle du théorème d'Euclide d'unicité de la factorisation, mais fixons les notations correspondantes : appelons $\mathcal{H}_1 = \ell^2(\mathcal{P})$ l'espace de Hilbert de base $(\varepsilon_p)_{p \in \mathcal{P}}$, et identifions-le au sous-espace à une particule de $\mathbf{S}\mathcal{H}_1 = \ell^2(\mathbb{N}^*)$, l'espace de Hilbert des séquences de carré intégrable de nombres complexes, avec la base canonique $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On note T l'opérateur :

$$T : \ell^2(\mathcal{P}) \rightarrow \ell^2(\mathcal{P}) ; T\varepsilon_p = p\varepsilon_p \quad \forall p \in \mathcal{P}$$

et $\mathbf{S}T$ l'opérateur correspondant

$$\mathbf{S}T : \ell^2(\mathbb{N}^*) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}^*) ; (\mathbf{S}T)\varepsilon_n = n\varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $H = \log(\mathbf{S}T)$. C'est le générateur du groupe unitaire à un paramètre $U_t = \exp(itH) = T^{it}$, dont le rôle est rendu clair par le cas particulier suivant de la formule (*) qui est la formule du produit eulérien pour la fonction ζ de Riemann :

$$\text{Pour } \text{Re } s > 1 ; \zeta(s) = \text{Trace}(\mathbf{S}T)^s = \frac{1}{\det(1 - T^s)}.$$

La signification du Lemme 6 est que le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ a une définition agréable à condition qu'on soit prêt à utiliser le formalisme de *la théorie quantique des champs de bosons*. Ce formalisme contient *l'algèbre* des opérateurs de création et destruction, respectivement $a^*(\xi)$ et $a(\eta)$, pour $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, donnés par

$$\begin{aligned} a^*(\xi)\xi_1 \dots \xi_n &= \xi\xi_1 \dots \xi_n & \forall \xi_j \in \mathcal{H} \\ a(\eta) &= (a^*(\eta))^*. \end{aligned}$$

Le formalisme inclut également *l'évolution temporelle*, selon le schéma d'Heisenberg, donné par

$$\sigma_t(x) = U_t x U_t^* = e^{itH} x e^{-itH}$$

Dans notre cas, la C^* -algèbre correspondante dans $\mathbf{SH} = \ell^2(\mathbb{N}^*)$ et l'évolution temporelle sont données par la :

PROPOSITION 7.

- (a) Pour tout $p \in \mathcal{P}$, soit μ_p l'isométrie dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ donnée par la décomposition polaire de l'opérateur de création associé au vecteur unité $\varepsilon_p \in \mathcal{H}$. La C^* -algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ engendrée par les μ_p est la même que celle engendrée par les isométries $\mu_n, n \in \mathbb{N}^*$, qui est définie par

$$\mu_n \varepsilon_k = \varepsilon_{kn} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

- (b) Cette C^* -algèbre est le produit tensoriel infini

$$C^*(\mathbb{N}^*) = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} \tau_p$$

où chaque τ_p est la C^* -algèbre engendrée par μ_p et est la C^* -algèbre de Toeplitz.

- (c) L'égalité $\sigma_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}, \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*), t \in \mathbb{R}$, où $H = \log(\mathbf{ST})$, définit un groupe à un paramètre d'automorphismes de $C^*(\mathbb{N}^*)$ donné comme

$$\sigma_t = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} \sigma_{t,p}; \sigma_{t,p}(\mu_p) = p^{it} \mu_p \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Preuve.

- (a) Par construction, μ_p est le décalage d'un côté dans l'espace de Hilbert $SC\varepsilon_p$ tensorisé par l'identité dans chacun des espaces de Hilbert $SC\varepsilon_q, q \neq p$ dans la décomposition

$$S\mathcal{H} = \bigotimes_{q \in \mathcal{P}} SC\varepsilon_q.$$

Par rapport aux bases (ε_n) de $S\mathcal{H}$, on a alors

$$\mu_p \varepsilon_n = \varepsilon_{pn} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

de telle façon que (a) en découle.

- (b) On rappelle que la C^* -algèbre de Toeplitz τ est la C^* -algèbre définie par un générateur unique u satisfaisant la relation $u^*u = 1$. Si u est une quelconque isométrie non-unitaire dans un espace de Hilbert (séparable), la plus petite C^* -algèbre contenant u est isomorphe à τ . Cette C^* -algèbre est nucléaire de telle façon que les produits tensoriels finis $\bigotimes_{p \leq n} \tau_p$, sont définis de manière non-ambigue.

La C^* -algèbre $\bigotimes_{p \in \mathcal{P}} \tau_p$ est leur limite inductive. Maintenant pour chaque p , l'isométrie μ_p engendre τ_p dans $S\mathbb{C}\varepsilon_p$ et puisque les produits tensoriels finis $\bigotimes_{p \leq n} \tau_p$ sont représentés fidèlement dans \mathcal{H} , on obtient (b).

(c) découle d'un calcul direct.

Le système C^* -dynamique ainsi obtenu n'est pas très intéressant parce qu'il est sans interaction (voir Proposition 8 (a)). Néanmoins, les uniques états KMS_β associés seront utiles plus tard et sont donnés par le corollaire suivant de la Proposition 1 et par la classification d'Araki-Woods des ITPFI.

PROPOSITION 8.

(a) Pour tout $\beta > 0$, il existe un unique état KMS_β sur $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$. C'est le produit tensoriel infini

$$\varphi_\beta = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} \varphi_{\beta,p}$$

où $\varphi_{\beta,p}$ est l'unique état KMS_β sur $(\tau_p, \sigma_{t,p})$ pour $\sigma_{\beta,p}$. La liste des valeurs propres de $\varphi_{\beta,p}$ est

$$\{(1 - p^{-\beta})p^{-n\beta} ; n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Pour $\beta > 1$, l'état φ_β est de type I_∞ et est donné par

$$\varphi_\beta(x) = \zeta(\beta)^{-1} \text{Trace}(e^{-\beta H} x) \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*).$$

(c) Pour $\beta = 1$, l'état φ_β est un facteur d'états de type III_1 donné par

$$\varphi_\beta(x) = \text{Trace}_\omega(e^{-H} x) \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)$$

où Trace_ω est la trace de Dixmier.

(d) Pour $0 < \beta \leq 1$, φ_β est un facteur d'états de type III_1 , et le facteur associé est le facteur R_∞ d'Araki-Woods.

L'assertion (d) pour $\beta = 1$ est due à B. Blackadar ([Bl]). Nous renvoyons le lecteur à [Co] IV.2 pour la définition de la trace de Dixmier, dont les propriétés générales rendent clair que l'égalité (c) définit un état KMS_1 .

Preuve. (a) Montrons d'abord qu'il existe un unique état KMS_β sur τ_p pour le groupe $\sigma_{t,p}$. On définit τ_p comme la C^* -algèbre dans $\ell^2(\mathbb{N})$ engendrée par le décalage d'un seul côté S , alors que $\sigma_{t,p}(S) = p^{it}S$ est le groupe à un paramètre d'automorphismes. D'abord soit $\varphi_{\beta,p}$ la restriction à τ_p de l'état sur $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ donnée par

$$\varphi(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_{n,n} \nu(n)$$

$$\text{où } \nu(n) = p^{-n\beta} \left(\sum_{m=0}^{\infty} p^{-m\beta} \right)^{-1}.$$

On vérifie que $\varphi_{\beta,p}$ est un état KMS_β sur τ_p . Inversement, soit φ un état KMS_β sur τ_p . Alors la condition d'état KMS_β montre que φ s'évanouit sur tout vecteur propre $A \in \tau_p$,

$$\sigma_{t,p}(A) = \lambda^{it} A \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ à condition que } \lambda \neq 1.$$

Cela montre aussi que $\varphi(SS^*) = \varphi(S^* \sigma_{-i\beta}(S)) = p^{-\beta} \varphi(S^*S) = p^{-\beta}$ de telle manière que $\varphi(1 - SS^*) = 1 - p^{-\beta}$. Plus généralement, on a pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \varphi(S^k S^{*\ell}) &= 0 & \text{si } k \neq \ell \\ &= p^{-k\beta} & \text{si } k = \ell. \end{aligned}$$

Cela montre l'unicité de $\varphi = \varphi_{\beta,p}$ sur l'idéal \mathcal{K} des opérateurs compacts, $\mathcal{K} \subset \tau_p$.

Ainsi, la différence $\psi = \varphi - \varphi_{\beta,p}$ s'évanouit sur \mathcal{K} et est une forme linéaire continue sur la C^* -algèbre quotient $\tau_p/\mathcal{K} = C(S^1)$. Nous avons vu que $\varphi(S^n) = \varphi_{\beta,p}(S^n) = 0$ pour tout $n > 0$ et similairement pour $(S^*)^n$ de telle manière que $\psi = 0$ et $\varphi = \varphi_{\beta,p}$.

L'unicité de φ_β découle alors d'un argument général pour les produits tensoriels : Soit (A, σ_t^A) et (B, σ_t^B) des systèmes C^* -dynamiques et φ un état KMS_β sur $(A \otimes B, \sigma_t^A \otimes \sigma_t^B)$. Alors pour tout $b \in B$, la fonctionnelle sur A

$$\varphi_b(a) = \varphi(a \otimes b)$$

est KMS_β sur A . Par conséquent, pour tout $x, y \in A$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma_t^A(x)y \otimes b) &= \varphi(\sigma_t^{A \otimes B}(x \otimes 1)(y \otimes b)) \\ \varphi(y\sigma_t^A(x) \otimes b) &= \varphi(y \otimes b)\sigma_t^{A \otimes B}(x \otimes 1). \end{aligned}$$

(b) On utilise la finitude de $\text{Trace}(e^{-\beta H})$ pour $\beta > 1$.

(c) Par construction, on a un produit tensoriel infini de facteurs de type I avec comme liste de valeurs propres

$$\lambda_{p,n} = p^{-n\beta}(1 - p^{-\beta});$$

et ainsi, l'assertion (c) découle de [A-W].

(d) On vérifie directement la condition KMS_1 , et les mêmes arguments que ceux utilisés pour (c) montrent que φ_1 est de type III_1 .

3 Produits d'arbres et algèbres de Hecke non-commutatives

Dans cette section, nous allons relier le système C^* -dynamique $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$ de la section 2 avec des notions de la théorie basique des nombres [We₂] et obtenir le système dynamique de Hecke du Théorème 5.

Soit P le groupe $ax + b$, i.e. le groupe des matrices triangulaires 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, avec a inversible. Nous le voyons comme un groupe algébrique sur \mathbb{Z} , i.e. comme un foncteur $A \rightarrow P_A$ des anneaux commutatifs vers les groupes. Il joue un rôle important dans la classification élémentaire des corps localement compacts (commutatifs et non discrets) (cf. [We₂]). En effet, étant donné un tel corps K , alors le groupe $G = P_K$ est un groupe *localement compact*, et de ce fait, il a un module

$$\delta : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

défini par le manque d'invariance de la mesure de Haar à gauche dg sur G par les translations à droite :

$$(1) \quad d(gk) = \delta(k)dg \quad \forall k \in G$$

(ou, de manière équivalente $d(g)^{-1} = \delta(g)^{-1}dg$ comme mesures sur G).

Ce module $\delta : P_K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vaut 1 sur le groupe additif et sa restriction au groupe multiplicatif (étendu par 0 sur $K \setminus K^*$) amène une application multiplicative propre continue

$$(2) \quad \text{mod}_K : K = \mathbb{R}_+.$$

En fait, si dx désigne la mesure de Haar sur le groupe additif (localement compact) K , on a

$$d(ax) = \text{mod}_K(a)dx \quad \forall a \in K^*.$$

De plus, les ensembles ouverts $\{k \in K; \text{mod}_K(k) < \varepsilon\}$ forment une base de voisinages de 0. L'image de δ est un sous-groupe fermé de \mathbb{R}_+^* et excepté dans le cas de corps archimédiens \mathbb{R} ou \mathbb{C} , ce sous-groupe fermé est discret et égal à $\lambda^{\mathbb{Z}}$ pour un certain $\lambda \in]0, 1[$ dont l'inverse $q = \lambda^{-1}$ est appelé le *module* de K . La fonction sur $K \times K$ $d(x, y) := \text{mod}_K(x - y)$ est alors une distance ultramétrique qui donne en retour la topologie de K ([We2]). En d'autres mots, on a la :

PROPOSITION 9. (cf. [We2]) *Soit K un corps localement compact non-discret commutatif, $K \neq \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Alors il existe un nombre premier p tel que $\text{mod}_K(p) < 1$. Appelons R, R^* et J les sous-ensembles de K définis respectivement par*

$$\begin{aligned} R &= \{x \in K; \text{mod}_K(x) \leq 1\}, \\ R^* &= \{x \in K; \text{mod}_K(x) = 1\}, \\ J &= \{x \in K; \text{mod}_K(x) < 1\}. \end{aligned}$$

Alors R est le sous-anneau compact maximal de K ; R^ est le groupe des éléments inversibles de R ; J est l'unique idéal maximal de R , et il existe $\pi \in J$ tel que $J = \pi R = R\pi$. La topologie sur le groupe topologique K est l'unique topologie (ultramétrique) telle que les idéaux $\pi^n R$ forment une base de voisinages de 0. De plus, le corps de restes $k = R/J$ est un corps fini de caractéristique p ; si q est le nombre de ses éléments, l'image de K^* dans R_+^* sous mod_K est le sous-groupe de \mathbb{R}_+^* engendré par q .*

Étant donné $x \in K$, l'entier $v(x)$ tel que $\text{mod}_K(x) = q^{-v(x)}$ est appelé la *valuation* de x .

Comme exemple basique, le corps \mathbb{Q}_p des nombres p -adiques est défini (étant donné p un nombre premier quelconque), comme la complétion du corps \mathbb{Q} des nombres rationnels pour la fonction de distance :

$$(3) \quad d(x, y) = |x - y|_p$$

où pour $x \in \mathbb{Q}$, $x = p^n \frac{a}{b}$ (avec n, a, b des nombres entiers et a, b premiers à p), on pose

$$(4) \quad |x|_p = p^{-n}$$

Le sous-anneau maximal R de $K = \mathbb{Q}_p$ est l'anneau \mathbb{Z}_p des entiers p -adiques et le corps résiduel $k = R/J$ est le corps fini \mathbb{F}_p .

De cette manière, on obtient, avec l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, toutes les inclusions $\mathbb{Q} \subset K$ du corps des nombres rationnels comme un sous-corps dense d'un corps local K . De telles inclusions (ou plutôt, en général, les classes d'équivalence des complétions) sont appelées *places* et pour distinguer les places réelles $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ des autres, ces dernières sont appelées *places finies*.

En mettant ensemble les inclusions de \mathbb{Q} dans ses complétions $\mathbb{Q}_v = K$ paramétrisées par les places de \mathbb{Q} , on obtient une seule inclusion de \mathbb{Q} dans l'anneau commutatif *localement compact* des *adèles* qui est le produit restreint des corps \mathbb{Q}_v . Plus spécifiquement, cet anneau est le produit $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$ où l'anneau \mathcal{A} des adèles *finies* est obtenu comme suit :

- (a) Les éléments x de \mathcal{A} sont les familles arbitraires $(x_p)_{p \in \mathcal{P}}$ avec $x_p \in \mathbb{Q}_p$, telles que $x_p \in \mathbb{Z}_p$ pour tout p sauf pour un nombre fini d'entre eux.
- (b) $(x + y)_p = x_p + y_p$; $(xy)_p = x_p y_p$ définit l'addition et le produit dans \mathcal{A} .
- (c) Finalement, \mathcal{A} a l'unique topologie d'un anneau localement compact tel que le sous-anneau

$$\mathcal{R} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p,$$

est ouvert et fermé et hérite de la topologie de produit compact.

Nous allons maintenant relier le système C^* -dynamique $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$ de la section 2 avec l'anneau localement compact \mathcal{A} des adèles finies.

Nous avons seulement besoin de rappeler que, un groupe G quelconque localement compact étant donné, avec une fonction modulaire $\delta : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, on a un groupe naturel à un paramètre d'automorphismes σ_t de $C^*(G)$ donné par la formule suivante valide sur $L^1(G)$:

$$(5) \quad (\sigma_t(f))(g) = \delta(g)^{-it} f(g) \quad \forall g \in G, t \in \mathbb{R}$$

Ce groupe d'automorphismes définit aussi un groupe d'automorphismes de la C^* -algèbre réduite $C_r^*(G)$, et le groupe σ_{-t} est le groupe modulaire d'automorphismes du poids de Plancherel sur $C^*(G)$.

PROPOSITION 10. *Soit \mathcal{A} l'anneau des adèles finies sur \mathbb{Q} , et \mathcal{R} son sous-anneau compact maximal (ouvert). Soit G le groupe localement compact $G = P_{\mathcal{A}}$, et $e \in C^*(G)$ la fonction caractéristique du sous-groupe compact et ouvert $P_{\mathcal{R}} \in P_{\mathcal{A}}$. Alors :*

- (1) *On a $e = e^* = e^2$, et la C^* -algèbre réduite $C^*(G)_e = \{x \in C^*(G) ; ex = xe = x\}$ est canoniquement isomorphe à la C^* -algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ de la section 2.*
- (2) *On a $\sigma_t(e) = e \quad \forall t \in \mathbb{R}$, et la restriction de σ_t à la C^* -algèbre réduite $C^*(\mathbb{N}^*)$ est l'évolution temporelle de la section 2.*

Nous pensons à la fonction caractéristique de $P_{\mathcal{R}}$ comme à un élément de $L^1(G, dg) \subset C^*(G)$, avec dg l'unique mesure de Haar à gauche qui attribue la mesure 1 à $P_{\mathcal{R}}$. Le groupe G est résoluble et par conséquent moyennable de telle manière qu'il n'y a pas de différence entre $C^*(G)$ et la C^* -algèbre réduite $C_r^*(G)$.

La preuve de la Proposition 10 se réduit immédiatement à une assertion *locale*, notamment : si $K = \mathbb{Q}_p$ et $R \subset K$ est le sous-anneau compact maximal, le système C^* -dynamique $(C^*(P_K), \sigma_t)$ donné par (5), réduit par la projection e_p définie comme la fonction caractéristique de P_R , est isomorphe à la C^* -algèbre de Toeplitz τ_p , avec l'évolution temporelle $\sigma_{t,p}$ de la Proposition 7 (c).

Pour vérifier cela, on utilise les isomorphismes

$$C^*(P_K) \cong C^*(K) \rtimes K^* \cong C_0(K) \rtimes K^*$$

donnés par l'identification du groupe additif K avec son dual de Pontrjagin (cf. [We2] ; nous utilisons dans la suite les mêmes normalisations pour la mesure de Haar et la transformation de Fourier sur K que dans *loc.cit.*, notamment la mesure de Haar de $R = \mathbb{Z}_p$ vaut 1, et l'identification de K à son dual de Pontrjagin est telle que $R^\perp = R$). Alors, à e_p correspond l'élément du produit croisé donné par $\int_{R^*} 1_R U_g dg$. La C^* -algèbre réduite $C^*(PK)_{e_p}$ est alors engendrée par l'isométrie $\mu_p, \mu_p \in C^*(P_{\mathbb{Q}_p})_{e_p}$, donnée par la fonction L^1 suivante :

$$(6) \quad \mu_p \left(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) = 1 \text{ si } b \in \mathbb{R}, \text{ val}(a) = 1, \text{ et est égal à } 0 \text{ sinon.}$$

Vérifions que μ_p est une isométrie, i.e. que $\mu_p^* \mu_p = e_p$. La mesure de Haar à gauche sur P_K est donnée par $d \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = dbd^*a$ où d^*a est la mesure de Haar multiplicative normalisée de telle manière que $\int_{R^*} d^*a = 1$. Le module δ du groupe localement compact P_K est donné par $\delta \left(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) = |a|$. L'adjoint μ_p^* de μ_p est donné par la fonction

$$(7) \quad \mu_p^*(g) = \overline{\mu_p(g^{-1})} \delta(g^{-1}).$$

Ainsi, la convolution $\mu_p^* * \mu_p$ est donnée par l'intégrale

$$(8) \quad (\mu_p^* * \mu_p)(g) = \int_{P_K} \overline{\mu_p(g_1)} \mu_p(g_1 g)$$

Celle-ci s'évanouit à moins que $g \in P_R$, ce que l'on peut voir en utilisant $g = g_1^{-1} g_2$ pour $\mu_p(g_i) = 1$. Avec $g_i = \begin{bmatrix} 1 & b_i \\ 0 & a_i \end{bmatrix}$, on obtient $g_1^{-1} g_2 = \begin{bmatrix} 1 & -a_1^{-1} b_1 \\ 0 & a_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_2 - a_2 a_1^{-1} b_1 \\ 0 & a_1^{-1} a_2 \end{bmatrix} \in P_R$. De plus, l'intégrale $\int_{P_K} \mu_p(g)$ est égale à 1 de telle manière qu'on obtient $\mu_p^* * \mu_p = e_p$.

On a $\sigma_t(\mu_p)(g) = 0$ à moins que $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $\text{val}(a) = 1, b \in R$, et pour de tels g , on a $\sigma_t(\mu_p)(g) = \delta(g)^{-it} \mu_p(g) = |a|^{-it} \mu_p(g) = p^{it} \mu_p(g)$. Ainsi $\sigma_t(\mu_p) = p^{it} \mu_p$.

Nous pouvons aussi écrire l'état $\varphi_{\beta,p}$ sur $C^*(P_K)_{e_p}$ en termes de fonctions bi-invariantes. On obtient l'identité suivante pour tout $f \in C^*(P_K)_{e_p}$:

$$(9) \quad \varphi_{\beta,p}(f) = f \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + \left(\sum_{k>0} p^{k(1-\beta)} f \left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) (1 - p^{\beta-1})$$

(Observer que les éléments de $C^*(P_K)$ peuvent être identifiés à des fonctions P_R -bi-invariantes dans $L^2(P_K)$, et par conséquent à des fonctions localement constantes sur P_K ; en particulier, elles ont des valeurs bien définies sur les points de P_K). Selon la Proposition 8 (a) et sa preuve, pour démontrer (9), on a seulement besoin de vérifier que la fonctionnelle linéaire sur $C_c(P_K)_{e_p}$, définie par le côté droit de (9), satisfait la condition KMS_β ; cela découle d'un calcul évident.

Le système C^* -dynamique $(C^*(P_A), \sigma_t)$ de la Proposition 10 est sans interaction, exactement comme $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$ (Proposition 8), et il y a l'exacte analogue de la Proposition 8, qui établit l'existence

et l'unicité (à un facteur d'échelle près) des *poids* KMS_β sur le système ci-dessus. On a besoin d'utiliser les poids car on travaille avec des C^* -algèbres non unitaires. D'un point de vue technique, de tels poids doivent être semi-continus et semi-finis (pour la topologie de la norme) (cf. [Com]). C'est cependant instructif de travailler sur la formule explicite pour ces poids KMS_β . En utilisant l'isomorphisme naturel du dual de Pontrjagin $\widehat{\mathcal{A}}$ du groupe additif \mathcal{A} à lui-même (cf. [We₂]), on obtient un isomorphisme

$$(10) \quad C^*(P_{\mathcal{A}}) = C_0(\mathcal{A}) \rtimes \mathcal{A}^*$$

où le groupe multiplicatif \mathcal{A}^* des idèles finies agit par des homothéties dans l'espace localement compact \mathcal{A} . Le poids KMS_β sur $C^*(P_{\mathcal{A}}), \sigma_t$ est alors le poids dual de la mesure suivante μ_β sur \mathcal{A} :

$$(11) \quad \mu_\beta(f) = \zeta(\beta)^{-1} \int_{\mathcal{A}^*} |j|^\beta f(j) d^*j$$

Ici d^*j est la mesure de Haar sur le groupe multiplicatif $\mathcal{A}^*, j \rightarrow |j|$ est le module, et la formule fait sens ainsi pour $\beta > 1$, et par prolongement analytique pour $0 < \beta < 1$ (cf. [T], [We₁], [We₂]).

Il est clair que pour obtenir un système C^* -dynamique *avec interaction*, nous avons besoin d'utiliser non seulement l'anneau localement compact \mathcal{A} mais également l'inclusion fondamentale

$$(12) \quad \mathbb{Q} \subset \mathcal{A}.$$

Nous utiliserons l'inclusion correspondante $P_{\mathbb{Q}} \subset P'_{\mathcal{A}} = G$ et l'action de $P_{\mathcal{A}}$ sur le C^* -module $\mathcal{E} = C^*(G)e$ sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ donné par l'isomorphisme de la Proposition 10 : $C^*(G)_e = C^*(\mathbb{N}^*)$. En effet, quelle que soit la C^* -algèbre B et la projection (auto-adjointe) $e \in B$, l'espace $\mathcal{E} = Be = \{x \in B ; xe = x\}$ est de manière naturelle un C^* -module (à droite) sur la C^* -algèbre réduite $B_e = \{x \in B ; ex = xe = x\}$. Ainsi, on définit

$$(13) \quad \langle \xi, \eta \rangle = \xi^* \eta \in B_e, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{E} = Be$$

$$\xi a \in \mathcal{E}, \quad \forall \xi \in \mathcal{E}, \quad a \in B_e.$$

Ce C^* -module a de plus une structure naturelle à gauche de B -module, donnée par $(b, \xi) \rightarrow b\xi \in \mathcal{E}, \forall b \in B, \xi \in \mathcal{E}$.

Dans notre cas, $\mathcal{E} = C^*(G)e$ est un espace de fonctions sur G qui sont invariantes par multiplications à droite par des éléments de $P_{\mathcal{R}} \subset G$, ou, en d'autres termes, c'est un espace de fonctions sur l'espace homogène

$$(14) \quad \Delta = G/P_{\mathcal{R}}.$$

Cet espace Δ est par construction le produit restreint des espaces

$$(15) \quad \Delta_p = P_{\mathbb{Q}_p}/P_{\mathbb{Z}_p}$$

relativement au point de base donné par $P_{\mathbb{Z}_p}$.

PROPOSITION 11. *L'espace homogène $\Delta_p = P_{\mathbb{Q}_p}/P_{\mathbb{Z}_p}$ sur le groupe $P_{\mathbb{Q}_p} \subset GL(2, \mathbb{Q}_p)$ est naturellement isomorphe à l'(ensemble des sommets de l')arbre de $SL(2, \mathbb{Q}_p)$. Le groupe $P_{\mathbb{Q}_p}$ agit par les*

isométries de Δ_p , et préserve un point à l'infini.

Rappelons (cf. [Ser₂]) que l'arbre de $SL(2, K)$, où K est un corps local, est défini en termes de classes d'équivalence des treillis dans un espace vectoriel de dimension 2 noté V sur K . Avec les notations de la Proposition 9, un treillis $L \subset V$ est un R -sous-module de V qui est de type fini et engendre V comme un espace vectoriel. Le groupe multiplicatif K^* opère sur l'ensemble des treillis par $(L, x) \rightarrow xL$ pour $x \in K^*$, et on définit T comme l'ensemble des orbites de cette action de K^* . Étant donné un treillis $L \subset V$ et une classe $\Lambda' \in T$, il existe un unique représentant $L' \in \Lambda'$ tel que $L' \subset L$ et $L' \not\subset \pi L$ (avec π donné par la Proposition 9). Alors $L/L' = R/\pi^n R$ et l'entier n , qui dépend seulement des classes de L et L' , définit une distance d sur T , par l'égalité

$$(16) \quad d(\text{classe de } L, \text{ classe de } L') = n.$$

En utilisant l'ensemble des paires à distance mutuelle égale à 1 pour définir un complexe simplicial à une dimension, on obtient un arbre, l'arbre de $SL(2, K)$, et la distance ci-dessus est la longueur de l'unique plus court chemin injectif joignant les deux éléments de cet arbre (cf. [Ser₂]). Le groupe $GL(V)$ des automorphismes de l'espace vectoriel V agit sur l'ensemble des treillis par

$$(17) \quad (L, g) \rightarrow gL \quad \forall g \in GL(V),$$

et, comme cette action commute avec celle de K^* , elle donne une action, par isométries, de $GL(V)$ sur l'arbre T . Identifions V avec K^2 , $GL(V)$ avec $GL(2, K)$, et considérons P_K comme un sous-groupe de $GL(2, K) : P_K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} ; a \in K^*, b \in K \right\}$. Soit L_0 le treillis $R^2 \subset K^2$. Alors on vérifie que P_K agit transitivement sur T et que le stabilisateur de la classe de L_0 est P_R . Nous obtenons ainsi une identification canonique $T = P_K/P_R$. En prenant $K = \mathbb{Q}_p$, on aboutit à la conclusion.

PROPOSITION 12.

- (1) L'espace homogène $G/P_{\mathcal{R}} = \Delta$ équipé du point de base $P_{\mathcal{R}}$ est canoniquement isomorphe au produit restreint des arbres T_p équipé des points de base $P_{\mathbb{Z}_p}$, et l'action de G sur Δ est simpliciale.
- (2) Le sous-groupe $P_{\mathbb{Q}}^+ \subset P_{\mathcal{A}} = G$ agit transitivement sur Δ , et le sous-groupe d'isotropie du point de base $*$ est $P_{\mathbb{Z}}^+$.

Preuve. (1) Puisque à la fois $P_{\mathcal{A}}$ et $P_{\mathcal{R}}$ sont des produits restreints, la preuve de (1) est évidente.

(2) D'abord, \mathbb{Q} est dense dans le groupe additif \mathcal{A} des adèles (si on enlève la place à l'infini), (cf. [Ser₁]).

Le sous-groupe \mathbb{Q}_+^* de \mathcal{A}^* est discret et on a $\mathcal{A}^* = \mathbb{Q}_+^* \mathcal{R}^*$ où $\mathcal{R}^* = \{(x_p) ; \text{val}(x_p) = 0 \ \forall p\}$ est un sous-groupe compact de \mathcal{A}^* (cf. [We₂]).

Considérons la séquence exacte de groupes

$$(18) \quad 0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow P_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\rho} \mathcal{A}^* \rightarrow 1.$$

La fermeture de $P_{\mathbb{Q}}^+$ dans $P_{\mathcal{A}}$ est donnée par $\rho^{-1}(\mathbb{Q}_+^*)$. Ainsi, $\overline{P_{\mathbb{Q}}^+} = \mathcal{A} \rtimes \mathbb{Q}_+^*$. Étant donné $g = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix} \in P_{\mathcal{A}}$, on peut écrire $h = rs$ avec $r \in \mathbb{Q}_+^*, s \in \mathcal{R}^*$, alors

$$g = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ns^{-1} \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \in \overline{P_{\mathbb{Q}}^+} P_{\mathcal{R}}$$

Ainsi $g \in P_{\mathbb{Q}}^+ P_{\mathcal{R}}$ et puisque $P_{\mathcal{R}}$ est ouvert dans $P_{\mathcal{A}}$, on obtient $g \in P_{\mathbb{Q}}^+ P_{\mathcal{R}}$. Ainsi $P_{\mathcal{A}} = P_{\mathbb{Q}}^+ P_{\mathcal{R}}$ et $P_{\mathbb{Q}}^+$ agit transitivement sur Δ .

Finalement, le sous-groupe d'isotropie du point de base $* = P_{\mathcal{R}}$ est donné par

$$P_{\mathbb{Q}}^+ \cap P_{\mathcal{R}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\} = P_{\mathbb{Z}}^+$$

Nous pouvons alors identifier Δ avec $P_{\mathbb{Q}}^+/P_{\mathbb{Z}}^+$, et nous allons maintenant obtenir l'algèbre de Hecke du Théorème 5 du commutant de l'action de $P_{\mathbb{Q}}^+$ dans l'espace des fonctions sur Δ . Nous avons besoin pour cela de considérer l'espace de Hilbert $\ell^2(\Delta) = \ell^2(P_{\mathbb{Q}}^+/P_{\mathbb{Z}}^+)$.

Posons $\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^+, \Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+ \subset P_{\mathbb{Q}}^+$. Vérifions d'abord le

LEMME 13. L'action de $\Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+$ sur Γ/Γ_0 a seulement des orbites finies.

Preuve. Soit $g = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & k \end{bmatrix} \in P_{\mathbb{Q}}^+$. Alors

$$g\Gamma_0 = \left\{ g \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n+a \\ 0 & k \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

On a

$$\begin{bmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+a+n_1k \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Quand n_1 varie, n_1k prend seulement un nombre fini de valeurs modulo \mathbb{Z} , leur nombre dépendant du dénominateur de k . Ainsi on voit qu'on obtient par exemple une orbite finie de cardinalité le dénominateur de k .

LEMME 14.

- (a) Tout élément T du commutant de Γ agissant dans $\ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$ est caractérisé par la fonction Γ_0 -bi-invariante $f_T(g) = \langle T\varepsilon_e, g^{-1}\varepsilon_e \rangle$.
- (b) On a $\sum_{g \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} |f_T(g)|^2 < \infty$.
- (c) On a $f_{T^*}(g) = \overline{f_T}(g^{-1})$.
- (d) La fonction f_{T_1, T_2} Γ_0 -bi-invariante, associée au produit de deux éléments T_1 et T_2 dans son commutant est donnée par

$$f_{T_1, T_2}(g) = \sum_{\Gamma/\Gamma_0} f_{T_1}(gg_1) f_{T_2}(g_1^{-1}).$$

Preuve. (a) Tout élément de Γ agit par permutation de la base $\varepsilon_x, x \in \Gamma/\Gamma_0$ de $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$. Puisque T commute avec Γ , il est caractérisé par $T\varepsilon_e$ qui est déterminé par f_T . On a $f_T(g) = \langle Tg\varepsilon_e, \varepsilon_e \rangle$ de telle façon que f_T est Γ_0 -bi-invariante.

(b) Évident.

$$(c) f_{T^*}(g) = \langle T^*\varepsilon_e, g^{-1}\varepsilon_e \rangle = \langle g\varepsilon_e, T\varepsilon_e \rangle = \overline{\langle T\varepsilon_e, g\varepsilon_e \rangle}$$

(d)

$$\begin{aligned} f_{T_1 T_2}(g) &= \langle T_1 T_2 \varepsilon_e, g^{-1} \varepsilon_e \rangle = \langle T_2 \varepsilon_e, g^{-1} T_1^* \varepsilon_e \rangle \\ &= \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} \langle T_2 \varepsilon_e, g_1 \varepsilon_e \rangle \langle g_1 \varepsilon_e, g^{-1} T_1^* \varepsilon_e \rangle \\ &= \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} f_{T_1}(g g_1) f_{T_2}(g_1^{-1}) \end{aligned}$$

On peut écrire (d) comme

$$f_{T_1 T_2}(g) = \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} f_{T_1}(g g_1^{-1}) f_{T_2}(g_1)$$

La condition (b) montre que $f_T(g) = 0$ à moins qu'il existe un ensemble fini $F \subset \Gamma$ avec

$$\Gamma_0 g \Gamma_0 \subset F \Gamma_0$$

i.e., si $g \Gamma_0$ appartient à une orbite *finie* de Γ_0 sur Γ/Γ_0 . Par le Lemme 13, on peut prendre une base de fonctions Γ_0 -bi-invariantes, e_X , où X parcourt les classes doubles $X \in \Gamma_0 \backslash \Gamma/\Gamma_0$, $e_X(g) = 0$ si $g \notin X$, $e_X(g) = 1$ si $g \in X$. Pour toute telle classe, on a deux entiers finis associés :

(19)

$$\begin{aligned} L(X) &= \text{cardinalité de l'image de } X \text{ dans } \Gamma/\Gamma_0 \\ R(X) &= \text{cardinalité de l'image de } X \text{ dans } \Gamma_0 \backslash \Gamma. \end{aligned}$$

En fait, à chaque classe double X correspond un nombre rationnel *positif* donné par k pour tout $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & k \end{bmatrix} \in X$, et $L(X)$ est le dénominateur de k , alors que $R(X)$ est le numérateur de k .

PROPOSITION 15.

(a) Soit f une fonction Γ_0 -bi-invariante sur Γ de support fini dans $\Gamma_0 \backslash \Gamma/\Gamma_0$. Alors il existe un unique élément $r(f)$ du commutant de Γ dans $\ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$ tel que

$$f(g) = \langle r(f) \varepsilon_e, g^{-1} \varepsilon_e \rangle \quad \forall g \in \Gamma.$$

(b) L'application r s'étend à un isomorphisme de $C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$ avec la C^* -algèbre $C = C_{\mathbb{Q}}$ engendrée par $r(f)$ dans $\ell^2(\Delta)$.

Preuve. (a) Soit X une classe double, $X \in \Gamma_0 \backslash \Gamma/\Gamma_0$ et e_X la fonction Γ_0 -bi-invariante correspondante. Soit T la matrice définie par

$$\langle Tg_1 \varepsilon_e, g_2 \varepsilon_e \rangle = e_X(g_2^{-1} g_1).$$

On a, par le Lemme 13, l'inégalité

$$\sup_{\alpha} \sum_{\beta} |T_{\alpha, \beta}| \leq L(X), \quad \sup_{\beta} \sum_{\alpha} |T_{\alpha, \beta}| \leq R(X)$$

qui montre que T définit un opérateur borné dans $\ell^1(\Delta)$ et dans $\ell^\infty(\Delta)$, et donc dans $\ell^2(\Delta)$. L'unicité est évidente.

(b) découle du Lemme 14 (d) et des définitions de $\mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$ et $C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$ (cf. Proposition 3).

Ensuite, soit φ l'état sur $C_{\mathbb{Q}}$ défini par

$$(20) \quad \varphi(T) = \langle T\varepsilon_e, \varepsilon_e \rangle.$$

LEMME 16. φ est un état KMS₁ sur C relativement au groupe à un paramètre σ_t ,

$$\sigma_t(e_X) = k^{it} e_X, \quad k = \frac{R(X)}{L(X)}.$$

Preuve. Le produit des fonctions Γ_0 -bi-invariantes est donné par

$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} f_1(g_1) f_2(g_1^{-1}g).$$

On a

$$\begin{aligned} \varphi(f_1 * f_2) &= (f_1 * f_2)(e) = \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} f_1(g_1) f_2(g_1^{-1}) \\ \varphi(e_X * f) &= \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} e_X(g_1) f(g_1^{-1}) \\ \varphi(f * e_X) &= \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} f(g_2) e_X(g_2^{-1}). \end{aligned}$$

Soit $g \in \Gamma$ avec $X = \Gamma_0 g \Gamma_0$ une classe double fixe ; alors puisque f est Γ_0 -bi-invariante, les deux expressions ci-dessus sont des multiples de $f(g^{-1})$:

$$\varphi(e_X * f) = L(X) f(g^{-1}), \quad \varphi(f * e_X) = R(X) f(g^{-1}).$$

Ainsi $\varphi(e_X * f) = \frac{L(X)}{R(X)} \varphi(f * e_X)$. Cela montre que e_X est un vecteur propre du groupe modulaire d'automorphismes de l'état normal fidèle

$$T \rightarrow \langle T\varepsilon_e, \varepsilon_e \rangle$$

sur la fermeture faible C'' de C agissant dans $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$. Il découle alors de cela que φ est un état KMS₁ pour le groupe $\sigma_t = \sigma_{-t}$. Le vecteur $\varepsilon_e \in \ell^2(\Delta)$ est toujours séparateur pour la fermeture faible de $C_{\mathbb{Q}}$ parce qu'il est cyclique pour $P_{\mathbb{Q}}^+$ par la Proposition 12 (2). Le sous-espace \mathcal{H}_r de $\ell^2(\Delta)$ donné par

$$\mathcal{H}_r = \overline{C_{\mathbb{Q}}\varepsilon_e}$$

est dans le bicommutant de l'action de $P_{\mathbb{Q}}^+$ sur Δ et nous allons le calculer.

LEMME 17. Soit $\xi \in \ell^2(\Delta)$; alors $\xi \in \mathcal{H}_r$ ssi ξ est fixe par $\Gamma_0 \subset P_{\mathbb{Q}}^+$ agissant à gauche sur $\Delta = P_{\mathbb{Q}}^+/\Gamma_0$.

Preuve. Soit $\xi \in \mathcal{H}$ fixe par Γ_0 . Alors la fonction $f(g) = \langle \xi, \varepsilon_g \rangle, g \in \Gamma/\Gamma_0$ est Γ_0 -bi-invariante. Pour montrer que $\xi \in \mathcal{H}_r$, on peut assumer, en utilisant une décomposition orthogonale, que f est la fonction caractéristique d'une classe double, $f = e_X$. Nous obtenons comme ci-dessus que $e_X^* \varepsilon_e = \sum_{g \in F} g \varepsilon_e$ où $X = F\Gamma_0$, de telle manière que toutes les fonctions caractéristiques des classes doubles appartiennent à \mathcal{H}_r . Inversement, si $\xi \in \mathcal{H}_r$, et $\xi = T \varepsilon_e$ pour un opérateur T qui commute avec $P_{\mathbb{Q}}^+$, alors puisque T commute avec $\Gamma_0 \subset P_{\mathbb{Q}}^+$ et $g \varepsilon_e = \varepsilon_e \quad \forall g \in \Gamma_0$, on obtient que ξ reste fixe par Γ_0 .

4 Présentation de la C^* -algèbre $C_{\mathbb{Q}} = C_r^*(P_{\mathbb{Q}}^+, P_{\mathbb{Z}}^+)$

Considérons d'abord l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$ où $\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^+, \Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+$ sont définis comme ci-dessus. C'est une algèbre involutive sur \mathbb{C} avec une base linéaire e_X , indexée par les classes doubles $X \in \Gamma_0 \backslash \Gamma / \Gamma_0$. Nous utiliserons les notations suivantes :

- (α) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_n = n^{-1/2} e_{X_n}$ où X_n est la classe double de l'élément $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$ de $P_{\mathbb{Q}}^+$.
- (β) Pour $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $e(\gamma) = e_{X^\gamma}$ où X^γ est la classe double de l'élément $\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $P_{\mathbb{Q}}^+ / P_{\mathbb{Z}}^+$.

PROPOSITION 18. Les éléments $\mu_n, e(\gamma), n \in \mathbb{N}^*, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ engendrent l'algèbre involutive \mathcal{H} et les relations suivantes donnent une présentation de \mathcal{H} .

- (a) $\mu_n^* \mu_n = 1 \quad \forall n$
(b) $\mu_{nm} = \mu_n \mu_m \quad \forall n, m$
(c) $\mu_n \mu_m^* = \mu_m^* \mu_n \quad \text{si } (n, m) = 1$
(d) $e(\gamma)^* = e(-\gamma), e(\gamma_1 + \gamma_2) = e(\gamma_1) e(\gamma_2) \quad \forall \gamma, \gamma_1, \gamma_2$
(e) $e(\gamma) \mu_n = \mu_n e(n\gamma) \quad \forall n, \forall \gamma$
(f) $\mu_n e(\gamma) \mu_n^* = \frac{1}{n} \sum_{n\delta=\gamma} e(\delta) \quad \forall n, \forall \gamma.$

Preuve. Nous devons d'abord vérifier que les relations (a)-(f) sont respectées en utilisant les définitions du produit et de l'involution dans \mathcal{H} , c'est-à-dire que :

- (1)
$$f_1 * f_2(g) = \sum_{g_1 \in \Gamma / \Gamma_0} f_1(g_1) f_2(g_1^{-1}g)$$

(2)
$$f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la classe à droite $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \Gamma_0$ est déjà une classe double : X_n . Cela montre que pour toute fonction Γ_0 -bi-invariante $f \in \mathcal{H}$:

- (3)
$$n^{1/2}(\mu_n * f)(g) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{bmatrix} g\right) \quad \forall g \in \Gamma.$$

De façon similaire, la classe à droite $\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Gamma_0, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est déjà une classe double X^γ de telle sorte que

- (4)
$$(e(\gamma) * f)(g) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g\right) \quad \forall g \in \Gamma$$

et en utilisant l'égalité $\Gamma_0 \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = X^\gamma$,

- (5)
$$(f * e(\gamma))(g) = f\left(g \begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \quad \forall g \in \Gamma.$$

En utilisant (3), (4), (5), on prouve directement les relations (b), (d) et (e). La multiplication à gauche par μ_n^* est donnée par

- (6)
$$n^{1/2}(\mu_n^* * f)(g) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & n \end{bmatrix} g\right) \quad \forall g \in \Gamma$$

où la bi-invariance de f montre que $f\left(\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & n \end{bmatrix} g\right)$ dépend seulement de k modulo n , puisque

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k + nb \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

L'égalité (a) découle directement de (6). Soient n, m des entiers tels que $(n, m) = 1$; en utilisant (3), on obtient que la fonction bi-invariante $n^{1/2}m^{1/2}\mu_n * \mu_m^*$ est la fonction caractéristique des classes doubles $\Gamma_0 : \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{Z}/m \\ 0 & n/m \end{bmatrix}$. En utilisant (6), on obtient que

$$m^{1/2}\mu_m^* * \mu_n(g) = \sum_{k=0}^{m-1} \mu_n\left(\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & m \end{bmatrix} g\right).$$

Soit $g = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \in \Gamma$. Alors le $(k+1)$ -ième terme du côté droit s'évanouit à moins que $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & m \end{bmatrix} g \in \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & n \end{bmatrix}$ i.e. à moins que $\alpha = n/m, \beta + \frac{nk}{m} \in \mathbb{Z}$. Ainsi, le côté gauche s'évanouit à moins que $\beta \in \mathbb{Z}/m$ et est égal à $n^{-1/2}$ si $\beta \in \mathbb{Z}/m$ puisque, comme $(n, m) = 1$, seule une valeur de k contribuera à la somme. Cela prouve la relation (c). Pour prouver (f), on combine (3) et (4), ce qui donne

$$n^{1/2}(\mu_n * e(\gamma) * f)(g) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & -\gamma n^{-1} \\ 0 & n^{-1} \end{bmatrix} g\right) \quad \forall g \in \Gamma$$

que l'on applique à $f = \mu_n^*$. On a $f(g) = n^{1/2}$ si $g \in \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{Z}/n \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$ et $f(g) = 0$ sinon. Cela montre que $(\mu_n * e(\gamma) * \mu_n^*)(g)$ s'évanouit à moins que $g = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec

$$\begin{bmatrix} 1 & -\gamma n^{-1} \\ 0 & n^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{Z}/n \\ 0 & n^{-1} \end{bmatrix}$$

i.e. $n\beta = \gamma$ modulo n . Puisque cette équation a n solutions $\beta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on obtient (f).

Nous avons ainsi démontré les relations (a)-(f). Inversement, soit \mathcal{A} l'algèbre involutive engendrée par les éléments $(\mu_n), (e_\gamma)$ satisfaisant (a)-(f). Nous allons montrer que les monômes de la forme

$$t_{n,m,\gamma} = \mu_n e(\gamma) \mu_m^*, \quad n, m \in \mathbb{N}^*, (n, m) = 1, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

forment un ensemble de générateurs de l'espace vectoriel \mathcal{A} . Il suffit pour cela d'exprimer l'adjoint et les produits de tels monômes comme des éléments de leur enveloppe linéaire \mathcal{L} .

D'abord, si nous continuons en notant $t_{n,m,\gamma}$ l'expression $\mu_n e(\gamma) \mu_m^*$ quand n, m ne sont pas premiers entre eux mais s'ils sont tels que $(n, m) = q > 1$, nous pouvons écrire

$$t_{n,m,\gamma} = \mu_{n/q} \mu_q e(\gamma) \mu_q^* \mu_{m/q}^*$$

et utiliser (f) pour l'exprimer comme un élément de \mathcal{L} . Il est clair que $(t_{n,m,\gamma})^* = t_{m,n,-\gamma}$ de telle sorte que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$. Calculons maintenant le produit : $t_{n_1, m_1, \gamma_1} t_{n_2, m_2, \gamma_2}$. Soit $q = (m_1, n_2)$, alors $\mu_{m_1}^* \mu_{n_2} = \mu_{m_1/q}^* \mu_q^* \mu_q \mu_{n_2/q} = \mu_{m_1/q}^* \mu_{n_2/q} = \mu_{n_2/q} \mu_{m_1/q}^*$ en utilisant (a), (b), (c).

Ainsi $t_{n_1, m_1, \gamma_1} t_{n_2, m_2, \gamma_2} = \mu_{n_1} e(\gamma_1) \mu_{n_2/q} \mu_{m_1/q}^* e(\gamma_2) \mu_{m_2}^*$. En utilisant (e) et son adjoint, on obtient alors

$$t_{n_1, m_1, \gamma_1} t_{n_2, m_2, \gamma_2} = \mu_{n_1 n_2/q} e\left(\frac{n_2}{q} \gamma_1 + \frac{m_1}{q} \gamma_2\right) \mu_{m_1 m_2/q}^*$$

qui est un $t_{n, m, \gamma}$ avec (n, m) non nécessairement égal à 1 et peut être exprimé comme ci-dessus comme un élément de \mathcal{L} .

Nous avons montré que l'enveloppe linéaire \mathcal{L} des $t_{n, m, \gamma}$ est une algèbre involutive et ainsi que $\mathcal{L} = \mathcal{A}$. Dans l'algèbre \mathcal{H} , les $t_{n, m, \gamma}$ sont donnés par

$$(7) \quad t_{n, m, \gamma} = (nm)^{-1/2} e_X, \quad X = \text{classe double de } \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & n/m \end{bmatrix}.$$

Ainsi, ils sont linéairement indépendants dans \mathcal{H} et cela suffit pour conclure que (a)-(f) est une présentation de \mathcal{H} .

Il est crucial que la présentation de \mathcal{H} ci-dessus soit définie sur le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels, puisque cela permettra l'action naturelle du groupe de Galois G de l'extension cyclotomique \mathbb{Q}^{cycl} de \mathbb{Q} sur certaines représentations de \mathcal{H} que nous construirons plus tard en Section 6.

Un résultat similaire à la Proposition 18 est obtenu pour la C^* -algèbre $C_{\mathbb{Q}} = C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$ et du fait de la moyennabilité de $\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^+$, la nuance entre $C^*(\Gamma, \Gamma_0)$, la C^* -algèbre universelle engendrée par les (μ_n, e_γ) avec les relations ci-dessus, et $C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$ ne se lève pas. On a $C^*(\Gamma, \Gamma_0) = C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$.

PROPOSITION 19. *Soit π une représentation involutive de \mathcal{H} comme opérateur dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . Alors π s'étend uniquement par continuité à une représentation de $C_r^*(\Gamma, \Gamma_0) = C_{\mathbb{Q}}$.*

Preuve. Les relations (a) et (d) montrent que $\pi(\mu_n)$ est une isométrie et $\pi(e(\gamma))$ est unitaire. Ainsi on a

$$\|\pi(\mu_n e(\gamma) \mu_m^*)\| \leq 1 \quad \forall n, m, \gamma.$$

Cela montre que $\pi(f)$ est borné pour tout $f \in \mathcal{H}$, avec

$$\|\pi(f)\| \leq \|f\|_1$$

où

$$\|f\|_1 = \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_0} \delta(\gamma)^{-1/2} |f(\gamma)|, \quad \delta(\gamma) = \frac{L(\gamma)}{R(\gamma)}.$$

Il suit alors que l'égalité suivante définit une norme sur \mathcal{H} dont la complétion est une C^* -algèbre :

$$(8) \quad \|f\|_{\max} = \text{Sup}\{\|\pi(f)\| ; \pi \in \text{Rep}\mathcal{H}\}$$

où $\text{Rep}\mathcal{H}$ est la classe de toutes les représentations involutives de \mathcal{H} dans un espace de Hilbert séparable fixé.

Montrons que

$$(9) \quad \|f\|_{\max} = \|f\|_{C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)} \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

qui est une assertion de *moyennabilité* de la paire (Γ, Γ_0) . Prouvons d'abord (9) pour les éléments de l'anneau de groupes $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$, i.e. les combinaisons linéaires des $e_\gamma, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

En utilisant les représentations de \mathcal{H} dans $\ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)$, on a

$$(10) \quad \|f\|_{\max} \geq \|f\|_{C_r^*} \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Ainsi, nous avons seulement besoin de prouver l'autre inégalité. La moyennabilité du groupe \mathbb{Q}/\mathbb{Z} montre que

$$(11) \quad \|\pi(f)\| \leq \|f\|_{C_r^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \quad \forall f \in \mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$$

pour toute représentation unitaire π de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

Observons que dans la représentation de \mathcal{H} dans $\ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)$, la restriction à $\mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ définit une représentation fidèle de $C_r^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Par exemple, la restriction de l'action de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} à l'orbite de $\varepsilon_0 = \Gamma_0$, est isomorphe à la représentation régulière de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , d'où découle le résultat. Cela prouve (9) pour les éléments de $\mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ et nous autorise à voir $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ comme une C^* -sous-algèbre de la C^* -complétion $C^*(\Gamma, \Gamma_0)$ de \mathcal{H} pour la norme (8). Identifions le dual du groupe \mathbb{Q}/\mathbb{Z} avec le groupe additif $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ en utilisant l'égalité $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathcal{A}/\mathcal{R}$ et l'identification du groupe additif \mathcal{A} avec son dual de Pontrjagin. Considérons maintenant le groupoïde localement compact \mathcal{G} défini comme suit. Puisque l'espace localement compact \mathcal{G} est le sous-ensemble suivant de $\mathcal{R} \times \mathbb{Q}_+^*$,

$$(12) \quad \mathcal{G} = \{(b, a) \in \mathcal{R} \times \mathbb{Q}_+^* ; ab \in \mathcal{R}\}$$

qui peut être identifié à une union dénombrable d'ensembles ouverts et fermés de \mathcal{R} .

On a $\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{R} \times 1 = \mathcal{R}$ et les applications image et antécédent sont

$$(13) \quad r(b, a) = ab, \quad s(b, a) = b$$

tandis que la composition est donnée par

$$(14) \quad (b_1, a_1) \circ (b_2, a_2) = (b_2, a_1 a_2).$$

Par construction, les fibres \mathcal{G}^x et $\mathcal{G}_x, x \in \mathcal{R}$ de r et s sont des ensembles discrets dénombrables et les C^* -algèbres $C^*(\mathcal{G})$ et $C_r^*(\mathcal{G})$ de ce groupoïde localement compact font bien sens. Ce sont les complétions de l'algèbre de convolution $C_c(\mathcal{G})$ des fonctions continues à support compact sur \mathcal{G} ,

$$(15) \quad (f_1 * f_2)(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} f_1(\gamma_1) f_2(\gamma_2)$$

$$(16) \quad f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$$

sous les normes respectives suivantes :

$$(17) \quad \|f\|_{\max} = \sup\{\|\pi(f)\| ; \pi \in \text{Rep } \mathcal{G}\}$$

$$(18) \quad \|f\|_r = \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \|\lambda_x(f)\|$$

où λ_x est la représentation régulière à gauche de f dans $\ell^2(\mathcal{G}^x)$ donnée par :

$$(19) \quad (\lambda_x(f)\xi)(\gamma) = \sum_{r(\gamma_1)=x} f(\gamma_1)\xi(\gamma_1^{-1}\gamma).$$

Maintenant, puisque le groupe \mathbb{Q}_+^* est moyennable, il s'ensuit que le groupoïde localement compact \mathcal{G} est moyennable au sens de [Ren], de telle façon que les normes (17) et (18) coïncident.

Maintenant, étant donnée une représentation π de \mathcal{H} , nous obtenons une représentation $\tilde{\pi}$ de $C_c(\mathcal{G})$ comme suit. Nous identifions \mathcal{H} avec une sous-algèbre de $C_c(\mathcal{G})$ en vérifiant que les éléments suivants $\tilde{e}(\gamma), \tilde{\mu}_n$ de $C_c(\mathcal{G})$ satisfont la présentation de la Proposition 18,

$$(20) \quad \begin{aligned} \tilde{e}(\gamma)(b, a) &= 0 && \text{à moins que } a = 1, \\ \tilde{e}(\gamma)(b, 1) &= \langle b, \gamma \rangle \end{aligned}$$

(où $\langle b, \gamma \rangle$ est l'appariement entre \mathcal{R} et \mathbb{Q}/\mathbb{Z} donné par la dualité de Pontrjagin des groupes abéliens)

$$(21) \quad \tilde{\mu}_n(b, a) = 0 \text{ à moins que } a = n^{-1}; \quad \tilde{\mu}_n(b, n^{-1}) = 1 \quad \forall b \in \mathcal{R}.$$

On vérifie directement les relations (a)-(f) de la présentation de \mathcal{H} en utilisant en particulier l'égalité

$$(22) \quad \langle n\gamma, b \rangle = \langle \gamma, nb \rangle \quad \forall \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \forall b \in \mathcal{R} \text{ tel que } nb \in \mathcal{R}.$$

Alors soit π une représentation involutive de \mathcal{H} . Nous avons montré ci-dessus que la restriction de π à l'anneau de groupes de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} s'étend à une représentation de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C_r^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Il découle alors de cela, en utilisant $\tilde{\mu}_n$ qui, avec $C(\mathcal{R})$, engendre $C_c(\mathcal{G})$, que π s'étend à une représentation $\tilde{\pi}$ de l'algèbre de convolution $C_c(\mathcal{G})$ du groupoïde localement compact \mathcal{G} . La moyennabilité de \mathcal{G} amène alors

$$(23) \quad \|\pi(f)\| \leq \sup_{x \in \mathcal{R}} \|\lambda_x(\tilde{f})\| \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

L'homomorphisme $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{Q}_+^*$, $h(b, a) = a$, amène pour chaque $x \in \mathcal{R}$, une injection de \mathcal{G}^x dans \mathbb{Q}_+^* qui nous autorise à considérer le corps continu d'espaces de Hilbert $\ell^2(\mathcal{G}^x)$, $x \in \mathcal{R}$ comme un sous-corps du corps des constantes avec comme fibre $\ell^2(\mathbb{Q}_+^*)$. Pour tout $f \in \mathcal{H}$, l'application $x \rightarrow \lambda_x(\tilde{f})$ est alors fortement continue avec des valeurs dans $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Q}_+^*))$. Cela peut être vérifié directement pour les $\tilde{\mu}_n$ et pour les éléments de $C(\mathcal{R})$.

Il s'ensuit que pour toute $f \in \mathcal{H}$, la fonction sur \mathcal{R} , définie par $x \rightarrow \|\lambda_x(\tilde{f})\|$, est semi-continue par le bas dans le sens où $\{x ; \|\lambda_x(\tilde{f})\| > \alpha\}$ est un ensemble ouvert pour tout α . Ainsi

$$(24) \quad \sup_{x \in \mathcal{R}} \|\lambda_x(\tilde{f})\| = \text{Ess Sup}_{x \in \mathcal{R}} \|\lambda_x(\tilde{f})\|$$

et le côté droit est égal à $\|f\|_{C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)}$ de telle façon que l'égalité (9) en découle.

5 Action de $W \times \mathbb{R}$ sur la C^* -algèbre $C_{\mathbb{Q}}$

Soit $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ l'action de \mathbb{R} sur la C^* -algèbre $C_{\mathbb{Q}} = C^*(P_{\mathbb{Q}}^+, P_{\mathbb{Z}}^+)$ définie dans la proposition 4. En fonction des classes doubles X dans $\Gamma_0 \backslash \Gamma / \Gamma_0$, $\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^+$, $\Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+$, on a

$$\sigma_t(e_X) = k^{-it} e_X, \quad k = \frac{R(X)}{L(X)}$$

et pour la classe double de $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in P_{\mathbb{Q}}^+$, on a

$$(1) \quad k = a.$$

Par rapport à la présentation de $C_{\mathbb{Q}}$ (Proposition 18), on a

$$(2) \quad \sigma_t(\mu_n) = n^{it}\mu_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma_t(e(\gamma)) = e(\gamma)$$

quelque soit $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et quelque soit $t \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION 20.

- (a) La C^* -sous-algèbre de $C_{\mathbb{Q}}$ donnée par les points fixes de σ , $C_{\mathbb{Q}}^{\sigma} = \{x \in C_{\mathbb{Q}}; \sigma_t(x) = x, \forall t \in \mathbb{R}\}$ est l'image de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ par l'isomorphisme associé à l'homomorphisme $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow e(\gamma) \in C_{\mathbb{Q}}$.
- (b) Le centralisateur de l'état φ sur $C_{\mathbb{Q}}$ donné par le Lemme 16 est égal à $C_{\mathbb{Q}}^{\sigma} = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Preuve. (a) Par construction, $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_{\mathbb{Q}}^{\sigma}$. L'action σ de \mathbb{R} sur $C_{\mathbb{Q}}$ est presque-périodique et diagonale dans la base linéaire (e_X) de \mathcal{H} . La projection P sur les points fixes de σ , donnée par la moyenne presque-périodique des σ_t est l'identité sur les classes doubles $e_{X\gamma}, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et elle s'évanouit, $P(e_X) = 0$, sur les classes doubles de tout $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, a \neq 1$. La conclusion en découle puisque \mathcal{H} est dense sur $C_{\mathbb{Q}}$ et P est de norme continue.

(b) découle de (a) et du Lemme 16.

Nous allons maintenant définir une action naturelle par les automorphismes de $C_{\mathbb{Q}}$, du groupe des classes d'idèles $W = \mathcal{A}^*/\mathbb{Q}_+^*$. Rappelons d'abord que nous avons obtenu $C_{\mathbb{Q}}$ dans la Proposition 15 du commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ dans $\ell^2(\Delta)$ où $\Delta = P_{\mathcal{A}}/P_{\mathcal{R}} = P_{\mathbb{Q}}^+/P_{\mathbb{Z}}^+$. Montrons que $W = \mathcal{A}^*/\mathbb{Q}_+^*$ agit de façon naturelle sur le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ dans $\ell^2(\Delta)$. Le groupe $P_{\mathcal{A}}$ agit sur Δ et sur $\ell^2(\Delta)$ et ainsi le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ est le même que le commutant de sa fermeture $\overline{P_{\mathbb{Q}}^+}$ dans $P_{\mathcal{A}}$. On a (cf. Proposition 12) $\overline{P_{\mathbb{Q}}^+} = \mathcal{A} \rtimes \mathbb{Q}_+^*$ qui est un *sous-groupe normal* de $P_{\mathcal{A}}$. Ainsi le groupe quotient

$$(3) \quad W = \mathcal{A}^*/\mathbb{Q}_+^* = P_{\mathcal{A}}/\overline{P_{\mathbb{Q}}^+}$$

agit naturellement sur le commutant $P_{\mathbb{Q}}^{+'}$ de $P_{\mathbb{Q}}^+$ dans $\ell^2(\Delta)$, par

$$(4) \quad \theta_u(x) = uxu^* \quad \forall x \in P_{\mathbb{Q}}^{+'}, \quad \forall u \in W.$$

(Le choix du représentant $u \in P_{\mathcal{A}}$ de la classe de u est sans importance). Cela définit une action fortement continue du groupe compact W sur l'algèbre de von Neumann $P_{\mathbb{Q}}^{+'}$.

PROPOSITION 21.

- (a) L'action θ de W sur $P_{\mathbb{Q}}^{+'}$ laisse la C^* -sous-algèbre dense globalement invariante et est de norme ponctuelle continue (elle converge simplement en norme) sur $C_{\mathbb{Q}}$.
- (b) La sous-algèbre point fixe $C_{\mathbb{Q}}^W$ est la C^* -algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ engendrée par les $\mu_n \in C_{\mathbb{Q}}$.
- (c) L'action de W sur $C_{\mathbb{Q}}$ préserve l'état φ et commute avec l'action $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Preuve. Montrons d'abord que μ_n , i.e. la convolution à droite $r(f)$ dans $\ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$ par $f = n^{-1/2}e_{X_n}$, appartient non seulement au commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ (Proposition 15) mais également au commutant de $P_{\mathcal{A}}$. Par construction, on a

$$(5) \quad \langle \mu_n^* \varepsilon_e, g \varepsilon_e \rangle = f(g) = n^{-1/2} e_{X_n}(g) \quad \forall g \in \Gamma$$

et puisque les $g \varepsilon_e$, $g \in \Gamma/\Gamma_0$ forment une base de $\ell^2(\Delta)$, nous obtenons

$$(6) \quad \mu_n^* \varepsilon_e = n^{-1/2} g_n \varepsilon_e, \quad g_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \in \Gamma.$$

Supposons que $n = p$ est un nombre premier et montrons que $p^{1/2} \mu_p^*$ coïncide avec l'opérateur dans $\ell^2(\Delta) = \bigotimes_q (\ell^2(T_q), *)$ donné par $\tilde{t}_p = 1 \otimes t_p \otimes 1 \otimes \dots$, où t_p est la translation hyperbolique d'une unité de longueur vers le point à l' ∞ dans l'arbre T_p de la Proposition 12.

Notons que cette translation hyperbolique est exactement p vers un de telle façon que $p^{-1/2} t_p$ est une co-isométrie sur $\ell^2(T_p)$. Maintenant, on a à la fois μ_p^* et t_p qui commutent avec l'action de $P_{\mathbb{Q}}^+$ sur $\ell^2(\Delta)$, et ε_e est cyclique pour $P_{\mathbb{Q}}^+$. Ainsi l'égalité

$$p^{1/2} \mu_p^* \varepsilon_e = \tilde{t}_p \varepsilon_e$$

implique l'égalité des opérateurs

$$(7) \quad \mu_p^* = p^{-1/2} \tilde{t}_p.$$

Puisque \tilde{t}_p appartient au commutant de $P_{\mathcal{A}}$, par construction, on obtient ainsi que $\mu_p \in (P_{\mathcal{A}})'$ et

$$(8) \quad \theta_u(\mu_n) = \mu_n \quad \forall u \in W, n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour prouver 21 (a), nous avons seulement besoin de montrer que l'action θ de W laisse la C^* -sous-algèbre $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$ de $C_{\mathbb{Q}}$ globalement invariante et qu'elle est de norme ponctuelle continue sur $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Cela va découler de l'assertion plus précise suivante :

LEMME 22. *Soit $f \in C(\mathcal{R}) = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_{\mathbb{Q}}$. Alors*

$$\theta_u(f)(b) = f(ub) \quad \forall b \in \mathcal{R}, u \in \mathcal{R}^* = W.$$

Preuve. Considérons (cf. [We₂] p. 257) la décomposition en produit direct :

$$\mathcal{A}^* = \mathbb{Q}_+^* \times \left(\prod_p \mathbb{Z}_p^* \right) = \mathbb{Q}_+^* \times \mathcal{R}^*$$

où le morphisme $r : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbb{Q}_+^*$ est donné par

$$r(z) = \prod_p |z_p|_p^{-1} = \prod_p p^{\text{val}(z_p)}$$

Par construction, r est l'identité sur \mathbb{Q}_+^* et son noyau est $\prod_p \mathbb{Z}_p^* = \mathcal{R}^*$; ainsi, r est la projection sur le premier terme de cette décomposition comme un produit. Nous utilisons la seconde projection pour identifier W et \mathcal{R}^* .

L'égalité des groupes abéliens $\mathcal{A}/\mathcal{R} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ montre que la multiplication par un élément $u \in \mathcal{R}^*$ définit un automorphisme m_u de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} et pour prouver le Lemme 22, on a juste à montrer que pour tout $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on a

$$(9) \quad \theta_u(e(\gamma)) = e(m_{u^{-1}}\gamma) \quad \forall u \in \mathcal{R}^*$$

Puisque ε_e est séparateur pour $P_{\mathbb{Q}}^{+'}$, il suffit de vérifier que $\theta_u(e(\gamma)) \varepsilon_e = e(m_{u^{-1}}\gamma) \varepsilon_e$, i.e. que

$$(10) \quad u e(\gamma) u^* \varepsilon_e = e(m_{u^{-1}}\gamma) \varepsilon_e.$$

Puisque ε_e est laissé fixe par $P_{\mathcal{R}} \subset P_{\mathcal{A}}$, il est fixe par l'action de $u^* \in \mathcal{R}^* \subset P_{\mathcal{R}}$. De plus, pour tout $\delta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, l'action de $e(\delta)$ sur ε_e donne simplement $\begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon_e$. Ainsi (10) découle de l'égalité

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta u^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cela complète la preuve du Lemme 22 et de la Proposition 21 (a). Pour prouver la Proposition 21 (c), noter que l'action de \mathcal{R}^* dans $\ell^2(\Delta)$ fixe le vecteur ε_e , ce qui prouve que l'action de W sur $C_{\mathbb{Q}}$ préserve l'état φ . Il commute trivialement avec σ_t dans tous les cas. Prouvons la Proposition 21 (b). Puisque W est un groupe compact, nous pouvons considérer la projection naturelle E de $C_{\mathbb{Q}}$ sur $C_{\mathbb{Q}}^W$ donnée par

$$(11) \quad E(x) = \int_W \theta_u(x) du$$

Par construction, E est de norme continue et satisfait

$$(12) \quad E(axb) = a E(x) b \quad \forall x \in C_{\mathbb{Q}}, a, b \in C_{\mathbb{Q}}^W.$$

Puisque par (8), on a $C^*(\mathbb{N}^*) \subset C_{\mathbb{Q}}^W$, il suffit d'utiliser la base linéaire $\mu_n e(\gamma) \mu_m^*$ de \mathcal{H} , pour montrer que

$$(13) \quad E(e(\gamma)) \in C^*(\mathbb{N}^*) \quad \forall \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

pour conclure que $C^*(\mathbb{N}^*) = C_{\mathbb{Q}}^W$.

Finalement, pour prouver (13), noter que $E(e(\gamma)) \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$ est donné par une fonction $f \in C(\mathcal{R})$ telle que

$$(14) \quad f(ub) = f(b) \quad \forall u \in \mathcal{R}^*, \forall b \in \mathcal{R}.$$

Cette égalité définit une C^* -sous-algèbre de $C(\mathcal{R}) = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} C(\mathcal{R}_p)$, qui est identique à $C^*(\mathbb{N}^*) \cap C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Cela peut se voir localement en montrant que

$$(15) \quad f \in C(\mathcal{R}_p), f(ub) = f(b) \quad \forall u \in \mathcal{R}_p^*, b \in \mathcal{R}_p$$

implique que f est une fonction de $|\cdot|_p$.

6 Classification des états KMS_β pour $\beta > 1$

Nous allons d'abord construire des représentations involutives π_α de l'algèbre de Hecke \mathcal{H} étiquetées par le groupe de Galois $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}}/\mathbb{Q})$ du sous-corps \mathbb{Q}^{cycl} de \mathbb{C} engendré par toutes les racines de l'unité.

Soit \mathcal{H} l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}^*)$, avec sa base orthonormale canonique $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

PROPOSITION 23. Les égalités suivantes définissent une représentation involutive π_1 de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$ dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$,

$$(\alpha) \quad \pi_1(\mu_n) \varepsilon_k = \varepsilon_{nk} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}^*$$

$$(\beta) \quad \pi_1(e(\gamma)) \varepsilon_k = \exp(2\pi i k \gamma) \varepsilon_k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Preuve. Nous avons juste besoin de vérifier que les relations (a)-(f) sont respectées par les opérateurs $\mu'_n = \pi_1(\mu_n)$ et $e'(\gamma) = \pi_1(e(\gamma))$ définis par $(\alpha), (\beta)$. Puisque l'application $k \rightarrow nk$ de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* est injective, la relation (a) est vérifiée et de plus, l'adjoint $\mu_n'^*$ est donné par

$$(1) \quad \mu_n'^* \varepsilon_k = \varepsilon_{k/n} \quad \text{si } n|k \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

La relation (b) est évidente. Pour vérifier (c), noter que si $(n, m) = 1$, alors $m|k \iff m|nk$ et quand on l'applique à ε_k , à la fois $\mu'_n \mu_m'^*$ et $\mu_m'^* \mu'_n$ s'évanouissent ou sont égaux à $\varepsilon_{nk/m}$. La relation (d) est évidente ainsi que (e),

$$(2) \quad e'(\gamma) \mu'_n \varepsilon_k = e'(\gamma) \varepsilon_{nk} = \exp 2\pi i (nk\gamma) \varepsilon_{nk} = \mu'_n e'(n\gamma) \varepsilon_k.$$

Vérifions (f). Les deux côtés appliqués à ε_k s'évanouissent à moins que $n|k$. C'est clair pour le côté gauche par (1), et c'est vrai pour le côté droit parce qu'il est de la forme

$$e'(\delta_0) \frac{1}{n} \sum_{n\delta=0} e'(\delta), \quad n\delta_0 = \gamma$$

et $\sum_{n\delta=0} e'(\delta) \varepsilon_k = 0$ à moins que $n|k$. Ensuite, quand $n|k$ de telle façon que $k = qn$, on a :

$$\begin{aligned} \mu'_n e'(\gamma) \mu_n'^* \varepsilon_k &= \exp(2\pi i q\gamma) \varepsilon_k \\ e'(\delta_0) \varepsilon_k &= \exp(2\pi i k \delta_0) \varepsilon_k = \exp(2\pi i q\gamma) \varepsilon_k \end{aligned}$$

pour tout $\delta_0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tel que $n\delta_0 = \gamma$.

PROPOSITION 24.

(1) Pour $\alpha \in G = \text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}}/\mathbb{Q})$, les égalités suivantes définissent une représentation involutive π_α de \mathcal{H} dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$:

$$(\alpha) \quad \pi_\alpha(\mu_n) \varepsilon_k = \varepsilon_{nk} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}^*$$

$$(\beta) \quad \pi_\alpha(e(\gamma)) \varepsilon_k = \alpha(\exp 2\pi i k \gamma) \varepsilon_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(2) Pour tout élément $x \in \mathcal{H}(\mathbb{Q})$ de la \mathbb{Q} algèbre engendrée par les μ_n et les $e(\gamma)$, les éléments de la matrice $\pi_\alpha(x)$ satisfont

$$\langle \pi_\alpha(x) \varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_2} \rangle = \alpha \langle \pi_1(x) \varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_2} \rangle \quad \forall k_j.$$

Preuve. (1) La preuve ci-dessus de la Proposition 23 marche sans changement. Le seul point important est de vérifier (d), notamment que $\pi_\alpha(e(\gamma))^* = \pi_\alpha(e(-\gamma))$. Cela est vrai car la conjugaison complexe $z \rightarrow \bar{z}$ commute avec tout $\alpha \in G$.

(2) Par construction, les éléments de la matrice des π_α des générateurs satisfont la relation souhaitée qui est stable par les opérations algébriques sur des matrices n'impliquant que des sommes finies de produits.

Définissons H comme l'opérateur positif dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ correspondant à l'évolution temporelle décrite dans la Section 2, notamment

$$(3) \quad H_{\varepsilon_n} = (\log n) \varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nous avons déjà vu dans la Section 2 que

$$(4) \quad e^{itH} x e^{-itH} = \sigma_t(x) \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Puisqu'il est évident que H commute avec $\pi_\alpha(y)$ pour tout $y \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_{\mathbb{Q}}$, nous obtenons alors

$$(5) \quad e^{itH} \pi_\alpha(x) e^{-itH} = \pi_\alpha(\sigma_t(x)) \quad \forall x \in C_{\mathbb{Q}}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le :

THÉORÈME 25. Soit $\tilde{\pi}_\alpha$ l'extension canonique de la représentation π_α de \mathcal{H} à la C^* -algèbre $C_{\mathbb{Q}}$, et soit $\beta > 1$.

(a) L'égalité suivante définit un état KMS_β sur $(C_{\mathbb{Q}}, \sigma_t)$:

$$\varphi_{\beta, \alpha}(x) = \zeta(\beta)^{-1} \text{Trace}(\tilde{\pi}_\alpha(x) e^{-\beta H}) \quad \forall x \in C_{\mathbb{Q}}.$$

(b) L'application $\alpha \rightarrow \varphi_{\beta, \alpha}$ est un homomorphisme du groupe de Galois G de \mathbb{Q}^{cycl} avec l'espace des points extrêmes du simplexe de Choquet des états KMS_β sur $(C_{\mathbb{Q}}, \sigma_t)$.

Preuve. (a) D'abord, par la Proposition 19, nous savons que la représentation π_α s'étend à une représentation de $C_{\mathbb{Q}}$ et l'égalité (5) avec la finitude de $\text{Trace}(e^{-\beta H}) = \zeta(\beta)$ donne (a).

(b) Fixons $\beta > 1$ et montrons d'abord que l'application $\alpha \rightarrow \varphi_{\beta, \alpha}$ est injective.

Pour montrer cela, noter que chacune des représentations π_α de $C_{\mathbb{Q}}$ est irréductible et par construction, chaque $\varphi_{\beta, \alpha}$ est un facteur d'état de type I_∞ . Aussi sa construction GNS détermine canoniquement l'opérateur positif H , $0 \in \text{Sp}H$, comme un opérateur non-borné associé à la fermeture faible de $C_{\mathbb{Q}}$: en particulier, $\varphi_{\beta, \alpha}$ détermine canoniquement l'état à température 0,

$$(6) \quad \varphi_{\infty, \alpha}(x) = \langle \pi_\alpha(x) \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle.$$

Quand on restreint cet état $\varphi_{\infty, \alpha}$ à l'anneau de groupes $\mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} à coefficients rationnels, on trouve le plongement du corps \mathbb{Q}^{cycl} des racines de l'unité dans \mathbb{C} :

$$(7) \quad \varphi_{\infty, \alpha}\left(\sum \lambda_j \gamma_j\right) = \alpha\left(\sum \lambda_j \exp(2\pi i \gamma_j)\right)$$

qui bien sûr détermine $\alpha \in G$ de manière unique.

Ensuite, chaque $\varphi_{\beta,\alpha}$ est un facteur d'état et ainsi, est un point extrême de l'ensemble convexe faiblement compact K_β d'états KMS_β . Soit $\mathcal{E}(K_\beta)$ l'espace des points extrêmes de K_β . Nous avons montré que l'application $\alpha \rightarrow \varphi_{\beta,\alpha}$ est une injection de G dans $\mathcal{E}(K_\beta)$.

Cette application est faiblement continue puisque, comme $\beta > 1$, la série $\sum \alpha(\exp 2\pi i k \gamma) k^{-\beta}$ est uniformément convergente. Il reste à montrer que cette application est surjective. Noter d'abord que pour tout élément u de W , il existe un élément correspondant $\alpha(u)$ de G tel que

$$(8) \quad \varphi_{\beta,1} \circ \theta_u = \varphi_{\beta,\alpha(u)}$$

et l'application $u \rightarrow \alpha(u)$ est un isomorphisme entre W et G . Ensuite, il existe sur $C_\mathbb{Q}$ un unique état KMS_β qui est W -invariant. Cela est vrai pour toute valeur $\beta \in]0, \infty[$ et cela découle de la Proposition 21 (b) et de la Proposition 8 (a). En effet, étant donné un tel état φ , on a $\varphi = \varphi \circ E$ où E est la projection $E = \int_W \theta_u du$ φ de $C_\mathbb{Q}$ sur $C_\mathbb{Q}^W$ et la restriction de φ à $C_\mathbb{Q}^W = C^*(\mathbb{N}^*)$ est unique. Alors soit ψ est un état KMS_β ; on a

$$(9) \quad \int_W \psi \circ \theta_u du = \int_W \varphi_{\beta,\alpha(u)} du$$

puisque les deux côtés sont des états KMS_β W -invariants. Maintenant, si $\psi \in \mathcal{E}(K_\beta)$ est un point extrême, cette égalité (9) donne deux décompositions du même état comme barycentre des mesures sur $\mathcal{E}(K_\beta)$, qui est un simplexe de Choquet (Proposition 2), de telle sorte que

$$(10) \quad \psi \circ \theta_u \in \{\varphi_{\beta,\alpha(v)} ; v \in W\} \quad \text{pour presque tout } u.$$

Finalement, cela implique que $\psi = \varphi_{\beta,\alpha(v)} \circ \theta_u^{-1}$ pour un $u, v \in W$ et ψ est dans l'image de l'application $\alpha \rightarrow \varphi_{\beta,\alpha}$. Puisque l'application $\alpha \rightarrow \varphi_{\beta,\alpha}$ est continue et bijective et puisque G est compact, il est homéomorphe à son image $\mathcal{E}(K_\beta)$ et cela prouve le Théorème 25.

REMARQUES 26.

- (1) Nous donnerons dans la section prochaine la formule générale (pour toutes les valeurs de β) pour l'état KMS_β W -invariant φ_β sur $C_\mathbb{Q}$, mais nous pouvons trouver la formule pour $\beta > 1$ d'ores et déjà en utilisant l'égalité (9). D'abord, en utilisant la base linéaire $(t_{n,m,\gamma})$ de $H \subset C_\mathbb{Q}$ décrite dans la Section 4, on a

$$(11) \quad \varphi(t_{n,m,\gamma}) = 0 \text{ si } n/m \neq 1 \quad \forall \varphi \in K_\beta.$$

Ainsi, cela suffit pour déterminer la restriction de φ_β à $C_\mathbb{Q}$. Pour cela, on peut par exemple utiliser le côté droit de (9) et la formule du Théorème 25 (a) pour $\varphi_{\beta,\alpha}$. Soit $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a

$$(12) \quad \int_G \alpha(\exp 2\pi i n \gamma) d\alpha = \frac{\mu(b/d)}{\varphi(b/d)}$$

où $\gamma = \frac{a}{b}$, $(a, b) = 1$ et $(n, b) = d$ est le p.g.c.d de n et b . De plus, μ est la fonction de Moebius et φ est l'indicateur d'Euler. Définissons ρ_β comme la fonction multiplicative telle que

$$(13) \quad \sum_{(n,b)=1} n^{-\beta} = \rho_\beta(b) \zeta(\beta).$$

On a $\rho_\beta(b) = \prod_{p|b, p \text{ premier}} (1 - p^{-\beta})$.

L'unique état KMS_β W -invariant, donné par (9) satisfait

$$(14) \quad \varphi_\beta(e(\gamma)) = \sum_{d|b} \frac{\mu(b/d)}{\varphi(b/d)} \rho_\beta(b/d) d^{-\beta}$$

où b est le dénominateur de la fraction irréductible $\gamma = \frac{a}{b}$. Le côté droit de (14) est une fonction multiplicative de b et il est aussi donné par

$$(15) \quad \varphi_\beta(e(\gamma)) = b^{-\beta} \prod_{p|b, p \text{ premier}} (1 - p^{\beta-1})(1 - p^{-1})^{-1}$$

comme cela peut être constaté en calculant le côté droit de (14) quand b est une puissance de premier. Nous donnerons une autre preuve de (15) dans la prochaine section.

- (2) L'énoncé du Théorème 25 (b) s'applique aussi aux états à température 0 notés $\varphi_{\infty, \alpha}$. Pour de tels états extrêmes, l'application $\varphi_{\infty, \alpha}$ restreinte à $\mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \subset C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ donne l'appariement associé au corps \mathbb{Q}^{cycl} des racines de l'unité dans \mathbb{C} , comme nous l'avons vu plus haut.
- (3) Le Théorème 25 montre que la fonction de partition du système C^* -dynamique $(C_{\mathbb{Q}}, \sigma_t)$ est la fonction zêta de Riemann.

7 Unicité des états KMS_β pour $\beta \in]0, 1]$

Dans cette section, nous allons montrer que pour $\beta \in]0, 1]$, il existe un unique état KMS_β sur la C^* -algèbre $C_{\mathbb{Q}}$. Nous avons vu dans la Section 5, Proposition 21, que la C^* -sous-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*) \subset C_{\mathbb{Q}}$ engendrée par les μ_n est l'algèbre point fixe de l'action de W sur $C_{\mathbb{Q}}$:

$$(1) \quad C^*(\mathbb{N}^*) = C_{\mathbb{Q}}^W$$

Puisque W est un groupe abélien compact, son action sur $C_{\mathbb{Q}}$ a un spectre discret, et nous pouvons considérer pour chaque caractère χ de W le sous-espace spectral correspondant (cf. [Ped]),

$$(2) \quad C_{\mathbb{Q}, \chi} = \{x \in C_{\mathbb{Q}} ; \theta_u(x) = \chi(u) x \quad \forall u \in W\}$$

Pour prouver l'unicité des états KMS_β sur $C_{\mathbb{Q}}$ pour $0 < \beta \leq 1$, nous allons analyser les automorphismes partiels des facteurs de type III_1 associés à $(C^*(\mathbb{N}^*), \varphi_\beta)$ et à un caractère non trivial fixe χ de W .

Nous montrerons que ces automorphismes partiels sont extérieurs. Étant donné un élément V de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$ (resp. un caractère χ de W), nous dirons que V (resp. χ) est localisé dans un sous-ensemble F de \mathcal{P} , l'ensemble des places finies de \mathbb{Q} , ssi

$$(3) \quad V \in (\otimes_{p \in F} C(R_p)) \otimes 1 \subset C(\mathcal{R})$$

(resp. si χ , vu comme un caractère de \mathcal{A}^* , se factorise à travers la projection $W \rightarrow \prod_{p \in F} \mathbb{Q}_p^*$).

Énonçons le lemme principal.

LEMME 27. Soient $\beta \in]0, 1]$ et ψ un état KMS_β sur le système C^* -dynamique $(C_{\mathbb{Q}}, \sigma_t)$. Alors :

- (a) La restriction de ψ à $C^*(\mathbb{N}^*)$ est égale à φ_β .
- (b) Soit χ un caractère non trivial de W et $V \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ une isométrie partielle tous deux localisés dans un ensemble fini $F \subset \mathcal{P}$, tels que

$$\theta_g(V) = \chi(g)V \quad \forall g \in W.$$

Alors $\psi(Vx) = 0 \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)$.

- (c) La restriction de ψ aux sous-espaces spectraux $C_{\mathbb{Q}, \chi, \chi \neq 1}$ est égale à 0.

Preuve. (a) Puisque la restriction de σ_t à $C^*(\mathbb{N}^*)$ est le groupe à un paramètre d'automorphismes de la Proposition 8, la restriction de ψ à $C^*(\mathbb{N}^*)$ est un état KMS_β et la conclusion découle de la Proposition 8 (a).

(b) Soit $E = V^*V$. Comme $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est commutatif, on a $E = VV^*$; aussi E appartient à l'algèbre $C_{\mathbb{Q}}^W = C^*(\mathbb{N}^*)$. Soit α l'automorphisme de l'algèbre réduite $C^*(\mathbb{N}^*)_E$ déterminé par l'égalité

$$(4) \quad \alpha(x) = V x V^* \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)_E.$$

Soit M le facteur (de type III₁) qui est la fermeture faible de $C^*(\mathbb{N}^*)$ dans la représentation G.N.S. de φ_β . Identifions $C^*(\mathbb{N}^*)$ avec une sous-algèbre faiblement dense de M et étendons l'état φ_β à un état normal $\tilde{\varphi}_\beta$ sur M . Puisque V appartient à l'algèbre point fixe de σ_t , il appartient au centralisateur de ψ . Il suit de là que l'automorphisme α de $C^*(\mathbb{N}^*)_E$ préserve $\tilde{\varphi}_\beta$ et s'étend à un automorphisme de M_E . Montrons que pour $\beta \in]0, 1]$, cet automorphisme est extérieur. Pour tout $q \in \mathcal{P} \setminus F$, on a

$$(5) \quad E\mu_q \in M_E, \quad \alpha(E\mu_q) = \chi(g_q) E \mu_q$$

où $g_q \in \mathcal{R}^* = \prod \mathbb{Z}_p^*$ est donné par ses composants

$$(6) \quad (g_q)_p = q \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}_p^* \quad \text{si } q \neq p, (g_q)_q = 1.$$

Pour prouver (5), notons que pour tout $f \in C(\mathcal{R}) = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a (cf. Proposition 18 (e))

$$(7) \quad f\mu_n = \mu_n f_n, \quad \text{où } f_n(b) = f(nb) \quad \forall b \in \mathcal{R}.$$

Ainsi, si f est localisé dans $F \subset \mathcal{P}$ et $q \notin F$, on obtient $\theta_{g_q}(f) = f_q$,

$$(8) \quad f \mu_q = \mu_q \theta_{g_q}(f).$$

En appliquant cela à $f = V$, on obtient $V\mu_q = \chi(g_q) \mu_q V$, i.e. on obtient (5). Voyons χ comme un caractère de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ où les facteurs premiers de m appartiennent tous à F . Alors nous pouvons simplement écrire $\chi(q)$ plutôt que $\chi(g_q)$, pour $q \notin F$. Il découle de (5) que, modulo les automorphismes intérieurs, l'automorphisme α est le produit tensoriel infini

$$(9) \quad \alpha = \bigotimes_{q \notin F} \rho_{q, \chi(q)} \quad \text{dans} \quad M_{F^c} = \bigotimes_{q \notin F} (M_q, \varphi_{\beta, q})$$

où pour tout nombre complexe $\lambda, |\lambda| = 1$, on définit $\rho_{p,\lambda}$ comme l'automorphisme de τ_p , tel que

$$(10) \quad \rho_{p,\lambda}(\mu_p) = \lambda\mu_p.$$

Cet automorphisme est un cas particulier de $\sigma_{t,p}$ et il préserve l'état $\varphi_{\beta,p}$ par construction.

Pour tout $\chi \in \widehat{W}$ localisé sur F , appelons $\tilde{\theta}_\chi$ l'élément de $\text{Ext}(M) = \text{Aut}(M)/\text{Int}(M)$ déterminé par la classe de

$$(11) \quad \left(\bigotimes_{q \in F} \text{id} \right) \bigotimes_{q \notin F} \bigotimes_{q \notin F} \rho_{q,\chi(q)}$$

LEMME 28. $\tilde{\theta}_\chi$ est intérieur relativement à φ_β ssi le produit infini suivant converge absolument en valeur absolue

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-\beta})(1 - \chi(p) p^{-\beta})^{-1}.$$

Preuve. On a, dans le facteur M_p de type I_∞ , associé à $(\tau_p, \varphi_{\beta,p})$, un facteur unitaire implémentant l'automorphisme $\rho_{p,\chi(p)}$; il est donné par l'opérateur diagonal qui a pour valeurs propres les $\chi(p)^j, j \in \mathbb{N}$. Évaluer l'état $\varphi_{\beta,p}$ sur cet unitaire donne

$$(1 - p^{-\beta}) \sum_0^\infty \chi(p)^n p^{-n\beta} = (1 - p^{-\beta})(1 - \chi(p) p^{-\beta})^{-1}$$

et le résultat suit de critères généraux (cf. [Co]). Cela montre en utilisant le théorème de Dirichlet [Ser₁] que $\widehat{\theta}_\chi$ est extérieur (χ non trivial) quand $\beta \leq 1$ et est intérieur (puisque φ_β est un facteur d'états de type I_∞) pour $\beta > 1$.

Ce lemme montre que, pour $\beta \in]0, 1]$, l'automorphisme α de M_E donné par (4) est extérieur :

$$(12) \quad \{y \in M_E ; \quad y \alpha(x) = xy \quad \forall x \in M_E\} = \{0\}.$$

Maintenant, soit L la forme linéaire sur M_E donnée par

$$(13) \quad L(x) = \psi(Vx) \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)_E.$$

L'inégalité de Schwartz $|L(x)|^2 < \psi(E) \psi(x^*x)$ montre que c'est une fonctionnelle linéaire normale sur M_E . Soit u l'isométrie partielle, $u \in M_E$, de sa décomposition polaire $L = u |L|$. La condition KMS_β pour ψ appliquée à la paire $Vx, y ; x \in C^*(\mathbb{N}^*), y \in C^*(\mathbb{N}^*)$, montre que L satisfait la condition KMS_β α -tordue, où $L(\sigma_t(y) x)$ est remplacé par $L(\sigma_t(y) \alpha(x))$. Maintenant puisqu'à la fois V et ψ sont σ_t invariants, L l'est aussi et par conséquent, u et $|L|$ le sont aussi. Il suit de ça que la dérivée de Radon-Nikodym $(D|L| : D\tilde{\varphi}_\beta)_t$ appartient au centralisateur de $\tilde{\varphi}_\beta$ et est de la forme h^{it} avec

$$(14) \quad |L|(x) = \tilde{\varphi}_\beta(hx) \quad \forall x \in M_E.$$

De la condition KMS_β tordue, on obtient

$$(15) \quad z hu = hu \alpha(z) \quad \forall z \in M_E$$

ce qui implique par (12) que $hu = 0$ et que $L = 0$.

Cela prouve le Lemme 27 (b). Prouvons 27 (c). Il suffit pour cet objectif, étant donné un caractère $\chi \in \widehat{W}$ localisé dans $F \subset \mathcal{P}$, de trouver une séquence V_n d'isométries partielles $V_n \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$, localisée dans F et telle que

$$(16) \quad \theta_g(V_n) = \chi(g)V_n \quad \forall g \in W ; \varphi_\beta(V_n V_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Alors, $a \in C_{\mathbb{Q}, \chi}$ étant donné, on a :

$$\psi(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(V_n V_n^* a) = 0$$

parce que $V_n^* a \in C_{\mathbb{Q}, 1} = C^*(\mathbb{N}^*)$ et le Lemme 27 (b) s'applique. Finalement la construction des V_n se réduit par le Lemme 22 à la construction de fonctions continues $V_n \in C(\prod_{p \in F} \mathbb{Z}_p)$ telles que

$$(17) \quad V_n(gb) = \chi(g)V_n(b) \quad \forall b \in \prod_F \mathbb{Z}_p, g \in \prod_F \mathbb{Z}_p^*$$

et telles que les $|V_n|$ sont uniformément bornées et convergent ponctuellement vers 1 ; ceci est immédiat et l'existence des isométries partielles V_n en découle.

COROLLAIRE 29. *Pour tout $\beta \in]0, 1]$, il existe au moins un état KMS_β sur $C_{\mathbb{Q}}$.*

Preuve. Le groupe W est un groupe compact tel que la somme directe des sous-espaces spectraux $C_{\mathbb{Q}, \chi}$, est dense dans $C_{\mathbb{Q}}$ et cela détermine ψ de manière unique par le Lemme 27.

Nous allons maintenant construire cet unique état KMS_β ψ_β sur $C_{\mathbb{Q}}$ de manière géométrique en utilisant l'action du produit d'arbres de la Section 3. La construction va découler du lemme général suivant, appliqué au C^* -module $\mathcal{E} = C^*(G)e$ sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ et à l'évolution temporelle σ_t de $C^*(\mathbb{N}^*)$.

LEMME 30. *Soit C une C^* -algèbre unitaire, \mathcal{E} un C^* -module sur C , $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de C , $\beta \in]0, \infty[$, φ_β un état KMS_β sur C , et $\mathcal{H}_{\varphi_\beta}$ l'espace de Hilbert de la construction GNS pour φ_β .*

(a) *Soit \mathcal{H}_β la complétion de \mathcal{E} pour le produit intérieur donné par*

$$\langle \xi, \eta \rangle_\beta = \varphi_\beta(\langle \xi, \eta \rangle) \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{E}.$$

Alors, l'action des endomorphismes $\text{End}_C(\mathcal{E})$ sur \mathcal{E} s'étend par continuité à \mathcal{H}_β .

(b) *Il existe une représentation unique ρ de C^0 (l'algèbre opposée de C) dans \mathcal{H}_β telle que pour tout $\xi \in \mathcal{H}_\beta$ et $a \in C$ dans le domaine de $\sigma_{i\beta/2}$, on a*

$$\rho(a)\xi = \xi\sigma_{i\beta/2}(a).$$

Cette représentation commute avec l'action à gauche de $\text{End}_C(\mathcal{E})$.

Preuve. L'espace de Hilbert \mathcal{H}_β est le produit tensoriel des C^* -modules

$$(18) \quad \mathcal{H}_\beta = \mathcal{E} \otimes_C \mathcal{H}_{\varphi_\beta}$$

de telle sorte que la première assertion en découle. La seconde assertion en découle également, en utilisant $\mathcal{H}_{\varphi_\beta}$, comme une algèbre de Hilbert gauche et le théorème de stabilisation de Kasparov [Ka].

Nous appliquons ce lemme avec $C = C^*(\mathbb{N}^*)$, $\mathcal{E} = C^*(G)e$, et $\sigma_t \in \text{Aut } C$ donné par l'évolution temporelle (Proposition 7 (c)) de $C^*(\mathbb{N}^*)$. Comme \mathcal{E} est un espace de fonctions sur Δ , il en est de même de chaque \mathcal{H}_β , et pour chaque $\alpha \in \Delta$, nous prenons ε_α la fonction caractéristique de $\{\alpha\} \subset \Delta$. Les vecteurs $\varepsilon_\alpha, \alpha \in \Delta$ sont de longueur unité dans chaque \mathcal{H}_β et fibrent toujours un sous-espace dense de \mathcal{H}_β . Pour $\beta = 1$, ils forment une base orthonormée de telle sorte que $\mathcal{H}_1 = \ell^2(\Delta)$. Pour calculer le produit intérieur $\langle \varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\alpha'} \rangle_\beta$ dans \mathcal{H}_β , nous allons d'abord travailler localement, i.e. nous fixons le corps local $K = \mathbb{Q}_p$, et appliquons le Lemme 30 à $C = C^*(P_K)_e$ la C^* -algèbre réduite de P_K relative à la projection $e = 1_{P_R}$, alors que le C^* -module est $\mathcal{E} = C^*(P_K)e$. Nous utilisons sur C l'état $\varphi_{\beta,p}$.

Alors le Lemme 30 fournit un produit intérieur sur l'espace des fonctions à support fini sur l'arbre $T_P = P_K/P_R$.

Calculons maintenant explicitement ce produit intérieur sur l'arbre T associé à n'importe quelle valeur β . Ainsi, K est un corps local, $K = \mathbb{Q}_p$, et nous notons d'abord qu'en transportant $\varphi_{\beta,p}$ par l'isomorphisme canonique entre τ_p et la C^* -algèbre réduite $C^*(P_K)_e$, sa valeur sur une fonction P_R -bi-invariante $f(s), s \in P_K$ est donnée par (cf. formule (9) de la Section 3),

$$(19) \quad \varphi_{\beta,p}(f) = \left(\sum_{k>0} p^{k(1-\beta)} f \left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) (1 - p^{\beta-1}) + f \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Soit $g \in P_K, g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & h_0 \end{bmatrix}$. Le produit intérieur $\langle g \varepsilon_0, \varepsilon_0 \rangle_\beta$, avec ε_0 correspondant au point de base, est égal à $\varphi_{\beta,p}(f)$, où la fonction f est associée par la formule (13) de la section 3 aux classes à droite P_R et $g P_R$ dans P_K/P_R :

$$(20) \quad f(s) = m(g P_R \cap P_R s^{-1}) \quad \forall s \in P_K$$

où m est la mesure de Haar à gauche sur P_K . Nous avons juste besoin d'évaluer $f(s)$ pour $s = \begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On a

$$(21) \quad \begin{aligned} P_R s^{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \text{val}(n) \geq 0, \text{val}(h) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & p^{-k} + n \\ 0 & h \end{bmatrix} ; \text{val}(n) \geq 0, \text{val}(h) = 0 \right\} \end{aligned}$$

Tous ses éléments $\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & a \end{bmatrix}$ satisfont $\text{val}(a) = 0$. Cela implique que $P_R s^{-1} \cap g P_R \neq \emptyset$ seulement si $\text{val}(h_0) = 0$. Ainsi

$$(22) \quad \langle g \varepsilon_0, \varepsilon_0 \rangle = 0 \quad \text{si} \quad \text{val}(h_0) \neq 0 \quad \left(\text{pour } g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & h_0 \end{bmatrix} \in P_K \right).$$

Supposons maintenant que $\text{val}(h_0) = 0$; en remplaçant g par $g \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_0^{-1} \end{bmatrix}$, nous pouvons supposer que $h_0 = 1$ sans changer $g \varepsilon_0$. On a

$$(23) \quad \begin{aligned} g P_R &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix} ; \text{val}(n_1) \geq 0, \text{val}(h_1) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n_1 + h_1 n_0 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix} ; \text{val}(n_1) \geq 0, \text{val}(h_1) = 0 \right\} \end{aligned}$$

On a $g P_R \cap P_R s^{-1} \neq \emptyset$ seulement si $\text{val}(n_0) = -k$. Supposons que $\text{val}(n_0) = -k$. Alors nous avons besoin de calculer la mesure de Haar multiplicative sur l'ensemble de $h_1 \in R^*$ telle que $h_1 n_0 = p^{-k} \pmod R$. Cela est vérifié ssi $h_1 \in p^{-k} n_0^{-1} + n_0^{-1} R = p^k n_0^{-1} + p^k R$. Les mesures de Haar additive et multiplicative coïncident sur R^* à un coefficient global près $d^* h = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} dh$. Ainsi nous obtenons l'égalité, avec $g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$(24) \quad \begin{aligned} f \left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= (1 - p^{-1})^{-1} p^{-k} && \text{si } k = -\text{val}(n_0) \\ f \left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= 0 && \text{si } k \neq -\text{val}(n_0) \end{aligned}$$

Ceci avec la formule (19) donne l'égalité

$$(25) \quad \varphi_{\beta,p}(f) = p^{-k\beta} (1 - p^{\beta-1}) (1 - p^{-1})^{-1}, \quad k = -\text{val}(n_0)$$

i.e.

$$(26) \quad \langle g \varepsilon_0, \varepsilon_0 \rangle_\beta = p^{-k\beta} (1 - p^{\beta-1}) (1 - p^{-1})^{-1},$$

où $g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k = -\text{val}(n_0)$.

L'étape suivante consiste à comprendre la signification géométrique de l'orbite de $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_0 \right\}$ dans l'arbre T_p et de la valeur $k = -\text{val}(n)$. Puisque l'action de P_K sur l'arbre T_p fixe un point à l'infini, elle préserve les horocycles correspondant à ce point. Ces horocycles sont les classes d'équivalence de la relation $R_\infty : L \sim L'$ ssi $\exists q$ tel que $t^q L = t^q L'$ où t est la translation hyperbolique d'une unité vers le point à l'infini.

Nous vérifions d'abord que les deux treillis L, L' sont R_∞ équivalents ssi ils sont sur la même orbite du sous-groupe $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $n \in K$ de P_K . Ce sous-groupe est un sous-groupe normal et par conséquent, il définit une relation d'équivalence qui est stable par l'action à gauche de P_K . L'application t est donnée par

$$(27) \quad t(g L_0) = g g_p L_0 \quad \forall g \in P_K \quad \text{avec } g_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

Plus généralement, $t^q(g L_0) = g g_p^q L_0 \quad \forall g \in P_K$.

Ainsi $g_1 L_0 \sim g_2 L_0(R_q)$ ssi $g_1 g_p^q L_0 = g_2 g_p^q L_0$, i.e.

$$(28) \quad g_2^{-1} g_1 \in g_p^q P_R g_p^{-q}.$$

Cela est vérifié ssi $g_2^{-1} g_1$ est de la forme $\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & h \end{bmatrix}$, $\text{val}(h) = 0$, $\text{val}(m) \geq -q$. Ainsi $g_1 L_0 \sim g_2 L_0(R_\infty)$ ssi $g_2^{-1} g_1 \in K \rtimes R^*$. Les deux treillis $g L_0$ et $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g L_0$ satisfont trivialement cette relation et inversement, si $g_1 L_0 \sim g_2 L_0(R_\infty)$, nous pouvons écrire g_2 comme $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g_1$ sans affecter $g_j L_0$.

Interprétons maintenant la valeur de $-\text{val}(m)$ comme une fonction de distance entre L_0 et $L = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_0$. Soit $k = -\text{val}(m)$. Nous savons que $t^k(L_0) = t^k(L)$ et que cela n'est pas vrai pour $k - 1$. Ainsi $d(L_0, L) = 2k$. On obtient

LEMME 31. Soient $L, L' \in T$ deux treillis.

- (a) S'ils appartiennent à des classes d'équivalence d'horocycles différents, ils sont orthogonaux pour $\langle \cdot \rangle_\beta$.
- (b) S'ils appartiennent à des classes de même horocycle à distance $d(L, L') = 2k > 0$, on a

$$\langle \varepsilon_L, \varepsilon_{L'} \rangle_\beta = p^{-k\beta} (1 - p^{\beta-1}) (1 - p^{-1})^{-1}.$$

- (c) Si $L = L'$, alors $\langle \varepsilon_L, \varepsilon_{L'} \rangle_\beta = 1$.

REMARQUES.

- (a) Pour $\beta \rightarrow +\infty$, le produit intérieur ci-dessus converge vers une valeur non nulle seulement si $L = L'$ ou si $L \neq L'$ mais $L \sim L'(R_1)$, auquel cas il tend vers $-p^{-1}(1 - p^{-1})^{-1}$.
- (b) Pour $\beta = 0$, le produit intérieur converge vers 1 sur la classe d'équivalence de chaque horocycle, qui se réduisent alors à un seul point dans \mathcal{H}_β , $\beta = 0$.

Calculons maintenant le produit intérieur correspondant sur $\Delta = \prod (T_p, L_0) = P_{\mathbb{Q}}^+ / P_{\mathbb{Z}}^+$. Appelons à nouveau L_0 le point de base. Étant donnée $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix} = g$, $n \in \mathbb{Q}$, $h \in \mathbb{Q}_+^*$, pour obtenir un produit intérieur non nul, $\langle g L_0, L_0 \rangle$, nous avons besoin qu'en chaque place p , $g_p L_0 \sim L_0(R_\infty)$ et ainsi que $\text{val}(g_p) = 0$. Alors $h = 1$. Posons alors $N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Q} \right\}$ et essayons de comprendre le produit intérieur sur l'orbite $N L_0$. Nous avons une base ε_x paramétrée par $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,

$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_0.$$

Le produit intérieur $\langle \varepsilon_x, \varepsilon_0 \rangle_\beta$ est alors donné, en utilisant le Lemme 31, par

(29)

$$\langle \varepsilon_x, \varepsilon_0 \rangle_\beta = \prod_{\substack{p \in P \\ k_p \neq 0}} p^{-k_p \beta} (1 - p^{\beta-1}) (1 - p^{-1})^{-1}$$

où $x = a/b$, $(a, b) = 1$ et $b = \prod_p p^{k_p}$ est la décomposition de b comme produit de puissances de premiers. Plus généralement, elle est invariante par translations, i.e. $\langle \varepsilon_x, \varepsilon_y \rangle_\beta = \langle \varepsilon_{x-y}, \varepsilon_0 \rangle_\beta$; ainsi la positivité qui en découle est le fait que la fonction donnée par (29) est de type positif sur le groupe des racines de l'unité \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Cette fonction est la fonction ψ_β du Théorème 5.

On a $\langle g_1 L_0, g_2 L_0 \rangle_\beta = 0$ si $g_2^{-1} g_1 \notin N$.

Prenons alors une orbite arbitraire $N g L_0, g \in P_\mathbb{Q}^+$. Nous avons besoin de calculer $\langle (1, x) g L_0, (1, y) g L_0 \rangle_\beta$ où $x, y \in \mathbb{Q}$ et $(1, x), (1, y)$ sont les éléments correspondant de N . On a $\langle (1, x) g L_0, (1, y) g L_0 \rangle = \langle g \varepsilon_{x'}, g \varepsilon_{y'} \rangle = \langle \varepsilon_{x'-y'}, \varepsilon_0 \rangle$ où $(1, x') = g^{-1}(1, x)g$ et $(1, y') = g^{-1}(1, y)g$. Ainsi, nous voyons que les orbites $N \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \varepsilon_0, k \in \mathbb{Q}_+^*$, sont orthogonales deux à deux pour $\langle \cdot \rangle_\beta$ et le produit intérieur est, à un renommage près, donné par (29) sur chacun d'eux.

Nous sommes maintenant prêts à décrire les espaces de Hilbert \mathcal{H}_β associés par le Lemme 30 au C^* -module $\mathcal{E} = Be$ sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ et les états KMS φ_β , et alors à obtenir le commutant de $P_\mathbb{Q}^+$ dans \mathcal{H}_β comme une représentation unitaire de la C^* -algèbre $C_\mathbb{Q}$.

PROPOSITION 32.

- (a) Soit \mathcal{H}_β la complétion de l'espace de Hilbert du C^* -module $C^*(P_A)e$, sur $eC^*(P_A)e = C^*(\mathbb{N}^*)$, avec l'état φ_β . Alors \mathcal{H}_β a une base naturelle indexée par $P_\mathbb{Q}^+/P_\mathbb{Z}^+$, et son produit intérieur est invariant par translations à gauche par $P_\mathbb{Q}^+$ et donné par

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \varepsilon_e, \varepsilon_e \right\rangle = 0 \quad \text{à moins que } a = 1$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon_e, \varepsilon_e \right\rangle = \psi_\beta(b)$$

où ψ_β est la fonction de type positif définie dans le Théorème 5.

- (b) La C^* -algèbre $C_\mathbb{Q}^0$ admet une représentation dans \mathcal{H}_β donnée par la convolution droite avec $\delta^{\beta/2} f$ pour toute fonction $P_\mathbb{Z}^+$ -bi-invariante f sur $P_\mathbb{Q}^+$.
- (c) Le vecteur $\varepsilon_0 =$ classe de $P_\mathbb{Z}^+$ est cyclique pour $P_\mathbb{Q}^+$, séparateur pour $C_\mathbb{Q}$, $\overline{C_\mathbb{Q}\varepsilon_0}$ est l'ensemble des points fixes de $P_\mathbb{Z}^+ \subset P_\mathbb{Q}^+$ et $(C_\mathbb{Q})''$ est le commutant de $P_\mathbb{Q}^+$ dans \mathcal{H}_β .
- (d) Le vecteur ε_0 définit un état KMS_β sur $C_\mathbb{Q}$.

Preuve. La preuve de (a) découle de (29). Définissons $\mathcal{H}_{\beta,1}$ comme le sous-espace de \mathcal{H}_β engendré par l'orbite $N\varepsilon_0$ de ε_0 sous le sous-groupe normal N de $P_\mathbb{Q}^+$. Plus généralement, pour $k \in \mathbb{Q}_+^*$, nous prenons

$$(30) \quad \mathcal{H}_{\beta,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \mathcal{H}_{\beta,1}.$$

Les sous-espaces $\mathcal{H}_{\beta,k}$ sont orthogonaux deux à deux et \mathcal{H}_β est leur somme directe.

Prouvons (b). Nous savons que l'action par convolution droite de l'algèbre de Hecke \mathcal{H} d'une fonction $P_{\mathbb{Z}}^+$ -bi-invariante sur $P_{\mathbb{Q}}^+$ amène une représentation de \mathcal{H}^0 sur l'enveloppe linéaire de la base naturelle $\varepsilon_x, x \in P_{\mathbb{Q}}^+/P_{\mathbb{Z}}^+$ de \mathcal{H}_{β} . Cela est encore vrai si l'on tord cette action par l'automorphisme (non involutif) de \mathcal{H} donné par la multiplication par $\delta^{\beta/2}$. Nous avons alors seulement besoin de montrer que la nouvelle représentation de \mathcal{H}^0 dans \mathcal{H}_{β} est *involutive*. Quand nous restreignons cette représentation à l'anneau de groupes de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , nous obtenons (comme $\delta = 1$ sur les classes doubles dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) que la représentation correspondante de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est donnée par

$$(31) \quad \rho(\gamma) \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \varepsilon_0 = \begin{bmatrix} 1 & b + \gamma \\ 0 & a \end{bmatrix} \varepsilon_0.$$

Ainsi $\rho(\gamma)$ est diagonal dans la décomposition $\mathcal{H}_{\beta} = \oplus \mathcal{H}_{\beta,k}$, et sa restriction à $\mathcal{H}_{\beta,k}$ est unitaire puisque l'action gauche de N sur $\mathcal{H}_{\beta,k}$ est unitaire.

Quand nous restreignons la représentation ρ de \mathcal{H}^0 à la sous-algèbre involutive engendrée par les μ_n , son unitarité découle du Lemme 30 (b). Le calcul explicite de l'isométrie $U_p = \rho(\mu_p^*)$ dans \mathcal{H}_{β} associée à μ_p^* , p un nombre premier, est le suivant. Nous appelons comme ci-dessus t_p la translation hyperbolique d'une unité de longueur vers le point à l' ∞ dans l'arbre T_p . Nous le faisons agir trivialement sur les autres arbres. On obtient alors

$$(32) \quad U_p \varepsilon_{\alpha} = p^{\beta/2-1} \sum_{t_p(\alpha')=\alpha} \varepsilon_{\alpha'}.$$

On peut vérifier directement en utilisant le Lemme 31 que U_p est effectivement une isométrie.

Nous avons ainsi montré que ρ est une représentation involutive de \mathcal{H}^0 dans \mathcal{H}_{β} et par la Proposition 19, elle s'étend à une représentation de $C_{\mathbb{Q}}^0$ dans \mathcal{H}_{β} . Cela prouve (b). Par construction, ε_0 est cyclique pour $P_{\mathbb{Q}}^+$. Puisque l'action ci-dessus de \mathcal{H}^0 (et $C_{\mathbb{Q}}^0$) commute avec $P_{\mathbb{Q}}^+$, le vecteur ε_0 est séparateur pour $C_{\mathbb{Q}}^0$. La preuve de la dernière assertion de (c) est la même que dans le cas $\beta = 1$ (cf. Lemme 17). La preuve de (d) est la même que celle du Lemme 16.

En combinant le Corollaire 29 et la Proposition 32 (d), nous obtenons que pour $\beta \in]0, 1]$, l'état sur $C_{\mathbb{Q}}$ donné par

$$(33) \quad \varphi(x) = \langle \rho(x)\varepsilon_0, \varepsilon_0 \rangle \quad \forall x \in C_{\mathbb{Q}}$$

est le seul état KMS_{β} . Ceci combiné à 32 (a) complète la preuve du Théorème 5.

REMARQUES 33.

- (a) Soient \mathcal{H}_{β} , Δ l'opérateur de multiplication par k^{β} sur $\mathcal{H}_{\beta,k}$. Il existe un unique poids ψ_{β} (à une constante multiplicative près) sur $(P_{\mathbb{Q}}^+)''$ à groupe modulaire d'automorphismes

$$(34) \quad \sigma_t^{\psi_{\beta}}(\cdot) = \Delta^{it} \cdot \Delta^{-it}.$$

Pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, le vecteur $\varepsilon_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix} \varepsilon_d$ est séparateur pour $C_{\mathbb{Q}}''$ mais non cyclique. Son extension cyclique $\overline{C_{\mathbb{Q}}\varepsilon_n}$, définit une projection $E_m \in (P_{\mathbb{Q}})''$ qui appartient au centralisateur de ψ_{β} et sur lequel ψ_{β} est fini. Sur le sous-espace E_m , l'opérateur modulaire de la paire

$(P_{\mathbb{Q}}''/E_m, C_{\mathbb{Q}}''$ et vecteur ε_m) est la restriction de Δ . Le sous-espace E_m est l'espace des points fixes du sous-groupe $\begin{bmatrix} 1 & m\mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $P_{\mathbb{Q}}^+$. Ces sous-espaces forment une famille imbriquée (i.e. $E_m \subset E_{m'}$ si m divise m') qui est totale dans \mathcal{H}_{β} .

- (b) Nous avons utilisé tout au long de cet article la paire de groupes $P_{\mathbb{Q}}^+, P_{\mathbb{Z}}^+ \subset P_{\mathbb{Q}}^+$ plutôt que la paire $P_{\mathbb{Q}}, P_{\mathbb{Z}} \subset P_{\mathbb{Q}}$. La relation entre les systèmes C^* -dynamiques correspondant $C^*(P_{\mathbb{Q}}^+, P_{\mathbb{Q}}^+), \sigma_t$ et $C^*(P_{\mathbb{Q}}, P_{\mathbb{Z}}), \sigma_t$ est assez simple. En effet, le dernier est juste la C^* -algèbre des points fixes de l'involution α du premier donnée par la conjugaison complexe $z \rightarrow \bar{z}$ vue comme un élément de $W = Gal(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$.

Ceci est facile à vérifier parce que la classe double X modulo $P_{\mathbb{Z}}$ d'un élément $g \in P_{\mathbb{Q}}$, $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ est la même que la classe double modulo $P_{\mathbb{Z}}$ de $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$, $\varepsilon = \text{Sign}(a)$, ce qui nous autorise à supposer que $a > 0$. Cela montre que les fonctions $P_{\mathbb{Z}}$ -bi-invariantes sur $P_{\mathbb{Q}}$ incluent toutes les fonctions $P_{\mathbb{Z}}^+$ invariantes sur $P_{\mathbb{Q}}^+$, qui sont invariantes sous l'involution

$$(35) \quad g \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad g \in P_{\mathbb{Q}}^+.$$

On obtient ainsi l'égalité σ_t équivariante

$$(36) \quad C^*(P_{\mathbb{Q}}, P_{\mathbb{Z}}) = C^*(P_{\mathbb{Q}}^+, P_{\mathbb{Z}}^+)^{\alpha}$$

et on peut réécrire le théorème principal de notre article en fonction de $C^*(P_{\mathbb{Q}}, P_{\mathbb{Z}})$.

- (c) Dans cet article, nous avons ignoré la place à l'infini dans notre traitement des états ou des poids KMS_{β} et dans la construction de $C_{\mathbb{Q}}$ à partir de l'action sur le produit d'arbres (Section 2). Nous avons obtenu, pour les places finies, l'action de P_K sur l'arbre de $SL(2, K)$ ainsi que le produit intérieur adéquat sur les fonctions sur l'arbre (Section 5) à partir de la compréhension des poids KMS_{β} sur $C^*(P_K)$ et de la réduction par la projection $e \in C^*(P_K)$, $e = 1_{P_{\mathbb{R}}}$.

À la place infinie, le système C^* -dynamique en jeu est $C^*(P_{\mathbb{R}}), \sigma_t$ où $P_{\mathbb{R}}$ est le groupe de matrices

$$(37) \quad \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} ; \quad b \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

et où σ_t est donné par le module δ de $P_{\mathbb{R}}$,

$$(38) \quad \sigma_t(f)(g) = \delta(g)^{-it} f(g) \quad \forall f \in L^1(P_{\mathbb{R}}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La C^* -algèbre de $P_{\mathbb{R}}$ est, en utilisant l'identification de \mathbb{R} avec son groupe dual de Pontrjagin, donnée par

$$(39) \quad C^*(P_{\mathbb{R}}) = C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^*$$

où l'action de \mathbb{R}^* se fait par homothéties. Cette action a deux orbites, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\{0\}$ et à la séquence exacte équivariante de C^* -algèbres

$$(40) \quad 0 \rightarrow C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$$

correspond la séquence exacte de produits croisés :

$$(41) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow C^*(P_{\mathbb{R}}) \rightarrow C^*(\mathbb{R}^*) \rightarrow 0$$

similaire à la séquence exacte de la C^* -algèbre de Toeplitz. Ici l'idéal à deux côtés \mathcal{K} est la C^* -algèbre élémentaire d'opérateurs compacts. La théorie de la représentation de $C^*(P_{\mathbb{R}})$ découle immédiatement de (7) et en plus des caractères de $C^*(\mathbb{R}^*)$ qui fournissent des représentations à une dimension de $C^*(P_{\mathbb{R}})$, on a une unique représentation irréductible de dimension infinie π . Cette représentation peut être décrite comme suit. On pose $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ avec

$$(42) \quad (\pi(g)\xi)(t) = |a|^{1/2}\xi(at - b) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \xi \in L^2(\mathbb{R})$$

où $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ comme ci-dessus, appartient à $P_{\mathbb{R}}$.

Pour chaque $\beta \in]0, \infty[$, il existe, à normalisation près, un unique poids KMS_{β} sur $C^*(P_{\mathbb{R}})$, donné par

$$(43) \quad \varphi_{\beta}(f) = \text{Trace}(\pi(f)\Delta^{-\beta/2}) \quad \forall f \in C^*(P_{\mathbb{R}})^+$$

où $\Delta = -\frac{d^2}{dt^2}$ est le Laplacien, un opérateur auto-adjoint non-borné dans $L^2(\mathbb{R})$.

Par construction, φ_{β} est le poids du facteur de type I_{∞} qui est le poids dominant ([C], [C-T]) sur le facteur de type I_{∞} correspondant. Il découle de cela que pour tout facteur M de poids ψ , le centralisateur de $\psi \otimes \varphi_{\beta}$ est l'algèbre de von Neumann semi-finie associée à la décomposition continue de M , i.e. le produit croisé par le groupe modulaire d'automorphismes σ_{ψ} ,

$$(44) \quad (M \otimes I_{\infty})_{\psi \otimes \varphi_{\beta}} = M \rtimes_{\sigma_{\psi}} \mathbb{R}.$$

Dans notre cas, avec $\beta \in]0, 1]$, il est naturel de prendre pour M le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ agissant dans l'espace de Hilbert \mathcal{H}_{β} (cf. Proposition 32). Pour obtenir le produit croisé (44), il est alors naturel d'utiliser à la place infinie l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\beta}^{\infty}$ de la construction GNS du poids φ_{β} sur $C^*(P_{\mathbb{R}})$. Dans le produit tensoriel $\mathcal{H}_{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\beta}^{\infty}$, on a une action naturelle de produit du groupe P_A sur les adèles $A = \mathcal{A} \times \mathbb{R}$. Le produit croisé (44) est alors contenu dans le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ qui est un *sous-groupe discret* de P_A .

Bibliographie

- [A-W] H. Araki and E.J. Woods. A classification of factors. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., **4** (1968), 51-130.
- [Bi] M. Binder. Induced factor representations of discrete groups and their type. Jour. Functional Analysis, to appear.
- [Bl] B.E. Blackadar. The regular representation of restricted direct product groups. Jour. Functional Analysis, **25** (1977), 267-274.
- [Bos-C] J.-B. Bost and A. Connes. Produits eulériens et facteurs de type III. C.R. Acad. Sci. Paris, **315** (I) (1992), 279-284.
- [Br-R] O. Bratteli and D.W. Robinson. Operator algebras and quantum statistical mechanics I, IT. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1981.

- [Com] F. Combes. Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche. *Compos. Math.* **23** (1971), 49-77.
- [C] A. Connes. *Noncommutative geometry*. Academic Press, 1994.
- [Co] A. Connes. Une classification des facteurs de type III. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, (4) **6** (1973), 133-252.
- [C-T] A. Connes and M. Takesaki. The flow of weights on factors of type III. *Tohoku Math. J.*, **29** (1977), 473-575.
- [Dir] P.A.M. Dirac. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proc. Royal Soc. London*, **A114** (1927), 243-265.
- [G] A. Guichardet. *Symmetric Hilbert spaces and related topics*. Lecture Notes in Mathematics, **261**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1972.
- [H] R. Haag. *Local quantum physics*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1992.
- [J] B. Julia. Statistical theory of numbers. in *Number Theory and Physics*, Les Houches Winter School, J.-M. Luck, P. Moussa et M. Waldschmidt eds., Springer-Verlag, 1990.
- [Ped] G.K. Pedersen. *C^* -algebras and their automorphism groups*. Academic Press, London-New York-San Francisco, 1979.
- [Ren] J. Renault. A groupoid approach to C^* -algebras. *Lecture Notes in Mathematics*, **793** (1980), Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin.
- [Ser₁] J.-P. Serre. *Cours d'arithmétique*. P.U.F. Paris, 1970.
- [Ser₂] J.-P. Serre. Arbres, amalgames, SL_2 . *Astérisque*, **46** (1977).
- [Sh] G. Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*. Princeton University Press, 1971.
- [Spe] D. Spector. Supersymmetry and the Möbius inversion function. *Commun. Math. Phys.*, **127** (1990), 239-252.
- [T] J. Tate. Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta function. in *Algebraic Number Theory*, J.W.S. Cassels et A. Frölich eds. Academic Press, 1967.
- [We₁] A. Weil. Fonction zêta et distributions. Séminaire Bourbaki n°312, juin 1966.
- [We₂] A. Weil. *Basic number theory*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

J.-B. Bost and A. Connes
 Institut des Hautes Études Scientifiques,
 35, route de Chartres,
 F-91440 Bures-sur-Yvette, France

Cornelius Castoriadis dialogue avec Alain Connes
Chapitre 5
Les limites de la formalisation

CORNELIUS CASTORIADIS : Je suis très heureux que vous ayez accepté de venir à cette émission, et pour au moins deux raisons. Tout d’abord, même si je ne suis pas mathématicien, j’ai toujours, depuis mon adolescence, été attiré par les mathématiques, et ma fascination perdure encore aujourd’hui. Or, pour moi, rencontrer un mathématicien important, c’est un peu l’émotion de se trouver devant la cathédrale de Chartres et de rencontrer un “maître d’œuvre” qui m’explique comment elle a été construite. Et puis, en lisant le livre que vous avez écrit avec Jean-Pierre Changeux, *Conversations on Mind, Matter, and Mathematics*¹ (un très joli titre d’ailleurs²), je me suis rendu compte que nous avons des positions très proches sur ce qui est essentiel aux mathématiques (c’est-à-dire pour faire des mathématiques), ce qu’elles présupposent, en quoi elles consistent et, enfin, ce mystère de la rencontre possible et, à mes yeux, presque certaine, des constructions mathématiques avec quelque chose que nous redécouvrons, que nous recréons, bien sûr, mais qui nous contraint aussi comme une réalité objective - idéale, certes - mais d’une cohérence interne étonnante, d’une richesse et d’une étendue extraordinaire.

À vrai dire, je ne sais pas sur quel sujet vous interroger. Ils sont en fait très nombreux, mais beaucoup sont exclus par la nécessité d’être compris par tout “honnête homme”. Maintenant, peut-être pourrions-nous commencer par la célèbre question des machines “pensantes”. Pour commencer, je vais dire ce que j’en pense, et ensuite nous verrons si nous sommes d’accord ou non. Ces machines, certes, sont une prodigieuse création humaine et peuvent faire des choses dont l’homme est incapable. Mais, du moins pour le moment, elles sont incapables de faire ce qu’un... ver de terre peut faire, un ver de terre dont les cellules, par exemple, savent reconnaître les formes stéréochimiques des molécules qu’elles doivent accepter, rejeter, traiter. Il faut donc prendre en compte ces limites, tout en sachant qu’elles sont certes provisoires, ces limites sont au moins repoussables. Mais jusqu’à quel point ? Que dire a priori de leurs limites ? À mes yeux, il n’y aura jamais de véritable machine à penser. Et dans l’ordre, pour justifier cette affirmation, je réinvokerai l’heureuse distinction que vous avez employée, dans votre discussion avec Jean-Pierre Changeux, concernant les trois étapes du travail du mathématicien. La première étape, sur laquelle tout le monde sera d’accord, est le calcul, les algorithmes, qui, selon la célèbre thèse de Church sur la machine logique universelle de Turing, peuvent être confiés à une machine, à ce qu’on appelle une machine. Il y a des réserves évidentes, puisque quelqu’un doit construire cette machine, lui donner un programme et des tâches à résoudre ; la machine n’invente pas la tâche à résoudre, ni même les méthodes. Cela me permet de passer immédiatement au troisième stade, que vous appelez l’intuition, que j’appelle moi-même l’imagination créatrice. C’est cette faculté de l’être humain, de l’âme humaine mais de l’âme socialisée bien sûr, dotée du langage et d’un héritage historique de s’inventer arbitrairement des tâches, d’inventer arbitrairement des formes (quand je dis arbitrairement, c’est une première approximation), et aussi d’inventer ce domaine particulier des mathématiques où, justement, on crée cette chose qui, à mon avis, relève tout autant de l’imagination : le processus de démonstration. Et il y a enfin une étape intermédiaire, une tactique, peut-être même une stratégie, une capacité

Traduction assisté de google d’une traduction anglaise de John V. Garner

¹Changeux, J.-P. et Connes, A., *Conversations on Mind, Matter, and Mathematics*, trans. M. B. de Bevoise. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1998.

²Le titre du livre en français est *Matière à pensée*.

que, après quelques hésitations dans votre discussion avec Changeux, vous appelez réflexion, un terme avec lequel je suis en parfait accord.

ALAIN CONNES : On peut en effet se poser a priori la question de savoir si, effectivement, il existe des limites à la capacité potentielle d'une machine. En tant que mathématicien, je poserais volontiers la limite à la distinction entre ce qui a un sens, ce qui est intéressant, par opposition à ce qui n'a aucun intérêt, aucune pertinence. C'est vraiment cette notion de sens, d'intérêt, qui est la plus difficile à formaliser, à définir de manière à ce qu'une machine puisse y avoir accès. Mais avant d'approfondir cette question, je voudrais revenir sur les différents niveaux de travail mathématique que vous avez évoqués. En particulier, à cette idée à mon avis fautive que puisque le calcul est désormais entièrement accessible à la machine, c'est un niveau que nous comprenons parfaitement. Je pense que nous aurions tort de dire cela. Quand on a, par exemple, un calcul très compliqué à faire, on peut certes le confier à un ordinateur, mais cela suppose avant tout, comme vous l'avez précisé, qu'on lui donne le programme nécessaire. Et puis, ce qui est bien plus frustrant, c'est de savoir lire correctement le résultat. Car, si l'ordinateur vous fournit dix pages de formules, nous ne sommes pas, aujourd'hui, vraiment avancés, dans le sens où un tel résultat justement...

CORNELIUS CASTORIADIS :... n'est pas compréhensible...

ALAIN CONNES : Ce n'est pas compréhensible, c'est tout. Et ma deuxième remarque, toujours à ce premier niveau de calcul, est qu'en effet, lorsque l'esprit humain apprend à faire des calculs, aussi simples et mécaniques soient-ils, il acquiert ainsi toutes sortes de mécanismes qui, s'ils ne sont pas acquis, vont finalement rendre l'intuition muette, impuissante. C'est un peu comme si un piéton, allant d'un point A à un point B, baissait la tête pour ne pas voir le chemin qu'il parcourt, les gens qu'il croise. Je pense ici bien sûr aux enfants à l'école. Ce serait une très grave erreur de les laisser utiliser trop tôt les calculatrices, car apprendre à faire des multiplications, des additions, etc., inscrivant ces opérations très simples dans le cerveau, est fondamental pour qu'à côté du mécanisme lui-même, une intuition et une notion de grandeur se développent progressivement. C'est une question que nous aurions bien tort d'éluder.

CORNELIUS CASTORIADIS : Absolument !

ALAIN CONNES : Quant au niveau de la réflexion, c'est vrai qu'on peut désormais formaliser un vague schéma de retour en arrière, du genre de celui dont il a été question avec Changeux dans notre livre, qui commence à ressembler à une véritable réflexion. Mais une telle description me donne envie d'en savoir plus dans le sens où ce qui manque, c'est une sorte de polarisation vers un objectif relativement mal défini alors qu'on réfléchit à un problème. En ce sens d'ailleurs, la distinction entre le deuxième et le troisième niveau est assez floue ; nous ne savons pas comment bien le préciser.

Or, pour arriver pleinement au troisième niveau, celui de l'intuition, de l'imagination créatrice selon vous (qui, de toute façon, permet d'accéder à cette réalité mathématique indépendante de notre existence propre), il faut suivre, chaque fois qu'on étudie certains objets à travers une telle axiomatique, une sorte de fil d'Ariane. C'est extrêmement difficile à définir, mais cela permet de se déplacer dans cette "géographie" des mathématiques. Et je voudrais essayer de polariser ce déplacement en donnant deux exemples de problèmes, d'énigmes, qui sont mes principales mo-

tivations en mathématiques. La première énigme est celle de l'espace dans lequel nous vivons, énigme qui ne serait évidemment pas déconnectée des relations entre mathématiques et physique, puisqu'on ne peut séparer la perception de cet espace de la physique, et de ce qu'il nous en apprend non plus. Et la deuxième énigme est disons, la suite des nombres premiers, ceux qui sous-tendent l'arithmétique, les nombres, tout ce système se présente constamment à nos yeux chaque fois que nous réfléchissons à l'arithmétique, et même aux problèmes simples de ce domaine. Or, on aperçoit quelque chose de véritablement surprenant lorsqu'on s'aventure assez loin dans l'élucidation de ces deux mystères : ils ont énormément de points communs ; les notions développées pour comprendre l'un de ces deux problèmes sont applicables à l'autre, etc. ; et, finalement, on ne peut pas vraiment dissocier la perception que l'on a du monde physique de cette recherche sur les énigmes mathématiques. Ainsi, on arrive, ou du moins j'arrive (peut-être suis-je un extrémiste ?) à cette certitude : la réalité mathématique est la seule réalité qui soit précisément, correctement définie. Et on arrive à ce défi, essentiel pour moi de comprendre dans quel sens la réalité physique s'aligne, se précise dans la réalité mathématique.

CORNELIUS CASTORIADIS : Je suis presque entièrement d'accord avec vous, même si mon accord ou mon désaccord n'ont pas grand intérêt. J'ai surtout été très heureux qu'en évoquant ces deux énigmes vous mettiez le doigt sur des questions qui m'ont toujours rempli d'admiration et de fascination également ; nous y reviendrons. Au préalable, permettez-moi d'ajouter quelque chose sur votre première étape de calcul, qui n'est d'ailleurs pas première dans le temps, mais est logiquement antérieure, si je puis dire. Il faut toujours revenir à cette étape. Autrement dit, un mathématicien a une brillante intuition. Il essaie ou d'autres essaient, de la mettre sur papier. Si alors cette intuition contredit des choses bien établies, et que la contradiction vient du premier niveau (quelque chose est A ou n'est pas A , est le contradictoire de A), alors, eh bien, l'intuition brillante tombe. Il existe de nombreux exemples dans l'histoire des mathématiques.

ALAIN CONNES : C'est exactement ça. Et on pourrait comparer la période de calcul, de vérification, presque de démonstration, au travail de l'expérimentateur qui, pour ainsi dire, retourne à sa planche à dessin. On peut avoir une idée, et c'est cela qui remplace l'expérience en mathématiques.

CORNELIUS CASTORIADIS : Absolument.

KATHARINA VON BULOW : C'est pourquoi un livre de philosophie, malgré l'intuition de base, nécessite mille pages pour expliquer l'idée d'origine.

ALAIN CONNES : Il faut surtout revenir à une expérimentation ; et, en mathématiques, cette expérimentation est la preuve, la démonstration.

CORNELIUS CASTORIADIS : Oui. Avec cette différence qu'en philosophie on n'a pas de démonstrations rigoureuses. On ne peut pas réduire ce que l'on dit à un petit groupe d'axiomes dont on déduit le reste. Nous n'avons pas de référence directe à l'expérience. La philosophie fonctionne sous la contrainte de l'expérience, mais il s'agit alors de la contrainte de l'expérience humaine dans sa totalité. Et nous n'avons justement pas cette dureté, ce caractère cristallin qui est le propre des mathématiques. C'est là l'énorme différence.

Mais revenons à notre question et à vos trois étapes. Je crois moi-même aussi qu'il n'est pas possible de séparer totalement la réflexion de l'intuition (pour vous) ou de l'imagination (pour moi). Laissez-moi expliquer. Supposons que l'on intègre dans une machine ce que vous appelez très justement une fonction d'évaluation, qui, en tant que fonction au sens vulgaire (par exemple la fonction respiratoire), permettra peu à peu à la machine, au fur et à mesure qu'elle effectue des calculs, de voir si elle s'approche ou non d'un but, un but défini d'avance, puisque la machine ne saurait, elle-même, comment le fixer. Mais cette fonction de l'évaluation, si elle est elle-même susceptible d'être rendue sous forme d'algorithme, ne pourra opérer que sur des possibilités définies à l'avance.

ALAIN CONNES : Absolument.

CORNELIUS CASTORIADIS : Alors que le véritable travail de réflexion est indissociable de la création imaginaire, dans le sens où lors de ce travail on peut faire apparaître des critères de choix, par exemple, ou d'autres éléments qui n'étaient pas donnés à l'avance.

ALAIN CONNES : Je suis entièrement d'accord.

CORNELIUS CASTORIADIS : En revanche, bien sûr, et pour la même raison, au moment d'un tel travail d'évaluation "machinale", on ne peut jamais y voir le sens, comme vous le dites, ni la fécondité, comme je le voudrais dire. Le sens est, là encore, un apport de l'imagination, sans lequel l'invention d'une méthode démonstrative perdrait une part énorme de ses critères.

Prenons l'exemple d'une des grandes méthodes de démonstration, déjà là chez Euclide et Archimède, la méthode de l'exhaustion³, qui est le fondement d'un nombre énorme de choses dans les mathématiques modernes, dans la théorie des limites. Qu'est-ce que ça me permet de faire ? Approcher au plus près, et idéalement épuiser, ce qui reste. Cette exhaustion a bien sûr été inventé au départ pour une application précise, mais on s'est rendu compte à un moment donné qu'il avait une fécondité qui transcendait de loin les objets pour le fonctionnement desquels il avait été construit. Et là encore, l'imagination est nécessaire.

ALAIN CONNES : Absolument. Cette méthode est d'ailleurs un très bon exemple, car on y voit bien ce qui différencie le mathématicien de l'ordinateur. L'exhaustion lui donnera accès à l'infini, le portera jusqu'à la limite. Ainsi, malgré un nombre infini d'opérations, il pourra, dans son esprit, imaginer le chiffre limite π , tandis que l'ordinateur, lui...

CORNELIUS CASTORIADIS :... produira des décimales.

ALAIN CONNES : C'est ça ; il accumulera les opérations mais n'aura jamais cet accès direct. Et c'est ce qui est tout à fait remarquable en mathématiques. Elle donne à l'homme un accès à l'infini, c'est-à-dire un accès au-delà d'un nombre d'opérations finies. Reprenons le même problème à travers un autre point. En mathématiques, des choses assez paradoxales se produisent souvent ainsi, pour étudier des groupes entièrement finis, on utilise des outils qui ont été conçus pour étudier des groupes infinis, qu'on appelle groupes de Lie, qui sont en fait beaucoup plus simples à analyser que les groupes finis car leur structure, sous-tendue par le continuum, permet d'utiliser des moyens

³C'est-à-dire par des approximations de plus en plus précises.

algébriques. Posez-vous donc un problème philosophique très actuel : l'univers qui nous entoure, notre esprit, etc. est-il a priori fini, a priori limité par la finitude ? Ou, comme je l'espère, existe-t-il d'une certaine manière, au-delà du fini, au-delà du réel, du tangible et du matériel, une réalité qu'on peut appeler mathématique (mais la dénomination importe peu) dont la caractéristique est justement l'infini ?

Elle exercerait sur nous une attraction, comme une vocation, pour nous donner accès, malgré notre condition humaine, à quelque chose qui relève d'une certaine éternité, d'une certaine intemporalité, d'une certaine indépendance par rapport à l'espace, au point de l'espace, dans lequel on existe.

CORNELIUS CASTORIADIS : D'ailleurs, ce passage s'applique déjà au niveau du simple être vivant, qui, curieusement, utilise les mathématiques, exploite les résultats. En voici une : lorsqu'un chien poursuit un lapin, il résout une équation différentielle...

ALAIN CONNES : Il ne la résout pas, il cherche une solution.

CORNELIUS CASTORIADIS : Oui, il applique une solution à l'équation, qui s'appelle la courbe de poursuite, mais il ne la connaît pas, ça fait comme ça...

ALAIN CONNES : Je vais prendre un autre exemple. Chaque fois que nous effectuons un ajout, nous utilisons la retenue. Et la retenue, c'est ce que les mathématiciens appellent un nombre de cocycle⁴... Mais, bien sûr, une bonne connaissance de la terminologie ne nous aidera pas à faire des additions correctes !

CORNELIUS CASTORIADIS : Bien sûr. Il ne s'agit donc pas de l'être vivant en général mais de la spécificité de l'esprit ou du psychisme humain et, en particulier, de l'énorme innovation dans l'ordre de l'être constitué par l'imagination et l'imaginaire. Je crois que c'est tout à fait essentiel. Mais, pour revenir aux deux énigmes dont vous parliez, j'ai moi-même apprécié et travaillé sur les énormes problèmes que pose l'espace, les paradoxes de Zénon qui n'ont rien perdu de leur actualité, la question du discret et du continu⁵, l'approche du continuum par le discret... Et, là, nous frôlons la physique contemporaine, avec la quantification de l'espace... Quant aux nombres premiers, une des choses qui m'a le plus enthousiasmé lors de mes brèves études de mathématiques (à mon âge adulte, hélas !), c'est lorsque j'ai remarqué que le théorème fondamental, et même pratiquement tous les théorèmes concernant la véritable arithmétique des nombres premiers (c'est-à-dire les nombres qui n'ont d'autre diviseur qu'eux-mêmes et un) utilise l'analyse, le chapitre des mathématiques qui se préoccupe des limites et de la continuité. Et ils démontrent, par exemple, que la fréquence des nombres premiers au sein de l'ensemble des nombres naturels diminue suivant une fonction logarithmique qui n'a bien entendu rien à voir avec l'arithmétique. Mais ces démonstrations, celles d'Hadamard et de La Vallée-Poussin, regorgent d'intégrales ! On a donc l'impression - je n'aime pas ce mot mais bon, je vais l'utiliser pour aller vite - d'une certaine transcendance de l'objet des mathématiques, car on commence par les nombres premiers, on ouvre un tout autre chapitre d'analyse, et avec elle, par un autre chemin, on revient à des résultats concernant les nombres

⁴Cela se dit des points situés sur un même cercle.

⁵Cf. Castoriadis, C., *Remarques sur l'espace et le nombre*, dans *Figures du pensable*, trad. Hélène Arnold. Stanford, Californie : Stanford University Press, 2007.

premiers. Un peu comme le petit Marcel qui se promène avec ses parents à Combray. Le chemin lui paraît long, il ne reconnaît plus la campagne, il se sent perdu, et puis, au milieu d'un chemin qui lui semble être le bout du monde, le voilà soudain devant "la petite porte", au fond de la cour de sa maison..⁶

ALAIN CONNES : Plus tard, grâce à Atle Selberg, il y eut une démonstration élémentaire de ce théorème concernant la fréquence des nombres premiers. D'un point de vue un peu naïf, on pourrait dire que les nombres premiers jouent un peu le même rôle que les particules élémentaires en physique. Autrement dit, ce sont les composantes élémentaires des nombres entiers du point de vue de la multiplication. Le point de départ de la théorie que nous devons à Euler est que si l'on forme une série des puissances des nombres entiers, on obtient une fonction qui se factorise en un produit de facteurs indexés par les nombres premiers.

CORNELIUS CASTORIADIS : Heureusement, pour les physiciens, le nombre des particules élémentaires est fini, du moins le croient-ils. Je ne sais pas ce qu'ils feraient avec un nombre infini de particules élémentaires ; sans doute seraient-ils obligés de changer de méthode !

ALAIN CONNES : En fait, ils sont déjà confrontés à ce problème. Les diverses catégories de particules élémentaires sont en nombre fini, mais si l'on considère leurs états possibles, ceux-ci sont en nombre infini.

CORNELIUS CASTORIADIS : C'est vrai. Or, il y a une bifurcation qui apparaît immédiatement ici, puisque vous parlez de physique, ce qui ouvre deux voies. La première voie, que je voudrais éliminer immédiatement, est celle du réductionnisme. Cela part d'un constat d'évidence : notre cerveau, avec lequel nous faisons entre autres des mathématiques, est un objet physique et, en particulier, un objet vivant, un objet biologique. Et c'est ici que les biologistes interviennent pour affirmer : les mathématiques sont dans le cerveau, point final. Mais moi, je n'arrive pas à comprendre comment l'infini se trouve *dans* le cerveau ! L'infini est précisément une idéalité créée par l'imagination humaine, pour le fonctionnement de laquelle le cerveau est une condition nécessaire, mais en aucun cas suffisante. Et nous oublions trop souvent cette distinction.

L'autre voie mène à ce qu'un physicien américain, Wigner, a appelé "l'efficacité déraisonnable des mathématiques" lorsqu'on l'applique au monde réel⁷. Un énorme problème ! Dans votre livre avec Changeux, vous faites une remarque très importante à laquelle j'adhère entièrement, à savoir que la physique n'est pas réductible aux mathématiques. De même, les mathématiques ne sont pas réductibles à la physique. Il y a des branches de mathématiques "entières"...

ALAIN CONNES : Bien sûr, comme l'arithmétique par exemple...

CORNELIUS CASTORIADIS : ... - oui - qui n'ont pas de réalité physique, y compris les nombres premiers bien sûr, mais aussi l'espace de dimension infinie... Ils deviennent des outils mais n'ont pas de réalité physique. Il existe donc, dans le langage mathématique, une intersection non vide

⁶Proust, M., *À la recherche du temps perdu*, Volume 1, trad. C. K. Scott Moncrieff, éditions Wadsworth, 2006.

⁷Wigner, E., "L'efficacité déraisonnable des mathématiques dans les sciences naturelles", dans *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13 (1), 1960 - TR

entre l'univers physique et l'univers mathématique ; il y a une partie dans laquelle ils se croisent, et dans cette partie, l'efficacité des mathématiques est vraiment diabolique. Et puis, il y a une partie de la physique (c'est peut-être la partie la plus essentielle, en un sens) qui est extérieure au reste, tout comme il y a une partie des mathématiques qui est aussi extérieure au reste et qui est tout aussi essentielle. Et c'est, à mes yeux, un argument très fort contre tout réductionnisme.

ALAIN CONNES : Absolument. De plus, en ce qui concerne le cerveau humain, le point de vue matérialiste est très limité, non seulement parce que, bien sûr, le cerveau est un objet matériel et fini, mais surtout parce qu'il prétend comprendre ce qu'est la matière, parce qu'il se trompe et nous fait honte. Certes, pour peu qu'on s'intéresse aux phénomènes biologiques à l'échelle de la molécule, on peut en effet avoir une idée à peu près valable de ce à quoi on a affaire. Mais dès qu'on change de niveau pour s'intéresser aux particules élémentaires de la mécanique quantique, cette notion même de matière, de monde matériel, devient évanescence. Pourtant, c'est bien là la question essentielle à laquelle nous devons faire face : qu'est-ce que la réalité extérieure ? Et on peut prendre le même argument qui localise les mathématiques dans le cerveau, le "paraphraser" pour la réalité externe, et aboutir exactement à la même conclusion, à savoir que la réalité externe n'existe que dans le cerveau. Cela ne nous avance guère.

Pour moi, la réalité extérieure, tout ce qui est hors de nous, est essentiellement, d'une part, une source inépuisable d'information et, d'autre part, quelque chose qui ne peut être contourné, d'une certaine manière. Or, la réalité mathématique - quand on parle des nombres premiers, de l'infinité des nombres premiers - a exactement les caractéristiques d'être une source d'information, d'une part imprévisible, infaillible, et d'autre part ne pouvant être contournée, inévitable. Telle est la première expérience que l'on acquiert avec les mathématiques ; il est impossible à la fois de tout capturer d'un coup et de contourner l'essentiel des informations qu'il représente. Si quelqu'un, un jour, arrive avec un ordinateur très puissant et dit : J'ai produit le plus grand nombre premier, nous savons qu'il se trompe car nous avons la démonstration de l'infinitude des nombres premiers.

CORNELIUS CASTORIADIS : Ce qui est d'ailleurs une démonstration admirable déjà présente chez Euclide, et qu'un enfant de dix ans normalement intelligent doit être capable de comprendre.

ALAIN CONNES : Mais qui ne fonctionnerait absolument pas sur un ordinateur, puisque vous prenez les nombres, vous prenez le produit de tous les nombres précédents, et vous ajoutez un ; et c'est quelque chose d'absolument impossible à faire avec une machine. Mais c'est ainsi, les mathématiques sont une réalité véritablement incontournable, parfaitement définie et une source d'information inépuisable. Alors que la réalité extérieure, même dans un sens quelque peu intuitif du monde matériel qui nous entoure, est quelque chose de beaucoup plus difficile à définir et à percevoir. Car, quels que soient les progrès de la physique, nous ne disposons toujours que de modèles du monde extérieur. Pour appréhender l'espace, par exemple, un enfant ne dispose, jusqu'à un an, un an et demi, que d'une sorte de modèle archaïque du monde extérieur qui lui permet de se déplacer, de ne pas tomber dans un trou. Ce modèle, il le peaufinera, l'améliorera au cours de son existence, mais il ne restera jamais qu'un modèle. Et alors que, juste avant, nous parlions du problème du discret et du continu, cela montre une fois de plus que nous percevons le monde matériel qui nous entoure de manière intuitive, sans pouvoir l'aborder autrement que pas à pas, et par des modèles, qui sont évidemment des modèles mathématiques.

KATHARINA VON BULOW : Je voudrais revenir sur la prétention des matérialistes de localiser les mathématiques dans le cerveau...

ALAIN CONNES : Mais nous ne nions pas qu'ils soient présents dans le cerveau ; nous nions que ce soit leur seul lieu d'“existence”.

KATHARINA VON BULOW : Je sais que vous réfutez tous les deux cette réduction matérialiste et que ma question est quelque peu provocatrice. Je vais la poser à nouveau différemment. Le corps est matériel. Il contient biologiquement, physiquement un esprit (je pense au livre de Varela, *The Embodied Mind*) qui utilise, à son insu, les possibilités infinies des mathématiques, de la biologie, des sciences humaines, de la philosophie, par exemple. Mais, en fait, tout est déjà là, et il suffit de répéter la même recherche sans jamais la terminer. Qu'en pensez-vous ?

CORNELIUS CASTORIADIS : Une thèse matérialiste, rationaliste ou déterministe cohérente devrait affirmer que tout était déjà là, non seulement dans l'esprit humain, mais depuis le big bang. Tous les théorèmes mathématiques étaient là virtuellement, mais aussi la Passion selon saint Matthieu de Bach ou encore l'Olympia de Manet. En un sens, cette thèse est irréfutable, mais, en même temps, elle constitue ce que Platon aurait appelé un “abîme de bavardages inutiles”. Cela n'a aucun sens.

ALAIN CONNES : Je crois qu'on ne peut pas évoquer ce problème du matérialisme sans revenir sur la question du temps. L'une des raisons de la virulence du matérialisme est le darwinisme et son prétendu pouvoir explicatif. Mais il y a là une énorme tromperie, car ce pouvoir explicatif n'existe que dans la mesure où l'on comprend le passage du temps. Juste quelques mots à ce sujet. Dans la physique contemporaine, on fait du temps l'une des coordonnées de l'espace-temps, et on croit ainsi comprendre de quoi il s'agit. Mais en réalité, il y a ici une illusion totale. La physique n'explique pas et ne dit jamais pourquoi le temps passe, pourquoi le temps s'écoule. C'est une coordonnée, mais les coordonnées de l'espace ne circulent pas. Le temps, ça coule. Tant que nous n'aurons pas réfléchi de manière suffisamment précise à cet écoulement du temps, l'explication darwinienne restera un cercle vicieux. Les espèces disparaissent parce que le temps passe ; mais pourquoi le temps passe ? Que signifie ce passage du temps ? Que signifie notre perception de ce passage ?

Sur ce problème essentiel des relations entre le monde physique, le monde matériel et cet accès à l'infini, cet espace de “transcendance” qui fait l'originalité de l'âme humaine, j'avoue avoir une vision assez radicale. Je ne fais confiance qu'aux choses qui existent indépendamment du temps, pour ainsi attribuer à la seule réalité mathématique cette indépendance, cette intemporalité. Cela nous permet d'assurer son existence indépendamment de notre compréhension de l'écoulement du temps. Et j'y pose la première pierre sur laquelle construire ma conception de la réalité. Maintenant, prenons la question de l'intégration à l'intérieur de la réalité de l'univers physique que nous connaissons, celle du big bang, de la temporalité qui nous caractérise et qui caractérise l'univers dans lequel nous vivons. Et en travaillant sur cette problématique, en en discutant avec des physiciens, j'en suis arrivé plus ou moins à la conclusion que l'écoulement du temps n'a rien à voir avec une coordonnée dans l'espace-temps, n'a rien à voir avec ce modèle un peu naïf que l'on se fait de l'espace-temps, du temps et de la physique, mais, en fait, cela avait quelque chose à voir avec la thermodynamique. De manière paradoxale et provocatrice, je dirai que si le temps passe, c'est

parce que nous baignons dans le rayonnement à 3° Kelvin, ce rayonnement fossile issu du big bang. Pour moi, le temps passe parce que nous sommes incapables de connaître les distributions microscopiques de ce qui se passe dans l'univers qui nous entoure, et parce que ce manque d'information, cette sorte de perception macroscopique que nous en avons, fait qu'il passe de telle sorte que peu à peu notre corps se détruit, notre précision génétique s'érode. Et pour lutter contre cela, nous ne disposons que de ce phénomène discret, qu'est la transmission de la vie, la transmission aux autres générations de cette sorte de bible contenue dans notre information génétique, qui, parce qu'elle est discrète et rigide, sera très difficile à diminuer et saura au contraire lutter et prospérer contre cet écoulement du temps contre lequel nous ne pouvons rien parce qu'il est dû à la destruction, aux frictions et à notre incapacité à connaître, tous les détails du monde microscopique qui nous entoure.

CORNELIUS CASTORIADIS : Je voudrais revenir sur certains des sujets que vous venez d'évoquer et, d'abord, sur ce que vous avez dit sur Darwin et le darwinisme, qui est tout à fait correct mais insuffisant. Le cœur de la question est qu'il n'y a pas d'explication darwinienne, il n'y a qu'une tautologie grandiose : seuls ceux qui sont aptes à survivre peuvent survivre.

ALAIN CONNES : Mais nous sommes d'accord !

CORNELIUS CASTORIADIS : Maintenant, la question essentielle est double : premièrement, pourquoi y a-t-il différents êtres vivants ? Deuxièmement et surtout, pourquoi ces différences vont-elles dans le sens d'une complexification croissante du vivant ? Ici, Darwin n'a eu aucune réponse. Il s'est appuyé sur des exemples qui avaient très peu de valeur : variations au sein d'une espèce, etc. Puis, avec les mutations, il a trouvé non pas une réponse, mais une pierre qui manquait pour faire comprendre le fait de l'évolution : il y a évolution parce qu'il y a mutation. Mais ces mutations sont aléatoires, réalisées par hasard, et l'énigme réapparaît : comment se fait-il que des mutations aléatoires, certaines d'entre elles pouvant être mortelles ou pouvant altérer l'être qui les porte, produisent si souvent des formes cohérentes, capables de survivre et vivre ? voire d'être le siège de nouvelles mutations qui mèneront plus loin sur l'échelle de la complexité ? Sur cette question, le néo-darwinisme moderne n'a selon moi aucune réponse. On parle, là encore, d'aléatoire, mais dans mon esprit cet aléatoire - et non l'aléatoire trivial du lancer de dés ou de la carte qu'on tire - est un pseudonyme que les scientifiques déterministes et positivistes donnent au fait de la création. Parce que c'est une disjonction : soit quelque chose est une production à partir de ce qui existe, et on peut l'expliquer, dire comment ça a été fabriqué, soit ça ne l'est pas. Et le déterminisme appelle aléatoire ce qu'il ne peut expliquer, c'est-à-dire le fait de la création.

ALAIN CONNES : Nous sommes ici tout à fait d'accord.

CORNELIUS CASTORIADIS : Et il y a la complexification croissante, sur laquelle Stephen Jay Gould a tenté de donner une explication. Cela commence par une complexité nulle. Une première forme vivante apparaît, qui ne peut évidemment pas venir d'en dessous de zéro. Si donc cela va quelque part, ce sera vers la complexité, et après un million d'années; il y aura des formes très complexes... Mais la thermodynamique n'autorise pas un tel raisonnement, qui nous enseigne qu'il y a de nombreuses chances pour que ces formes perdent en complexité plutôt que de continuer à se complexifier. Ce qu'il ne voit pas ici, c'est que la vie est une création, et une création permanente de formes nouvelles, et que l'espèce humaine est une telle création, avec ce qui la caractérise

notamment, à savoir l'imagination créatrice.

Avant d'aborder la fameuse question de l'universalité des mathématiques, juste un mot sur ce qu'Alain Connes disait tout à l'heure du temps. Je ne crois pas que la thermodynamique puisse nous expliquer le temps. Le grand problème auquel on est confronté est évidemment la flèche du temps, pourquoi il y a un avant et un après, pourquoi il coule. Mais, là encore, il faut distinguer deux temps.

ALAIN CONNES : Absolument.

CORNELIUS CASTORIADIS : Il y a une époque que j'appellerai ensembliste-identitaire, ou algorithmique, pour laquelle la thermodynamique est précieuse. Mais si ce temps avait été le seul, il y aurait eu plusieurs formes initiales qui se seraient dégradées au bout d'une quinzaine de millions d'années. Pourtant, ce que l'on observe, c'est qu'il y a toujours l'émergence de nouvelles formes. Il existe donc un autre temps, qui n'est pas le simple temps de la détérioration mais le temps de la création, que j'appelle le temps poétique, car poiesis signifie création. Et le vrai avant/après est marqué en dessous. Êtes-vous d'accord ?

ALAIN CONNES : Entièrement. Certes, cela nécessiterait beaucoup plus d'explications, mais disons que je parlais ici de l'écoulement du temps au sens naïf du terme. Et il est bien évident qu'il faudrait distinguer au moins trois ou quatre formes du temps.

KATHARINA VON BULOW : Si l'on lit les pages absolument superbes de Saint Augustin ou d'autres grands philosophes sur le temps, on observe que ce qui leur faisait le plus peur, c'est le temps qui s'écoule, la détérioration, la mort, l'oubli.

ALAIN CONNES & CORNELIUS CASTORIADIS : Evidemment, c'est là le gros problème !

KATHARINA VON BULOW : Or, le christianisme, par l'intermédiaire du Christ et de saint Paul, a introduit très astucieusement le concept d'une cessation du temps, d'une rédemption du temps. De toute éternité, il est déjà arrivé et est déjà racheté, pour tous les chrétiens. Et vous parlez aussi de l'éternité et de l'infini. D'où vient ma question : les sciences, et surtout les mathématiques, ne sont-elles pas un langage qui à la fois ouvre l'infini et laisse des traces telles que l'homme peut s'imaginer éternel...?

CORNELIUS CASTORIADIS : En aucun cas ; il y a là un énorme saut logique.

ALAIN CONNES : Bien sûr, et la différence est que, tout en sachant très bien qu'on n'est pas éternel, cet écoulement du temps nous empêche de concevoir notre être comme indépendant du temps. Pour moi, l'idéal serait d'avoir une conscience de sa propre existence, de sa naissance jusqu'au moment présent, qui serait identique à celle que nous avons en tant qu'être physique limité vivant dans l'espace.

Le fait que nos bras soient si longs ne nous a jamais dérangés. La taille limitée de notre corps dans l'espace nous laisse parfaitement indifférents. Mais la limitation de la dimension de notre être dans

le temps nous angoisse évidemment. Et la raison pour laquelle cela nous angoisse, c'est que nous assistons impuissants à cet écoulement du temps, sans être réellement capables de nous percevoir, de percevoir notre totalité, indépendamment du temps. Or, je pense qu'on peut avoir des expériences qui vont à l'encontre de cela, notamment, à travers la pratique des mathématiques. Car les objets qu'on y traite, auxquels on a accès, ont justement ce caractère d'intemporalité, d'indépendance par rapport à l'espace et au temps, qui fait que la perception qu'on a permet d'accéder à quelque chose d'éternel. Cela ne signifie évidemment pas que celui qui vit une telle expérience soit éternel ; elle peut simplement rayonner sur toute la vie d'un individu, épaissir l'instant présent dans les deux sens, simultanément dans le passé et dans le futur. C'est, pour moi, la contrepartie essentielle du fait que les mathématiques ne sont justement pas un objet physique, ni localisables dans le monde physique.

CORNELIUS CASTORIADIS : C'est tout à fait juste. Et on peut remarquer, à propos de ce que dit Katharina, que le christianisme en particulier mais aussi la majorité des religions, ont presque toutes inventé cette étonnante "bizarrerie" pour répondre à cette angoisse de mort. Il y a une éternité quelque part, ailleurs, et à cette éternité nous participons personnellement. Et il y a un infini, qui n'est pas seulement comme l'infini des infinis en mathématiques, mais qui est une personne, qui est bonne, qui nous aime, etc. Et c'est pendant des siècles que cela a fonctionné. Quant à cette expérience de l'éternité, de l'intemporalité, les mathématiques nous l'ouvrent, certes, mais les grandes œuvres d'art aussi, par exemple. Une fois de plus, la Passion selon Saint Matthieu a été créée à Leipzig, en telle ou telle année, par un individu qui avait 20 enfants... Mais tout cela est totalement sans rapport avec le sens et le contenu musical de la Passion selon Saint Matthieu. L'homme crée et a accès à un monde d'idéalités - imperceptibles certes qui sont pourtant immanentes, et qu'il parvient à laisser entrer dans son monde propre.

Les mathématiques en sont une excellente manifestation, tout comme l'art et même la grande pensée. Encore un mot sur la question, sur laquelle vous avez eu raison, en disant que c'est devenu évanescant avec la physique moderne. Mais il y a plus : les catégories elles-mêmes de notre perception ordinaire sont devenues évanescences avec elle, en citant par exemple la séparabilité en quanta, ou l'identité. Et je ne parle pas de causalité. La physique nous fait ainsi découvrir des strates d'être différentes de la strate habituelle dans laquelle nous vivons, et c'est une des raisons de la fascination qu'elle exerce.

Dernier point avant d'en venir à la question de l'intemporalité. J'étais très heureux de constater notre accord à ce sujet. On ne travaille pas les mathématiques uniquement avec son cerveau au sens trivial. Le psychisme, l'âme humaine, ne peut rien s'il n'y a pas simultanément représentation, désir ou affect. On fait des mathématiques parce qu'on désire faire des mathématiques et parce que faire des mathématiques procure du plaisir.

ALAIN CONNES : Absolument. Et aussi parce qu'on est attiré par le mystère...

CORNELIUS CASTORIADIS : Oui, mais c'est le cas des trois à la fois ; la fascination pose la question du sens. Mais en fin de compte, c'est l'être humain tout entier qui est impliqué. Et c'est la raison pour laquelle je ne crois pas qu'une machine soit un jour capable de penser. Je ne vois pas une machine se passionner pour la démonstration de l'infinitude des nombres premiers. Pourquoi cela

l'intéresserait-elle ?

Or, sur la question de l'universalité ou de l'intemporalité, comment se manifeste-t-elle ? D'abord, je crois, grâce à une fantastique permanence dans le temps de nos créations. Deuxièmement, grâce à la certitude que nous avons et à laquelle d'ailleurs la physique apporte une sorte de corroboration - que le théorème de Pythagore n'est pas simplement valable à partir de 540 ans avant Jésus-Christ, quand Pythagore, à Samos ou en Italie du Sud, l'inventait, en faisait la démonstration, mais qu'il était déjà là dès la formation du système solaire...

ALAIN CONNES : Exactement.

CORNELIUS CASTORIADIS : ... en tant que quelque chose d'intrinsèque au fonctionnement du monde physique, que là déjà, le carré de l'hypoténuse était égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Troisièmement, et c'est le point le plus important, nous savons pouvoir enseigner les mathématiques et faire admettre à tout être humain leurs vérités. Ce n'est pas le cas des autres créations humaines, culturelles, etc., pour lesquelles c'est impossible, extrêmement difficile. Si je prends un "primitif" banalement intelligent et que je l'amène à l'Opéra pour lui faire écouter Tristan et Isolde, tombera-t-il en extase ? Ce n'est pas évident du tout. Pour qu'il comprenne quelque chose, qu'il ait accès à cette œuvre, il faudrait un très long processus d'accumulation. Par contre, je saurais lui apprendre, l'amener à comprendre ce que sont les espaces de Banach⁸ et lui faire concéder à leur existence. Cela me semble évident et capital.

Et c'est aussi pour cela que je suis en désaccord avec votre "associé" Jean-Pierre Changeux qui écrit, dans votre livre en commun, que peut-être les êtres des autres planètes ont d'autres mathématiques. Il ne se rend pas compte des conséquences de ce qu'il dit, car s'il existe d'autres mathématiques, il existe aussi une autre physique...

ALAIN CONNES : ... et une autre chimie, bien sûr...

CORNELIUS CASTORIADIS : ... et d'autres molécules. Ainsi, ce que l'on dit sur terre est faux, les lois de la physique ne sont pas universelles, etc. Ce n'est pas possible ! Êtes-vous d'accord avec cette distinction entre une intemporalité propre aux mathématiques et une intemporalité purement de droit, qui n'est valable que pour certaines de nos autres créations ?

ALAIN CONNES : Entièrement. J'ajouterai même que les mathématiques font appel, selon moi, à un sens différent de ceux que l'on met en œuvre dans les autres domaines de la création humaine. Bien sûr, on utilise aussi la vision, l'ouïe, etc., mais ces sens ont accès à quelque chose dont, justement, l'universalité est beaucoup plus grande, beaucoup plus forte, beaucoup plus communicable.

KATHARINA VON BULOW : Il va certainement falloir arrêter...

CORNELIUS CASTORIADIS : Un dernier point, puisque nous avons déjà dépassé nos limites. Pour revenir sur "l'efficacité déraisonnable des mathématiques", leur applicabilité à la physique, je for-

⁸Les espaces de Banach sont les objets étudiés par l'analyse fonctionnelle et portent le nom du fondateur de cette discipline, le mathématicien polonais Stephan Banach (1892-1945). - TR

mulerai ainsi la chose, en sollicitant une dernière fois l'avis d'Alain Connes, car c'est "ma" thèse ontologique. Il y a, dans l'être en général, une dimension qui est, comme on dit en mathématiques, partout dense, partout présente, qui relève de ce que j'appelle une logique "ensembliste-identitaire", c'est-à-dire une partie des mathématiques.

ALAIN CONNES : Absolument. Et cette partie des mathématiques est présente même dans le langage.

CORNELIUS CASTORIADIS : Bien sûr, dans le langage, dans les créations humaines, dans un poème aussi, dans une fugue de Bach, dans Tristan et Isolde, dans un tableau, partout, et dans les particules, etc. Mais que ce soit partout ne veut pas dire que cela épuise l'être. Et dans la mesure où cela n'épuise pas l'être, cela n'épuise pas l'existence physique, ni l'existence humaine, ni la création mathématique elle-même. C'est la raison pour laquelle il y a cette intersection, ce croisement partiel extrêmement important entre le monde physique et le monde mathématique.

ALAIN CONNES : Je crois que je suis entièrement d'accord avec cela.

Traduction d'un extrait de l'article Dirac operators and spectral triples for some fractal sets built on curves d'Erik Christensen, Cristina Ivan et Michel L. Lapidus  (Denise Vella-Chemla, août 2023)

2. Triplet spectral pour un cercle

Beaucoup du contenu de cette section est bien connu (voir par exemple [14]) mais n'est habituellement pas présenté dans le langage des triplets spectraux. Il est utile, pourtant, de présenter ce contenu ici parce qu'à notre connaissance, il est seulement disponible dans des références dispersées et non dans la forme dont nous avons besoin. En particulier, on étudiera de façon quelque peu détaillée les domaines de définition des opérateurs non bornés pertinents pour notre objectif et les dérivations.

Soit C_r le cercle dans le plan complexe de rayon $r > 0$ et centré en 0. Comme d'habitude en géométrie non-commutative, on n'étudie pas le cercle directement mais on étudie plutôt une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues sur le cercle. De ce point de vue, il semble plus facile de regarder l'algèbre des fonctions complexes continues $2\pi r$ -périodiques sur la droite réelle. Appelons $\mathcal{A}C_r$ cette algèbre. On notera $(1/2\pi r)\mathbf{m}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur l'intervalle $[-\pi r, \pi r]$ et soit π_r la représentation standard de $\mathcal{A}C_r$ désignant les opérateurs de multiplication sur l'espace de Hilbert H_r qui est définie par $H_r := L([-\pi r, \pi r], (1/2\pi r)\mathbf{m})$. L'espace H_r a une base orthonormale canonique, notée $(\phi_k^r)_{k \in \mathbb{Z}}$, qui consiste en les fonctions dans $\mathcal{A}C_r$ données par

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \phi_k^r(x) := \exp\left(\frac{ikx}{r}\right).$$

Ces fonctions sont les fonctions propres de l'opérateur différentiel $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ et les valeurs propres correspondantes sont $\{k/r \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Le choix naturel pour l'opérateur de Dirac pour cette situation est la fermeture de la restriction de l'opérateur ci-dessus à la portée linéaire de la base $\{\phi_k^r \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On notera D_r cet opérateur sur H_r . Il est bien connu que D_r est auto-adjoint et que $\text{dom}(D_r)$, le domaine de définition de D_r , est donné par

$$\forall f \in H_r : f \in \text{dom } D_r \iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k^2}{r^2} |\langle f \mid \phi_k^r \rangle|^2 < \infty$$

où $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est le produit intérieur de H_r .

Pour un élément $f \in \text{dom } D_r$, on a $D_r f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (k/r) \langle f \mid \phi_k^r \rangle \phi_k^r$. L'opérateur auto-adjoint D_r a pour spectre $\{k/r \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et chacune de ses valeurs propres a une multiplicité de 1. De plus, toute fonction continument différentiable $2\pi r$ -périodique f sur \mathbb{R} satisfait

$$[D_r, \pi_r(f)] = \pi_r(-if'),$$

de telle façon qu'on obtient un triplet spectral associé au cercle C_r de la façon suivante.

¹Référence : Advances in mathematics 217 vol. 1 (2008) p. 47-48

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870807001855>.

Définition 2.1. *Le triplet spectral naturel, $\text{TripletSpectral}_n(C_r)$, pour l'algèbre du cercle $\mathcal{A}C_r$ est défini par $\text{TripletSpectral}_n(C_r) := (\mathcal{A}C_r, H_r, D_r)$.*

Un des principaux ingrédients dans les arguments à venir est la possibilité de construire des triplets spectraux *intéressants* comme sommes directes de modules de Fredholm non bornés, chacun d'eux transportant seulement une toute petite quantité de l'information de l'espace total. Dans le cas des triplets naturels pour les cercles, le nombre 0 est toujours une valeur propre et par conséquent, si l'opération somme est exécutée un nombre dénombrable de fois, la valeur 0 sera d'une multiplicité infinie pour l'opérateur de Dirac qui est obtenu par une construction par somme directe. Pour éviter ce problème, on remplacera, pour le cas C_r , l'opérateur de Dirac D_r par un opérateur légèrement modifié, D_r^t qui est le translaté de D_r donné par

$$D_r^t := D_r + \frac{1}{2r}I.$$

L'ensemble des valeurs propres devient maintenant $\{(2k + 1)/2r \mid k \in \mathbb{Z}\}$, mais le domaine de définition est le même que pour D_r et, *en particulier*, pour toute fonction $f \in \mathcal{A}C_r$, on a $[D_r^t, \pi_r(f)] = [D_r, \pi_r(f)]$. Par conséquent, la translation ne change pas vraiment l'effet du triplet spectral.

Définition 2.2. *Le triplet spectral translaté, $\text{TripletSpectral}_t(C_r)$, pour l'algèbre du cercle $\mathcal{A}C_r$ est défini par $\text{TripletSpectral}_t(C_r) = (\mathcal{A}C_r, H_r, D_r^t)$.*

La prochaine question est de déterminer pour quelles fonctions f de $\mathcal{A}C_r$ le commutateur $[D_r^t, \pi_r(f)]$ est borné et densément défini. Ceci est fait dans le lemme suivant qui est standard, mais que nous incluons parce que son assertion particulière ne peut se trouver aisément dans la forme dont nous avons besoin. D'un autre côté, la preuve utilise de l'analyse élémentaire et pour cette raison, elle sera omise.

Lemma 2.3. *Soit $f \in \mathcal{A}C_r$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $[D_r^t, \pi_r(f)]$ est densément défini et borné.
- (ii) $f \in \text{dom}(D_r)$ et $D_r f$ est essentiellement borné.
- (iii) Il existe une fonction mesurable, essentiellement bornée g sur l'intervalle $[-\pi r, \pi r]$ telle que

$$\int_{-\pi r}^{\pi r} g(t)dt = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [-\pi r, \pi r] : f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)dt.$$

Si les conditions ci-dessus sont satisfaites, alors $g(x) = (iD_r f)(x)$ presque partout.

On terminera cette section en mentionnant quelques propriétés de ce triplet spectral. Nous ne démontrerons aucune de ces assertions car elles sont aisées à vérifier. D'abord, remarquons que toutes les assertions ci-dessous sont vérifiées à la fois par les triplets translattés $\text{TripletSpectral}_t(C_r)$ et par les triplets naturels $\text{TripletSpectral}_n(C_r)$, bien qu'on ne les énonce que pour les triplets naturels $\text{TripletSpectral}_n(C_r)$.

Théorème 2.4. Soit $r > 0$ et soit $(\mathcal{A}_r C, H_r, D_r)$ le triplet spectral naturel du cercle $\text{TripletSpectral}_n(C_r)$. Alors les deux résultats suivants sont vérifiés :

- (i) La métrique, disons d_r , induite par le triplet spectral naturel $\text{TripletSpectral}_n(C_r)$ sur le cercle est la distance géodésique sur C_r .
- (ii) Le triplet spectral naturel $\text{TripletSpectral}_n(C_r)$ est sommable pour tout $s > 1$, mais pas pour $s = 1$. Par conséquent, il a pour dimension métrique 1.

Références

- [5] A. Connes, Compact metric spaces, Fredholm modules, and hyperfiniteness, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 9. (1989) 207–220, <https://www.cambridge.org/core/journals/ergodic-theory-and-dynamical-systems/article/compact-metric-spaces-fredholm-modules-and-hyperfiniteness/2ACB2EBA0AA0A40F9D890AA9915500F7>
- [6] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, 1994, <https://alainconnes.org/wp-content/uploads/book94bigpdf.pdf>
- [7] A. Connes, Unpublished notes on a Dirac operator associated to the Cantor subset of the unit interval (electronic message to Michel Lapidus, May 2002).
- [8] A. Connes, M. Marcolli, A walk in the noncommutative garden, <https://arxiv.org/pdf/math/0601054.pdf>
- [9] A. Connes, D. Sullivan, Quantized calculus on S^1 and quasi-Fuchsian groups, unpublished, 1994, <https://www.math.stonybrook.edu/~dennis/publications/PDF/DS-pub-0093.pdf>
- [14] R. E. Edwards, *Fourier Series. A modern introduction*, Vol. 1, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics 64, Springer-Verlag, New York (1979).

La théorie quantique de l'émission et de l'absorption de radiation

P. A. M. Dirac

St. John's College, Cambridge, et Institut de Physique Théorique, Copenhague

Communiquée par N. Bohr, For. Mem. R.S. Reçue le 2 février 1927 ¹

1 Introduction et résumé

La nouvelle théorie quantique, basée sur la supposition que les variables dynamiques n'obéissent pas à la loi commutative de la multiplication, s'est maintenant développée suffisamment pour former une théorie complète de la dynamique. Elle permet de traiter mathématiquement le problème de n'importe quel système dynamique composé d'un certain nombre de particules et des forces instantanées agissant entre elles, lorsque ce système est décrit par une fonction hamiltonienne, et on peut interpréter les mathématiques d'un point de vue physique par une méthode assez générale. D'autre part, presque rien n'a été fait jusqu'à présent sur l'électrodynamique quantique. Les questions du traitement correct d'un système dans lequel les forces se propagent à la vitesse de la lumière plutôt qu'instantanément, de la production d'un champ électromagnétique par un électron en mouvement, et de la réaction de ce champ sur l'électron n'ont pas encore été traitées. De plus, il y a une sérieuse difficulté pour faire que la théorie satisfasse toutes les exigences du principe restreint de la relativité, puisqu'alors une fonction hamiltonienne ne peut plus être utilisée. Cette question de la relativité est, bien sûr, liée aux précédentes, et il sera impossible de répondre à aucune de ces questions sans répondre à toutes. Pourtant, il semble possible de construire une théorie satisfaisante de l'émission de radiation et de la réaction du champ de la radiation sur le système l'émettant sur la base d'une cinématique et d'une dynamique qui ne soient pas strictement relativistes. C'est le principal objectif de cet article. La théorie est non-relativiste seulement par le fait que le temps est toujours compté via un c -nombre, plutôt que d'être traité symétriquement avec l'espace des coordonnées. La variation de la relativité de la masse avec la vitesse est prise en compte sans difficulté.

Les idées sous-tendant la théorie sont très simples. Considérons un atome interagissant avec un champ de radiation, que l'on peut supposer pour sa définissabilité comme étant enfermé dans une boîte de telle sorte à n'avoir qu'un ensemble discret de degrés de liberté. En résolvant la radiation en ses composantes de Fourier, on peut considérer l'énergie et la phase de chacun des composants comme étant des variables dynamiques décrivant le champ de radiation. Ainsi, si E_r est l'énergie d'un composant appelé r et si θ_r est la phase correspondante (définie comme la durée depuis laquelle l'onde est dans une phase standard), on peut supposer chaque E_r et θ_r comme formant une paire de variables canoniquement conjuguées. En l'absence de toute interaction entre le champ et l'atome, le système complet champ plus atome sera décrit par l'hamiltonien

$$(1) \quad H = \sum_r E_r + H_0$$

égal à l'énergie totale, H_0 étant l'hamiltonien pour l'atome seul, puisque les variables E_r, θ_r satisfont trivialement leurs équations canoniques de mouvement

$$\dot{E}_r = -\frac{\partial H}{\partial \theta_r} = 0, \quad \dot{\theta}_r = -\frac{\partial H}{\partial E_r} = 1.$$

¹Traduction Denise Vella-Chemla, avril 2019.

Quand il y a interaction entre le champ et l'atome, cela pourrait être pris en compte par la théorie classique par une addition d'un terme d'interaction à l'hamiltonien (1), qui pourrait être une fonction des variables de l'atome et des variables E_r, θ_r , qui décrivent le champ. Ce terme d'interaction donnerait l'effet de la radiation sur l'atome, et également la réaction de l'atome sur le champ de radiation.

Pour qu'une méthode analogue puisse être utilisée en théorie quantique, il est nécessaire de supposer que les variables E_r, θ_r , sont des q -nombres satisfaisant les conditions quantiques standard $\theta_r E_r - E_r \theta_r = ih$ etc., où h est $(2\pi)^{-1}$ fois la constante de Planck habituelle, comme les autres variables dynamiques du problème. Cette supposition donnent immédiatement à la radiation des propriétés quantiques lumineuses². Car si ν_r est la fréquence du composant r , $2\pi\nu_r\theta_r$ est une variable d'angle, de telle façon que son conjugué canonique $E_r/2\pi\nu_r$ peut seulement prendre un ensemble discret de valeurs différant par des multiples de h , ce qui signifie que E_r peut uniquement varier par multiples entiers du quantum $(2\pi h)\nu_r$. Si maintenant on ajoute un terme d'interaction (pris en compte par la théorie classique) à l'hamiltonien (1), le problème peut être résolu selon les règles de la mécanique quantique, et l'on s'attend à obtenir les résultats corrects pour l'action de la radiation et de l'atome l'un sur l'autre. Nous montrerons que nous obtenons effectivement les lois correctes pour l'émission et l'absorption de radiation, et les valeurs correctes pour les A et B d'Einstein. Dans la théorie précédente de l'auteur³, où les énergies et les phases des composants de la radiation étaient des c -nombres, seuls les B pouvaient être obtenus, et la réaction de l'atome sur la radiation ne pouvait pas être prise en compte.

Il sera également montré que l'hamiltonien qui décrit l'interaction de l'atome et des ondes électromagnétiques peut être rendu identique à l'hamiltonien pour le problème de l'interaction d'un atome avec un ensemble de particules en mouvement à la vitesse de la lumière et satisfaisant les statistiques d'Einstein-Bose, par un choix judicieux de l'énergie d'interaction pour les particules. Le nombre de particules ayant n'importe quelle direction de mouvement et d'énergie, qui peut être utilisé comme une variable dynamique dans l'hamiltonien pour les particules, est égal au nombre de quanta d'énergie de l'onde correspondante dans l'hamiltonien des ondes. Il y a ainsi une harmonie complète entre les descriptions ondulatoire et lumineuse quantique de l'interaction. Nous allons effectivement construire la théorie à partir du point de vue quantique et montrer que l'hamiltonien se transforme naturellement en une formule qui ressemble à la formule pour les ondes.

Le développement mathématique de la théorie a été rendu possible par une théorie générale de l'auteur de transformation des matrices quantiques⁴. Comme nous comptons le temps comme un c -nombre, nous pouvons utiliser la notion de valeur de toute variable dynamique à tout instant. Cette valeur est un q -nombre, qui peut être représenté par une "matrice" généralisée selon de nombreux modèles matriciels différents, certains d'entre eux pouvant avoir des intervalles continus pour les colonnes et les lignes, et pouvant nécessiter que les éléments des matrices appartiennent à certaines sortes d'infinités (du type donné par les fonctions δ)⁵. Un modèle de matrices peut être trouvé dans lequel tous les ensembles souhaités de constantes d'intégration du système dynamique qui commutent sont représentés par des matrices diagonales, ou dans lequel les variables qui commutent sont représentées par des matrices qui sont diagonales à un temps spécifié⁶. Les valeurs des

²Des suppositions similaires ont été utilisées par Born and Jordan [*Z. f. Physik*, vol. 34, p. 886 (1925)] dans le but de prendre en charge la formule classique de l'émission de radiation par un dipole en théorie quantique, et par Born, Heisenberg and Jordan [*Z. f. Physik*, vol. 35, p. 606 (1925)] pour calculer les fluctuations d'énergie dans le champ de radiation du corps noir.]

³*Roy. Soc. Proc. A*, vol. 112, p. 661, §5 (1926). Cela est cité ensuite dans *loc. cit.*, I.

⁴*Roy. Soc. Proc. A*, vol. 113, p. 621 (1927). Cela est cité ensuite par *loc. cit.*, II. Une théorie globalement équivalente a été obtenue indépendamment par Jordan [*Z. f. Physik*, vol. 40, p. 809 (1926)]. Voir aussi F. London, *Z. f. Physik*, vol. 40, p. 193 (1926)

⁵*Loc. cit. II*, §2.

⁶On peut utiliser un modèle de matrices dans lequel les variables qui commutent sont à tout instant représentées

éléments diagonaux d'une matrice diagonale représentant un q -nombre quelconque sont les valeurs caractéristiques de ce q -nombre. Les coordonnées cartésiennes ou le moment auront en général toutes les valeurs caractéristiques de $-\infty$ à $+\infty$, alors qu'une variable d'action prend seulement un ensemble discret de valeurs caractéristiques. (Nous prendrons pour règle d'utiliser des lettres sans prime (')) pour dénoter les variables dynamiques ou q -nombres, et les mêmes lettres avec prime (') ou double prime ('') pour dénoter leurs valeurs caractéristiques. Les fonctions de transformation ou fonctions propres sont des fonctions des valeurs caractéristiques et non les q -nombres eux-mêmes, de telle sorte qu'elles peuvent toujours s'écrire en termes de variables avec prime (' ou '').)

Si $f(\xi, \eta)$ est n'importe quelle fonction des variables canoniques ξ_k, η_k , la matrice représentant f à tout instant dans le modèle de matrices dans lequel les ξ_k à l'instant t sont des matrices diagonales peut s'écrire sans aucun problème, puisque les matrices représentant les ξ_k et les η_k eux-mêmes au temps t sont connues, notamment,

$$(2) \quad \begin{cases} \xi_k(\xi' \xi'') = \xi'_k \delta(\xi' \xi'') \\ \eta_k(\xi' \xi'') = -ih \delta(\xi'_1 - \xi''_1) \dots \delta(\xi'_{k-1} - \xi''_{k-1}) \delta(\xi'_k - \xi''_k) \delta(\xi'_{k+1} - \xi''_{k+1}) \dots \end{cases}$$

Ainsi, si l'hamiltonien H est défini comme une fonction des ξ_k et des η_k , on peut immédiatement écrire la matrice $H(\xi' \xi'')$. On peut ainsi obtenir la fonction de transformation, disons (ξ' / α') , qui se transforme en un modèle de matrice (α) dans lequel l'hamiltonien est une matrice diagonale, puisque (ξ' / α') doit satisfaire l'équation intégrale

$$(3) \quad \int H(\xi' \xi'') d\xi''(\xi'' / \alpha') = W(\alpha') . (\xi' / \alpha'),$$

dans lequel les valeurs caractéristiques $W(\alpha')$ sont les niveaux d'énergie. Cette équation est juste l'équation d'onde de Schrödinger pour les fonctions propres (ξ' / α') , qui devient une équation différentielle ordinaire quand H est une fonction algébrique simple des ξ_k et des η_k selon les équations spéciales (2) des matrices représentant les ξ_k et les η_k . L'équation (3) peut s'écrire sous la forme plus générale

$$(3') \quad \int H(\xi' \xi'') d\xi''(\xi'' / \alpha') = ih \partial(\xi' / \alpha') / \partial t,$$

forme dans laquelle elle peut s'appliquer à des systèmes pour lesquels l'hamiltonien fait intervenir le temps explicitement.

On peut avoir un système dynamique spécifié par un hamiltonien H qui ne peut pas être exprimé comme une fonction algébrique d'un quelconque ensemble de variables canoniques, mais qui peut être représenté par une matrice $H(\xi' \xi'')$. Un tel problème peut encore être résolu par la méthode présente, puisqu'on peut encore utiliser l'équation (3) pour obtenir les niveaux d'énergie et les fonctions propres. Nous trouverons que l'hamiltonien qui décrit l'interaction d'un quantum lumineux et d'un système atomique est de ce type plus général, de telle sorte que l'interaction peut être traitée mathématiquement, bien que l'on ne puisse pas alors parler d'énergie potentielle d'interaction au sens usuel.

Il faudrait observer qu'il y a une différence entre une onde lumineuse et l'onde de de Broglie ou Schrödinger associée aux quanta lumineux. D'abord, l'onde lumineuse est toujours réelle, alors que l'onde de de Broglie associée à un quantum lumineux se déplaçant dans une direction définie doit

par des matrices diagonales si l'on sacrifie la condition que les matrices satisfont les équations du mouvement. La fonction de transformation d'un tel modèle dans un modèle dans lequel les équations du mouvement sont satisfaites utilisera le temps explicitement. Voir p. 628 in *loc. cit.* II.

faire intervenir une exponentielle imaginaire. Une différence plus importante est que leurs intensités doivent être interprétées de façons différentes. Le nombre de quanta lumineux par unité de volume associés à une onde lumineuse mono-chromatique est égal à l'énergie par unité de volume de l'onde divisée par l'énergie $(2\pi h)\nu$ d'un quantum lumineux simple. D'un autre côté, une onde de de Broglie mono-chromatique d'amplitude a (multipliée par le facteur exponentiel imaginaire) doit être interprétée comme représentant a^2 quanta lumineux par unité de volume pour toutes les fréquences. C'est un cas spécial de la règle générale pour interpréter l'analyse des matrices⁷ selon lequel, si (ξ'/α') ou $\psi_{\alpha'}(\xi'_k)$ est la fonction propre des variables ξ_k de l'état α' d'un système atomique (ou particule simple), $|\psi_{\alpha'}(\xi'_k)|^2$ est la probabilité que chaque ξ_k ayant la valeur ξ'_k , [ou $|\psi_{\alpha'}(\xi'_k)|^2 d\xi'_1 d\xi'_2 \dots$ soit la probabilité de chaque ξ_k se trouvant entre les valeurs ξ'_k et $\xi'_k + d\xi'_k$, quand les ξ_k parcourent des intervalles continus de valeurs caractéristiques] selon la supposition que toutes les phases du système sont équiprobables. L'onde dont l'intensité doit être interprétée de la première de ces deux manières apparaît dans la théorie seulement quand on traite un assemblage de particules associées satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose. Il n'y a alors pas de telle onde associée aux électrons.

2 Perturbation d'un assemblage de systèmes indépendants

Nous allons maintenant considérer les transitions produites dans un système atomique par une perturbation arbitraire. La méthode que nous adopterons sera celle précédemment fournie par l'auteur⁸ qui amène simplement aux équations qui déterminent la probabilité du système d'être dans un état stationnaire quelconque du système non perturbé à tout instant⁹. Cela, bien sûr, fournit immédiatement le nombre probable de systèmes dans cet état à cet instant pour un assemblage de systèmes qui sont indépendants les uns des autres et sont tous perturbés de la même manière. L'objet de la présente section est de montrer que les équations pour les niveaux de transition pour ces nombres probables peuvent être mises sous forme hamiltonienne de manière simple, ce qui autorisera des développements plus avant dans la théorie à construire.

Soit H_0 l'hamiltonien du système non perturbé et V l'énergie perturbante, qui peut être une fonction arbitraire des variables dynamiques et peut ou peut ne pas faire intervenir le temps explicitement, de telle sorte que l'hamiltonien pour le système perturbé soit $H = H_0 + V$. Les fonctions propres du système perturbé doivent satisfaire l'équation d'onde

$$ih\partial\psi/\partial t = (H_0 + V)\psi,$$

où $(H_0 + V)$ est un opérateur. Si $\psi = \sum_r a_r \psi_r$ est la solution de l'équation qui satisfait les conditions initiales elles-mêmes, où les ψ_r sont des fonctions propres du système non perturbé, chacune associée à un état stationnaire indicé par r , et si les a_r sont des fonctions du temps seulement, alors $|a_r|^2$ est la probabilité que le système soit dans l'état r à tout moment. Les a_r doivent être initialement normalisés, et resteront du coup toujours normalisés. La théorie s'appliquera directement à un assemblage de N systèmes indépendants similaires si nous multiplions chacun de ces a_r par $N^{1/2}$ de manière à rendre $\sum_r |a_r|^2 = N$. Nous aurons maintenant que $|a_r|^2$ est le nombre probable de systèmes dans l'état r .

L'équation qui détermine le niveau de transition des a_r est¹⁰

$$(4) \quad ih\dot{a}_r = \sum_s V_{rs} a_s,$$

⁷ *Loc. cit.* II. §§6, 7

⁸ *Loc. cit.* I.

⁹ La théorie a été récemment étendue par Born [*Z. f. Physik*, vol. 40, p. 167 (1926)] de manière à prendre en compte les transitions adiabatiques dans les états stationnaires qui pourraient être produits par la perturbation aussi bien que par les transitions. Cette extension n'est pas utilisée dans le présent article.

¹⁰ *Loc. cit.* I, equation (25)

où les V_{rs} 's sont les éléments de la matrice représentant V . L'équation imaginaire conjuguée est

$$(4') \quad -i\hbar\dot{a}_r^* = \sum_r V_{rs}^* a_s^* = \sum_s a_s^* V_{sr}$$

Si l'on regarde a_r et $i\hbar\dot{a}_r^*$ comme des conjugués canoniques, les équations (4) et (4') prennent la forme hamiltonienne avec la fonction hamiltonienne $F_1 = \sum_{rs} a_r^* V_{rs} a_s$, notamment,

$$\frac{da_r}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \frac{\partial F_1}{\partial a_r^*}, \quad i\hbar \frac{da_r^*}{dt} = -\frac{\partial F_1}{\partial a_r}.$$

Nous pouvons transformer en variables canoniques N_r, ϕ_r , par la transformation de contact

$$a_r = N_r^{\frac{1}{2}} e^{-i\phi_r/\hbar}, \quad a_r^* = N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\phi_r/\hbar}.$$

Cette transformation rend les nouvelles variables N_r et ϕ_r réelles, N_r étant égal à $a_r a_r^* = |a_r|^2$, le nombre probable de systèmes dans l'état r , et ϕ_r/\hbar étant la phase de la fonction propre qui les représente. L'hamiltonien F_1 devient maintenant

$$F_1 = \sum_{rs} V_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} N_s^{\frac{1}{2}} e^{i(\phi_r - \phi_s)/\hbar},$$

et les équations qui déterminent le niveau auquel les transitions ont lieu ont la forme canonique

$$\dot{N}_r = -\frac{\partial F_1}{\partial \phi_r}, \quad \dot{\phi}_r = \frac{\partial F_1}{\partial N_r}.$$

Une manière plus pratique de mettre les équations de transition dans une forme hamiltonienne peut être obtenue à l'aide des quantités

$$b_r = a_r e^{-iW_r t/\hbar}, \quad b_r^* = a_r^* e^{iW_r t/\hbar},$$

W_r étant l'énergie de l'état r . On a $|b_r|^2$ égal à $|a_r|^2$, le nombre probable de systèmes dans l'état r . Pour \dot{b}_r , on trouve

(5)

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{b}_r &= W_r b_r + i\hbar\dot{a}_r e^{-iW_r t/\hbar} \\ &= W_r b_r + \sum_s V_{rs} b_s e^{i(W_s - W_r)t/\hbar} \end{aligned}$$

avec l'aide de (4). Si on pose $V_{rs} = v_{rs} b_s e^{i(W_r - W_s)t/\hbar}$ de telle sorte que v_{rs} est une constante quand V ne fait pas intervenir le temps explicitement, cela se réduit à

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{b}_r &= W_r b_r + \sum_s v_{rs} b_s \\ &= \sum_s H_{rs} b_s, \end{aligned}$$

où $H_{rs} = W_r \delta_{rs} + v_{rs}$, est un élément de la matrice de l'hamiltonien global $H = H_0 + V$ avec le facteur temps $e^{i(W_r - W_s)t/\hbar}$ éliminé, de telle façon que H_{rs} est une constante quand H ne fait pas intervenir le temps explicitement. L'équation (5) est de la même forme que l'équation (4), et peut être mise sous forme hamiltonienne de la même manière.

On devrait remarquer que l'équation (5) est obtenue directement si l'on écrit l'équation de Schrödinger sur un ensemble de variables qui spécifient les états stationnaires du système non perturbé. Si ces variables sont ξ_h , et si $H(\xi' \xi'')$ dénote un élément matriciel de l'hamiltonien global H dans le modèle (ξ), cette équation de Schrödinger serait

$$(6) \quad i\hbar \partial \psi(\xi') / \partial t = \sum_{\xi''} H(\xi' \xi'') \psi(\xi''),$$

comme l'équation (3'). Elle diffère de l'équation précédente (5) seulement dans la notation, un simple suffixe r étant utilisé là pour dénoter un état stationnaire plutôt qu'un ensemble de valeurs

numériques ξ'_k pour les variables ξ_k , et b_r étant utilisé à la place de $\psi(\xi')$. L'équation (6), et par conséquent également l'équation (5), peuvent encore être utilisées quand l'hamiltonien est du type plus général qui ne peut pas être exprimé comme une fonction algébrique d'un ensemble de variables canoniques, mais peut encore être représenté par une matrice $H(\xi'\xi'')$ ou H_{rs} .

Prenons maintenant b_r et ihb_r^* des variables canoniquement conjuguées plutôt que a_r et $ih a_r^*$. L'équation (5) et son équation conjuguée imaginaire prendra maintenant la forme hamiltonienne avec la fonction hamiltonienne

$$(7) \quad F = \sum_{rs} b_r^* H_{rs} b_s.$$

En procédant comme précédemment, on effectue la transformation de contact

$$(8) \quad b_r = N_r^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h}, \quad b_r^* = N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h},$$

sur les nouvelles variables canoniques N_r, θ_r , où N_r est, comme précédemment, le nombre probable de systèmes dans l'état r , et θ_r est une nouvelle phase. L'hamiltonien F deviendra alors

$$F = \sum_{rs} H_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} N_s^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h},$$

et les équations pour les niveaux de transitions des N_r et θ_r prendront la forme canonique

$$\dot{N}_r = -\frac{\partial F}{\partial \theta_r}, \quad \dot{\theta}_r = \frac{\partial F}{\partial N_r}$$

L'hamiltonien peut alors s'écrire

$$(9) \quad F = \sum_r W_r N_r + \sum_{rs} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} N_s^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}.$$

Le premier terme $\sum_r W_r N_r$ est l'énergie propre totale de l'assemblage, et le second terme peut être vu comme l'énergie additionnelle due à la perturbation. Si la perturbation est nulle, les phases θ_r augmenteront linéairement avec le temps, tandis que les phases précédentes ϕ_r seront constantes dans ce cas.

3 Perturbation d'un assemblage satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose

Selon la section précédente, nous pouvons décrire l'effet d'une perturbation sur un assemblage de systèmes indépendants au moyen de variables canoniques et d'équations hamiltoniennes du mouvement. Le développement de la théorie qui nous vient naturellement à l'esprit consiste à faire de ces variables canoniques des q -nombres satisfaisant les conditions quantiques habituelles plutôt que des c -nombres, de telle façon que leurs équations hamiltoniennes du mouvement deviennent de vraies équations quantiques. La fonction hamiltonienne va maintenant fournir une équation d'onde de Schrödinger, qui doit être résolue et interprétée de la façon habituelle. L'interprétation donnera non seulement le nombre probable de systèmes dans n'importe quel état, mais également la probabilité d'une distribution quelconque donnée des systèmes parmi les différents états, cette probabilité étant, en fait, égale au carré du module de la solution normalisée de l'équation d'onde qui satisfait les conditions initiales adéquates. Nous pourrions, bien sûr, calculer directement à partir de considérations élémentaires la probabilité de toute distribution donnée quand les systèmes sont indépendants, puisque nous connaissons la probabilité de chaque système d'être dans un état donné particulier. Nous trouverions que la probabilité calculée directement de cette manière n'est pas en accord avec celle obtenue par l'équation d'onde, excepté dans le cas particulier où il y a seulement un seul système dans l'assemblage. Dans le cas général, il sera montré que l'équation d'onde amène

à la valeur correcte pour la probabilité de n'importe quelle distribution donnée quand les systèmes, plutôt que d'être indépendants, obéissent aux statistiques de Einstein-Bose.

Supposons que les variables b_r, ihb_r^* du §2 sont des q -nombres canoniques satisfaisant les conditions quantiques

$$b_r \cdot ihb_r^* - ihb_r^* \cdot b_r = ih$$

ou

$$b_r b_r^* - b_r^* b_r = 1$$

et

$$\begin{aligned} b_r b_s - b_s b_r &= 0, & b_r^* b_s^* - b_s^* b_r^* &= 0, \\ b_r b_s^* - b_s^* b_r &= 0 & (s \neq r). \end{aligned}$$

Les équations de transformation (8) doivent maintenant être écrites sous forme quantique

(10)

$$\begin{cases} b_r = (N_r + 1)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h} = e^{-i\theta_r/h} N_r^{\frac{1}{2}} \\ b_r^* = N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h} = e^{i\theta_r/h} (N_r + 1)^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

de telle façon que les N_r, θ_r puissent aussi être des variables canoniques. Ces équations montrent que les N_r peuvent seulement avoir des valeurs caractéristiques entières non négatives¹¹, ce qui nous fournit une justification de la supposition que les variables sont des q -nombres tels que nous les avons choisis. Les nombres de systèmes dans les différents états sont maintenant des nombres quantiques ordinaires.

L'hamiltonien (7) devient alors

(11)

$$\begin{aligned} F &= \sum_{rs} b_r^* H_{rs} b_s = \sum_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h} H_{rs} (N_s + 1)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h} \\ &= \sum_{rs} H_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h} \end{aligned}$$

dans lequel les H_{rs} sont toujours des c -nombres. Nous pouvons écrire ce F dans la forme correspondant à (9)

(11')

$$F = \sum_r W_r N_r + \sum_{rs} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}$$

dans laquelle il est à nouveau composé d'un terme correspondant à l'énergie propre $\sum_r W_r N_r$ et d'un terme correspondant à l'énergie d'interaction.

L'équation d'onde écrite en fonction des variables N_r est¹²

(12)

$$ih \frac{\partial}{\partial t} \psi(N'_1, N'_2, N'_3 \dots) = F \psi(N'_1, N'_2, N'_3 \dots),$$

où F est un opérateur, chaque θ_r apparaissant dans F étant interprété comme signifiant $ih\partial/\partial N'_r$.

Si nous appliquons l'opérateur $e^{\pm i\theta_r/h}$ à n'importe quelle fonction $f(N'_1, N'_2, \dots, N'_r, \dots)$ des variables N'_1, N'_2, \dots , le résultat est

$$\begin{aligned} e^{\pm i\theta_r/h} f(N'_1, N'_2, \dots, N'_r \dots) &= e^{\mp \delta/\delta N'_r} f(N'_1, N'_2 \dots N'_r \dots) \\ &= f(N'_1, N'_2, \dots, N'_r \mp 1, \dots). \end{aligned}$$

¹¹Voir §8 de l'article de l'auteur *Roy. Soc. Proc. A*, vol. 111, p. 281 (1926). Ce qu'on appelait les valeurs d'un c -nombre, et qui sont ici les valeurs qu'un q -nombre peut prendre, se verront donner le nom plus précis de valeurs caractéristiques de ce q -nombre.

¹²On suppose pour la définissabilité que l'indice r des états stationnaires prend les valeurs 1, 2, 3, ...

Si nous utilisons cette règle dans l'équation (12) et que nous utilisons l'expression (11) pour F , nous obtenons¹³

(13)

$$\begin{aligned} ih \frac{\partial}{\partial t} \psi(N'_1, N'_2, N'_3 \dots) \\ = \sum_{rs} H_{rs} N_r'^{\frac{1}{2}} (N'_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} \psi(N'_1, N'_2 \dots N'_r - 1, \dots N'_s + 1, \dots). \end{aligned}$$

Nous voyons du côté droit de cette équation que dans la matrice représentant F , le terme de F faisant intervenir $e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}$ contribuera seulement aux éléments de la matrice qui représentent les transitions dans lesquelles N_r décroît d'une unité et N_s croît d'une unité, i.e. aux éléments de la matrice de la forme $F(N'_1, N'_2 \dots N'_r \dots N'_s; N'_1, N'_2 \dots N'_r - 1 \dots N'_s + 1 \dots)$. Si nous trouvons une solution $\psi(N'_1, N'_2 \dots)$ de l'équation (13) qui est normalisée [i.e. une solution pour laquelle $\sum_{N'_1, N'_2 \dots} |\psi(N'_1, N'_2 \dots)|^2 = 1$] et qui satisfait les conditions propres initiales, alors $|\psi(N'_1, N'_2 \dots)|^2$ sera la probabilité de cette distribution dans laquelle N'_1 systèmes sont dans l'état 1, N'_2 dans l'état 2, ... à tout instant.

Considérons d'abord le cas où il y a un seul système dans l'assemblage. La probabilité qu'il soit dans l'état q est déterminée par la fonction propre $\psi(N'_1, N'_2, \dots)$ dans laquelle tous les N' sont égaux à zéro sauf N'_q , qui est égal à l'unité. Nous noterons cette fonction propre $\psi\{q\}$. Quand elle est substituée dans le côté gauche de (13), tous les termes de la somme du côté droit s'évanouissent sauf ceux pour lesquels $r = q$, et il reste

$$ih \frac{\partial}{\partial t} \psi\{q\} = \sum_r H_{qs} \psi\{s\}$$

qui est la même équation que (5) avec $\psi\{q\}$ jouant le rôle de b_q . Cela établit le fait que la théorie présente est équivalente à celle de la section précédente quand il y a seulement un système dans l'assemblage.

Maintenant prenons le cas général d'un nombre arbitraire de systèmes dans l'assemblage, et supposons qu'ils obéissent à la mécanique statistique de Einstein-Bose. Cela nécessite que, dans le traitement habituel du problème, seules les fonctions propres qui sont symétriques entre tous les systèmes doivent être prises en compte, ces fonctions propres étant par elles-mêmes suffisantes pour donner une solution quantique complète du problème¹⁴. Nous allons maintenant obtenir l'équation pour le niveau de transition de l'une de ces fonctions propres symétriques, et montrer qu'elle est identique à l'équation (13).

Si nous indiquons chaque système par un nombre n , alors le hamiltonien pour l'assemblage sera $H_A = \sum_n H(n)$, où $H(n)$ est le H du §2 (égal à $H_0 + V$) exprimé en fonction des variables du n -ième système. Un état stationnaire de l'assemblage est défini par les nombres $r_1, r_2 \dots r_n \dots$ qui sont les indices des états stationnaires dans lesquels stagnent les systèmes séparés. L'équation de Schrödinger pour l'assemblage en un ensemble de variables qui spécifient les états stationnaires sera de la forme (6) [avec H_A plutôt que H], et nous pouvons l'écrire dans la notation de l'équation (5) ; ainsi :

$$(14) \quad ih \dot{b}(r_1 r_2 \dots) = \sum_{s_1 s_2 \dots} H_A(r_1 r_2 \dots; s_1 s_2 \dots) b(s_1 s_2 \dots),$$

où $H_A(r_1 r_2 \dots; s_1 s_2 \dots)$ est l'élément de la matrice globale de H_A [en enlevant le facteur temps]. Cet élément matriciel s'évanouit quand plus d'un s_n diffère du r_n correspondant ; il est égal à $H_{r_m s_m}$ quand s_m diffère de r_m et que tous les autres s_n sont égaux aux r_n ; et il est égal à $\sum_n H_{r_n r_n}$ quand tout s_n est égal à r_n . En substituant ces valeurs dans (14), nous obtenons

$$(15) \quad ih \dot{b}(r_1 r_2 \dots) = \sum_m \sum_{s_m \neq r_m} H_{r_m s_m} b(r_1 r_2 \dots r_{m-1} s_m r_{m+1} \dots) + \sum_n H_{r_n r_n} b(r_1 r_2 \dots).$$

¹³ où $s = r$, $\psi(N'_1, N'_2 \dots N'_r - 1 \dots N'_s + 1)$ doit être pris comme signifiant $\psi(N'_1 N'_2 \dots N'_r \dots)$.

¹⁴ *Loc. cit.* §3

Nous devons maintenant contraindre $b(r_1 r_2 \dots)$ à être une fonction symétrique des variables r_1, r_2, \dots de façon à obtenir les statistiques de Einstein-Bose. Cela est rendu possible puisque si $b(r_1 r_2 \dots)$ est symétrique à tout instant, alors l'équation (15) montre que $\dot{b}(r_1 r_2 \dots)$ est aussi symétrique à cet instant, de telle sorte que $b(r_1 r_2 \dots)$ restera symétrique.

Notons N_r le nombre de systèmes dans l'état r . Alors un état stationnaire de l'assemblage décrivable par une fonction propre symétrique doit être spécifié par les nombres $N_1, N_2, \dots, N_r, \dots$ aussi bien que par les nombres $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, et nous serons capables de transformer l'équation (15) en les variables N_1, N_2, \dots . Nous ne pouvons pas vraiment prendre la nouvelle fonction propre $b(N_1, N_2, \dots)$ égale à la précédente $b(r_1 r_2 \dots)$, mais nous devons en prendre une qui soit un multiple de l'autre de façon à ce que les deux soient correctement normalisées selon leurs variables respectives. Nous devons avoir, en fait,

$$\sum_{r_1, r_2, \dots} |b(r_1 r_2 \dots)|^2 = 1 = \sum_{N_1, N_2, \dots} |b(N_1, N_2 \dots)|^2,$$

et ainsi, nous devons prendre $|b(N_1, N_2 \dots)|^2$ égal à la somme des $|b(r_1 r_2 \dots)|^2$ pour toutes les valeurs des nombres r_1, r_2, \dots de telle façon que N_1 d'entre eux soient égaux à 1, N_2 égaux à 2, etc. Ainsi, il y a $N!/N_1!N_2! \dots$ termes dans cette somme, où $N = \sum_r N_r$ est le nombre total de systèmes, et ils sont tous égaux, puisque $b(r_1 r_2 \dots)$ est une fonction symétrique de ses variables r_1, r_2, \dots . Par conséquent, nous devons avoir

$$b(N_1, N_2, \dots) = (N!/N_1!N_2! \dots)^{\frac{1}{2}} \dot{b}(r_1 r_2 \dots).$$

Si nous effectuons cette substitution dans l'équation (15), le côté gauche deviendra

$$ih(N_1!N_2! \dots / N!)^{\frac{1}{2}} b(N_1, N_2 \dots).$$

Le terme $H_{r_m s_m} b(r_1 r_2 \dots r_{m-1} s_m r_{m+1} \dots)$ dans la première somme du côté droit deviendra

$$(16) \quad [N_1!N_2! \dots (N_r - 1)! \dots (N_s + 1)! \dots / N!]^{\frac{1}{2}} H_{rs} b(N_1, N_2 \dots N_r - 1 \dots N_s + 1 \dots),$$

où nous avons écrit r pour r_m et s pour s_m . Ce terme doit être ajouté pour toutes les valeurs de s sauf r , et doit alors être ajouté pour r prenant chacune des valeurs r_1, r_2, \dots . Ainsi chaque terme (16) se voit répété par le procédé de sommation jusqu'à ce qu'il apparaisse un total de N_r fois, de telle façon qu'il contribue

$$N_r [N_1!N_2! \dots (N_r - 1)! \dots (N_s + 1)! \dots / N!]^{\frac{1}{2}} H_{rs} b(N_1, N_2 \dots N_r - 1 \dots N_s + 1 \dots) \\ N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1)^{\frac{1}{2}} (N_1!N_2! \dots / N!)^{\frac{1}{2}} H_{rs} b(N_1, N_2 \dots N_r - 1 \dots N_s + 1 \dots)$$

au côté droit de (15). Finalement, le terme $\sum_n H_{r_n r_n} b(r_1, r_2, \dots)$ devient

$$\sum_r N_r H_{rr} \cdot b(r_1 r_2 \dots) = \sum_r N_r H_{rr} \cdot (N_1!N_2! \dots / N!)^{\frac{1}{2}} b(N_1, N_2 \dots).$$

Par conséquent, l'équation (15) devient, en enlevant le facteur $(N_1!N_2! \dots / N!)^{\frac{1}{2}}$,

$$(17) \quad ih\dot{b}(N_1, N_2 \dots) = \sum_r \sum_{s \neq r} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1)^{\frac{1}{2}} H_{rs} b(N_1, N_2 \dots N_r - 1 \dots N_s + 1 \dots) + \sum_r N_r H_{rr} b(N_1, N_2 \dots),$$

ce qui est identique à (13) [excepté le fait que dans (17), les primes (?) ont été omis pour les N , ce qui est permis quand on n'a pas besoin de faire référence aux N comme à des q -nombres]. Nous avons ainsi établi que l'hamiltonien (11) décrit l'effet d'une perturbation sur un assemblage satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose.

4 Réaction de l'assemblage sur le système perturbant

Jusqu'à présent, nous avons seulement considéré des perturbations qui peuvent être représentées par une énergie de perturbation V ajoutée à l'hamiltonien du système perturbé, V étant une fonction seulement des variables dynamiques de ce système et peut-être du temps. Il est possible que la théorie s'étende au cas où la perturbation consiste en une interaction avec un système dynamique perturbant, la réaction du système perturbé sur le système perturbant étant prise en compte (la distinction entre le système perturbant et le système perturbé est, bien sûr, non réelle, mais elle sera gardée par facilité).

Nous considérons maintenant un système perturbant, décrit, disons, par les variables canoniques J_k, ω_k , les J étant ses premières intégrales quand il est seul, interagissant avec un assemblage de systèmes perturbés sans interaction mutuelle, qui satisfont les statistiques de Einstein-Bose. L'hamiltonien global sera de la forme

$$H_T = H_P(J) + \sum_n H(n),$$

où H_r est l'hamiltonien du système perturbant (une fonction des J seulement) et $H(n)$ est égale à l'énergie propre $H_0(n)$ plus l'énergie de perturbation $V(n)$ du n -ième système de l'assemblage. $H(n)$ est une fonction des seules variables du n -ième système de l'assemblage et des J et w , et ne fait pas intervenir le temps explicitement.

L'équation de Schrödinger correspondant à l'équation (14) est maintenant

$$i\hbar b(J', r_1 r_2 \dots) = \sum_{J''} \sum_{s_1, s_2 \dots} H_r(J', r_1 r_2 \dots; J'', s_1 s_2 \dots) b(J'', s_1 s_2 \dots),$$

dans laquelle la fonction propre b fait intervenir les variables J'_k .

L'élément matriciel $H_r(J', r_1 r_2 \dots; J'', s_1 s_2 \dots)$ est maintenant toujours une constante. Comme précédemment, il s'évanouit quand plus d'un s_n diffère du r_n correspondant. Quand s_m diffère de r_m et que tout autre s_n est égal à r_n , il se réduit à $H(J' r_m; J'' s_m)$, qui est l'élément matriciel $(J' r_m; J'' s_m)$ (avec le facteur temps éliminé) de $H = H_0 + V$, l'énergie propre plus l'énergie de perturbation d'un seul système de l'assemblage ; alors que lorsque tout s_n est égale à r_n , il prend la valeur $H_p(J') \delta_{J' J''} + \sum_n H(J' r_n; J'' r_n)$. Si, comme précédemment, nous contraignons les fonctions propres à être symétriques en les variables $r_1, r_2 \dots$, nous pouvons à nouveau les transformer en les variables $N_1, N_2 \dots$, ce qui amènera, comme précédemment, au résultat.

(18)

$$i\hbar b(J', N'_1, N'_2 \dots) = H_p(J') b(J', N'_1, N'_2 \dots) + \sum_{J''} \sum_{r,s} N_r^{\frac{1}{2}} (N'_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} H(J' r; J'' s) b(J'', N'_1, N'_2 \dots N'_r - 1 \dots N'_s + 1 \dots)$$

Ceci est l'équation de Schrödinger correspondant à la fonction hamiltonienne

$$(19) \quad F = H_P(J) + \sum_{r,s} H_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/\hbar},$$

dans laquelle H_{rs} est maintenant une fonction des J et des w , telle que quand on le représente par une matrice du modèle (J), son élément $(J' J'')$ est $H(J' r; J'' s)$ (il convient de noter que H_{rs} commute encore avec les N et les θ).

Ainsi l'interaction d'un système perturbant avec un assemblage satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose peut être décrit par un hamiltonien de la forme (19). Nous pouvons le mettre dans une forme correspondant à (11') en observant que l'élément matriciel $H(J'_r; J''_s)$ est composé de la somme de deux termes, un terme qui provient de l'énergie propre H_0 , qui est égale à W_r quand

$J''_k = J'_k$ et $s = r$ et qui s'évanouit sinon, et un terme qui provient de l'énergie d'interaction V , qui peut être notée $v(J'_r; J''_s)$. Ainsi, nous aurons

$$H_{rs} = W_r \delta_{rs} + v_{rs},$$

où v_{rs} est cette fonction des J et des w qui est représentée par la matrice dont l'élément $(J'J'')$ est $v(J'_r; J''_s)$, et de ce fait, (19) devient

(20)

$$F = H_P(J) + \sum_r W_r N_r + \sum_{r,s} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}.$$

L'hamiltonien est ainsi la somme de l'énergie propre du système perturbant $H_P(J)$, de l'énergie propre des systèmes perturbés $\sum_r W_r N_r$ et de l'énergie de perturbation $\sum_{r,s} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}$.

5 Théorie des transitions d'un système d'un état vers d'autres états de même énergie.

Avant d'appliquer les résultats des sections précédentes aux quanta de lumière, nous allons considérer la solution du problème représenté par un hamiltonien du type (19). La caractéristique essentielle de ce problème est qu'il concerne un système dynamique qui peut, sous l'influence d'une énergie de perturbation dans laquelle le temps n'intervient pas explicitement, effectuer des transitions d'un état vers d'autres états de même énergie. Le problème des collisions entre un système atomique et un électron, qui a été traité par Born¹⁵ est un cas particulier de ce type. La méthode de Born consiste à trouver une solution *périodique* de l'équation d'onde qui consiste, aussi loin qu'elle fasse intervenir les coordonnées de l'électron qui percute le système, en des ondes planes, qui représentent l'électron incident, et qui approchent le système atomique, et qui sont éparpillées ou diffractées dans toutes les directions. Le carré de l'amplitude des ondes éparpillées dans n'importe quelle direction avec n'importe quelle fréquence est supposé par Born être la probabilité que l'électron soit éparpillé dans cette direction avec l'énergie correspondante.

Cette méthode ne semble pas pouvoir s'étendre d'une manière simple au problème général des systèmes qui effectuent des transitions d'un état vers d'autres de même énergie. De plus, il n'y a pas à présent de moyen très direct et certain d'interpréter une solution périodique d'une équation d'onde pour l'appliquer à un phénomène physique non périodique tel qu'une collision (la méthode plus précise qui va être donnée maintenant montre que la supposition de Born n'est pas tout à fait correcte, dans la mesure où il est nécessaire de multiplier le carré de l'amplitude par un certain facteur).

Une méthode alternative pour résoudre un problème de collision est de trouver une solution non périodique à l'équation d'onde qui consiste simplement au départ en ondes planes se déplaçant dans l'espace entier dans les directions imposées avec la fréquence imposée pour représenter l'électron incident. Au cours du temps, les ondes se déplaçant dans d'autres directions peuvent apparaître de telle façon que l'équation d'onde reste satisfaite. La probabilité pour l'électron d'être éparpillé dans n'importe quelle direction avec n'importe quelle énergie sera alors déterminée par le niveau de croissance des composants harmoniques correspondant de ces ondes. La manière d'interpréter les mathématiques utilisées par cette méthode est assez bien définie, cette interprétation étant la même que celle du début du §2.

Nous allons appliquer cette méthode au problème général d'un système qui effectue des transitions d'un état à d'autres états de même énergie sous l'action d'une perturbation. Soit H_0 l'hamiltonien

¹⁵Born, *Z. f. Physik*, vol. 38, p. 803 (1926)

du système non perturbé et V l'énergie perturbante, qui doit ne pas faire intervenir le temps explicitement. Si nous prenons le cas d'une suite continue d'états stationnaires, spécifiée par les premières intégrales, disons α_k , du mouvement non perturbé, alors, en suivant la méthode du §2, nous obtenons

$$(21) \quad ih\dot{a}(\alpha') = \int V(\alpha'\alpha'')d\alpha'' \cdot a(\alpha''),$$

correspondant à l'équation (4). La probabilité du système d'être dans un état pour lequel chaque α_k est compris entre α'_k et $\alpha'_k + d\alpha'_k$ à tout instant est $|a(\alpha')|^2 d\alpha'_1 \cdot d\alpha'_2 \dots$ quand $a(\alpha')$ est correctement normalisé et satisfait les conditions propres initiales. Si initialement le système est dans l'état α^0 , nous devons imposer que la valeur initiale de $a(\alpha')$ soit de la forme $a^0 \cdot \delta(\alpha' - \alpha^0)$. Nous laisserons α^0 prendre une valeur arbitraire, parce que ça serait un inconvénient que de normaliser $a(\alpha')$ dans le cas présent. Pour une première approximation, nous pouvons substituer à $a(\alpha'')$ du côté droit de (21) sa valeur initiale. Cela donne

$$ih\dot{a}(\alpha') = a^0 V(\alpha'\alpha^0) = a^0 v(\alpha'\alpha^0) e^{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]t/h},$$

où $v(\alpha'\alpha^0)$ est une constante et $W(\alpha')$ est l'énergie de l'état α' . Par conséquent

$$(22) \quad iha(\alpha') = a^0 \delta(\alpha' - \alpha^0) + a^0 v(\alpha'\alpha^0) \frac{e^{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]t/h} - 1}{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]/h}.$$

Pour les valeurs des α'_k telles que $W(\alpha')$ diffère de façon appréciable de $W(\alpha^0)$, $a(\alpha')$ est une fonction périodique du temps dont l'amplitude est petite quand l'énergie perturbante V est petite, de telle sorte que les fonctions propres correspondant à ces états stationnaires ne sont pas excitées d'une quelconque façon appréciable. D'un autre côté, pour les valeurs des α'_k telles que $W(\alpha') = W(\alpha^0)$ et $\alpha'_k \neq \alpha_k^0$ pour un certain k , $a(\alpha')$ augmente uniformément par rapport au temps, de telle façon que la probabilité du système d'être dans l'état α' à tout instant augmente proportionnellement avec le carré du temps. Physiquement, la probabilité du système d'être dans un état avec exactement la même énergie propre que l'énergie propre initiale $W(\alpha^0)$ n'a pas d'importance, étant infinitésimale. Nous sommes seulement intéressés par l'intégrale de la probabilité qui couvre un petit intervalle de valeurs d'énergie propre proche de l'énergie propre initiale et qui, comme nous le trouverons, augmente linéairement avec le temps, en accord avec les lois des probabilités ordinaires.

Nous transformons les variables $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_u$ en un ensemble de variables qui sont des fonctions arbitrairement indépendantes des α telles que l'une d'entre elles est l'énergie propre W , disons les variables $W, \gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_{u-1}$. La probabilité à tout instant du système de rester dans un état stationnaire pour lequel tout γ_k est compris entre γ_k' et $\gamma_k' + d\gamma_k'$ est maintenant (au facteur de normalisation près) égal à

$$(23) \quad d\gamma'_1 \cdot d\gamma'_2 \dots d\gamma'_{u-1} \int |a(\alpha')|^2 \frac{\partial(\alpha'_1, \alpha'_2 \dots \alpha'_u)}{\partial(W', \gamma'_1 \dots \gamma'_{u-1})} dW'.$$

Pour une durée qui est grande comparée aux durées des périodes du système, nous trouverons que pratiquement la totalité de l'intégrale dans (23) provient des valeurs des W' très proches de $W^0 = W(\alpha^0)$. Posons

$$a(\alpha') = a(W', \gamma') \text{ et } \partial(\alpha'_1, \alpha'_2 \dots \alpha'_u) / \partial(W', \gamma'_1 \dots \gamma'_{u-1}) = J(W', \gamma').$$

Alors, pour l'intégrale dans (23), nous trouvons, avec l'aide de (22) (à la condition que $\gamma'_k \neq \gamma_k^0$ pour

un certain k)

$$\begin{aligned}
& \int |a(W', \gamma')| J(W', \gamma') dW' \\
&= |a^0|^2 \int |v(W', \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W', \gamma') \frac{[e^{i(W'-W^0)t/h} - 1][e^{-i(W'-W^0)t/h} - 1]}{(W' - W^0)^2} dW' \\
&= 2|a^0|^2 \int |v(W', \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W', \gamma') [1 - \cos(W' - W^0)t/h] / (W' - W^0)^2 . dW' \\
&= 2|a^0|^2 t/h . \int |v(W^0 + hx/t, \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W^0 + hx/t, \gamma') (1 - \cos x) / x^2 . dx,
\end{aligned}$$

si l'on fait la substitution $(W' - W^0)t/h = x$. Pour de grandes valeurs de t , cela se réduit à

$$\begin{aligned}
& 2|a^0|^2 t/h . |v(W^0, \gamma')|^2 J(W^0, \gamma') \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos x) / x^2 . dx \\
&= 2\pi |a^0|^2 t/h . |v(W^0, \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W^0, \gamma').
\end{aligned}$$

La probabilité par unité de temps d'une transition vers un état pour lequel γ_k est compris entre γ'_k et $\gamma'_k + d\gamma'_k$ est alors (à un facteur de normalisation près)

$$(24) \quad 2\pi |a^0|^2 / h . |v(W^0, \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W^0, \gamma') d\gamma'_1 . d\gamma'_2 \dots d\gamma'_{u-1},$$

qui est proportionnel au carré de l'élément de matrice associé à cette transition de l'énergie perturbante.

Pour appliquer ce résultat au problème d'une simple collision, nous définissons les α comme étant les composantes du moment p_x, p_y, p_z de l'électron percutant et les γ comme étant les θ , et les ϕ , comme étant les angles qui déterminent la direction du mouvement. Si en prenant en compte le changement de masse de la relativité avec la vitesse, nous appelons P le moment résultant, égal à $(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{1}{2}}$, et E l'énergie, égale à $(m^2 c^4 + P^2 c^2)^{\frac{1}{2}}$, de l'électron, m étant sa masse restante, nous trouvons pour le Jacobien

$$J = \frac{\partial(p_x, p_y, p_z)}{\partial(E, \theta, \phi)} = \frac{EP}{c^2} \sin \theta.$$

Ainsi $J(W^0, \gamma')$ de l'expression (24) a la valeur

$$(25) \quad J(W^0, \gamma') = E' P' \sin \theta' / c^2,$$

où E' et P' se réfèrent à cette valeur pour l'énergie de l'électron éparpillé qui rend l'énergie totale égale à l'énergie initiale W^0 (i.e. à cette valeur nécessitée par la conservation de l'énergie).

Nous devons maintenant interpréter la valeur initiale de $a(\alpha')$, notamment, $a^0 \delta(\alpha' - \alpha^0)$, que nous n'avons pas normalisée. Selon le §2, la fonction d'onde des variables α_k est $b(\alpha') = a(\alpha') e^{-iW't/h}$ de telle sorte que sa valeur initiale est

$$a^0 \delta(\alpha' - \alpha^0) e^{-iW't/h} = a^0 \delta(p'_x - p_x^0) \delta(p'_y - p_y^0) \delta(p'_z - p_z^0) e^{-iW't/h}.$$

Si nous utilisons la fonction de transformation¹⁶

$$(x'/p') = (2\pi h)^{-\frac{3}{2}} e^{i\Sigma_{xyz} p'_x x' / h},$$

¹⁶Pour alléger l'écriture, le symbole x est utilisé pour représenter x, y, z .

et la règle de transformation

$$\psi(x') = \int (x'/p')\psi(p')dp'_x dp'_y dp'_z,$$

nous obtenons pour la fonction d'onde initiale en les coordonnées x, y, z la valeur

$$a^0(2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}}e^{i\Sigma_{xyz}p_x^0x'/\hbar}e^{-iW't/\hbar}.$$

Cela correspond à une distribution initiale de $|a^0|^2(2\pi\hbar)^{-3}$ électrons par unité de volume. Puisque leur vitesse est P^0c^2/E^0 , le nombre par unité de temps frappant une unité de surface à angles perpendiculaires à leur direction de mouvement est $|a^0|^2P^0c^2/(2\pi\hbar)^3E^0$.

En divisant cela dans l'expression (24), nous obtenons, avec l'aide de (25),

$$(26) \quad 4\pi^2(2\pi\hbar)^2\frac{E'E^0}{c^4}|v(p';p^0)|^2\frac{P'}{P^0}\sin\theta'd\theta'd\phi'.$$

C'est la zone effective qui doit être frappée par un électron de manière à ce qu'il soit éparpillé dans l'angle solide $\sin\theta'd\theta'd\phi'$ avec l'énergie E' . Ce résultat diffère par un facteur $(2\pi\hbar)^2/2mE'$. P'/P^0 de celui de Born¹⁷. La nécessité du facteur P'/P^0 dans (26) aurait pu être prédite par le principe d'équilibre, puisque le facteur $|v(p';p^0)|^2$ présente une symétrie des processus direct et inverse¹⁸.

6 Application aux quanta lumineux

Nous allons maintenant appliquer la théorie du paragraphe §4 au cas où les systèmes de l'assemblage sont des quanta lumineux, la théorie étant applicable à ce cas puisque les quanta obéissent aux lois statistiques de Einstein-Bose et n'ayant pas d'interaction mutuelle. Un quantum lumineux est dans un état stationnaire quand il se déplace à moment constant en ligne droite. Par conséquent, un état stationnaire r est déterminé par les trois composantes du moment du quantum lumineux et par une variable qui spécifie son état de polarisation. Nous travaillerons en supposant qu'il y a un nombre fini de ces états stationnaires, très proches les uns des autres, parce que ça présenterait un inconvénient d'utiliser des intervalles continus. L'interaction des quanta de lumière avec un système atomique sera décrite par un hamiltonien de la forme (20), dans lequel $H_P(J)$ est l'hamiltonien du système atomique seul, et les coefficients v_{rs} correspondent aux inconnues. Nous montrerons que cette forme du hamiltonien, avec les v_{rs} arbitraires, amène aux lois d'Einstein pour l'émission et l'absorption de radiation.

Le quantum lumineux a la particularité qu'il cesse apparemment d'exister quand il est dans l'un de ses états stationnaires, notamment l'état nul, dans lequel son moment, et par conséquent son énergie également, sont nuls. Quand un quantum lumineux est absorbé, il peut être considéré comme sautant vers son état zéro, et quand il est émis, il peut être considéré comme sautant de l'état zéro vers un état dans lequel il est physiquement en évidence, de telle façon qu'il apparaît comme venant d'être créé. Puisqu'il n'y a pas de limite au nombre de quanta lumineux qui peuvent être créés de cette manière, nous devons supposer qu'il y a un nombre infini de quanta lumineux dans l'état zéro, de telle façon que le N_0 du hamiltonien (20) est infini. Nous devons maintenant avoir θ_0 , la variable canoniquement conjuguée à N_0 , qui est constante, puisque

$$\dot{\theta}_0 = \partial F/\partial N_0 = W_0 + \text{termes faisant intervenir } N_0^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } (N_0 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

¹⁷Dans un article plus récent (*Nachr. Gesell. d. Wiss., Göttingen, p. 146 (1926)*), Born a obtenu un résultat en accord avec celui du présent article pour la mécanique non relativiste, en utilisant une interprétation de l'analyse basée sur les théorèmes de conservation. J'ai une reconnaissance particulière à l'égard du Prof. N. Bohr pour avoir pu lire à l'avance une copie de ce travail.

¹⁸Voir Klein et Rosseland, *Z. f. Physik*, vol. 4, p. 46, équation (4) (1921).

et W_0 est nul. Pour que l'hamiltonien (20) puisse rester fini, il est nécessaire que les coefficients v_{r0}, v_{0r} soient infiniment petits. Nous supposons qu'ils sont infiniment petits de façon à rendre $v_{r0}N_0^{\frac{1}{2}}$ et $v_{0r}N_0^{\frac{1}{2}}$ finis, de façon à ce que les coefficients de probabilité de transition puissent être finis. Ainsi nous posons

$$v_{r0}(N_0 + 1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_0/h} = v_r, \quad v_{0r}N_0^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_0/h} = v_r^*,$$

où v_r et v_r^* sont des imaginaires finis conjugués. Nous pouvons considérer que v_r et v_r^* sont des fonctions seulement des J et des w du système atomique, puisque leurs facteurs $(N_0 + 1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_0/h}$ et $N_0^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_0/h}$ sont pratiquement des constantes, le niveau de transition de N_0 étant très petit comparé à N_0 . L'hamiltonien (20) devient maintenant

(27)

$$F = H_P(J) + \sum_r W_r N_r + \sum_{r \neq 0} [v_r N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h} + v_r^* (N_r + 1)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h}] + \sum_{r \neq 0} \sum_{s \neq 0} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}.$$

La probabilité de transition dans laquelle un quantum lumineux dans l'état r est absorbé est proportionnelle au carré du module de l'élément matriciel de l'hamiltonien qui correspond à cette transition. Cet élément matriciel doit venir du terme $v_r N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h}$ dans l'hamiltonien, et doit ainsi être proportionnel à $N_r^{\frac{1}{2}}$ où N_r' est le nombre de quanta lumineux dans l'état r avant le processus. La probabilité du processus d'absorption est ainsi proportionnelle à N_r' . De la même façon, la probabilité qu'un quantum lumineux dans l'état r soit émis est proportionnelle à $(N_r' + 1)$, et la probabilité qu'un quantum lumineux dans l'état r soit bombardé dans l'état s est proportionnelle à $N_r'(N_s' + 1)$. Les processus de radiation du type le plus général considérés par Einstein et Ehrenfest¹⁹ dans lesquels plus d'un quantum lumineux entrent en jeu simultanément ne sont pas pris en charge dans la présente théorie.

Pour établir une connexion entre le nombre de quanta lumineux par état stationnaire et l'intensité de la radiation, nous considérons une boîte de volume fini, disons A , contenant la radiation. Le nombre d'états stationnaires pour les quanta lumineux d'un type donné de polarisation dont la fréquence est comprise entre ν_r et $\nu_r + d\nu_r$, et dont la direction de déplacement est plus petite que l'angle solide entre $d\omega_r$ et la direction du mouvement de l'état r sera maintenant $A\nu_r^d \nu_r d\nu_r / c^3$. L'énergie des quanta lumineux dans ces états stationnaires est par conséquent $N_r' \cdot 2\pi h \nu_r \cdot A\nu_r^2 d\nu_r d\omega_r / c^3$. Cela doit être égal à $Ac^{-1} I_r d\nu_r d\omega_r$, où I_r est l'intensité par unité d'intervalle de fréquence de la radiation sur l'état r . Ainsi

$$(28) \quad I_r = N_r'(2\pi h)\nu_r^3/c^2$$

de telle sorte que N_r' est proportionnel à I_r et $(N_r' + 1)$ est proportionnel à $I_r + (2\pi h)\nu_r^3/c^2$.

Nous obtenons ainsi que la probabilité d'un processus d'absorption est proportionnelle à I_r , l'intensité incidente par unité d'intervalle de fréquence, et que celle du processus d'émission est proportionnelle à $I_r + (2\pi h)\nu_r^3/c^2$, qui sont justement les lois d'Einstein²⁰. De la même manière, la probabilité d'un processus dans lequel un quantum lumineux est éparpillé d'un état r à un état s est proportionnelle à $I_r[I_s + (2\pi h)\nu_r^3/c^2]$, qui est la loi de Pauli pour le bombardement d'une radiation par un électron²¹.

¹⁹ *Z. f. Physik*, vol. 19, p. 301 (1923)

²⁰ Le rapport entre une émission stimulée et une émission spontanée dans la présente théorie est juste deux fois sa valeur dans la théorie d'Einstein. Cela est dû au fait que dans la présente théorie, un composant polarisé de la radiation incidente ne peut que stimuler une radiation polarisée de la même façon, alors que dans la théorie d'Einstein les deux composants polarisés sont traités ensemble. Cette remarque s'applique aussi au processus d'éparpillement.

²¹ Pauli, *Z. f. Physik*, vol. 18, p. 272 (1923).

7 Coefficients de probabilité pour l'émission et l'absorption

Nous allons maintenant considérer l'interaction d'un atome et d'une radiation du point de vue ondulatoire. Nous résolvons la radiation en ses composantes de Fourier, et supposons que leur nombre est très grand mais fini. Indiquons chaque composant par un suffixe r , et supposons qu'il y a σ_r composants associés à la radiation d'un type défini de polarisation par unité d'angle solide et par unité d'intervalle de fréquence concernant le composant r . Chaque composant r peut être décrit par un potentiel vecteur κ_r , choisi de façon à annuler le potentiel scalaire. Le terme de perturbation à ajouter à l'hamiltonien sera maintenant, conformément à la théorie classique en négligeant la mécanique relativiste $c^{-1}\Sigma_r\kappa_r\dot{X}_r$, où X_r est le composant de la polarisation complète de l'atome dans la direction de κ_r , qui est la direction du vecteur électrique du composant r .

Nous pouvons, comme expliqué dans le §1, supposer que le champ peut être décrit par les variables canoniques N_r, θ_r , avec N_r le nombre de quanta d'énergie du composant r , et θ_r est sa phase conjuguée canonique, égale à $2\pi h\nu_r$ fois le θ_r de §1. Nous aurons maintenant $\kappa_r = a_r \cos \theta_r / h$ où a_r est l'amplitude de κ_r , qui peut être connecté à N_r comme suit : le flot d'énergie par unité de surface et par unité de temps pour le composant r est $\frac{1}{2}\pi c^{-1}a_r^2\nu_r^2$. Par conséquent, l'intensité par unité d'intervalle de fréquence de la radiation dans le voisinage du composant r est $I_r = \frac{1}{2}\pi c^{-1}a_r^2\nu_r^2\sigma_r$. En comparant cela avec l'équation (28), nous obtenons $a_r = 2(h\nu_r/c\sigma_r)^{\frac{1}{2}}N_r^{\frac{1}{2}}$, et par conséquent,

$$\kappa_r = 2(h\nu_r/c\sigma_r)^{\frac{1}{2}}N_r^{\frac{1}{2}}\cos\theta_r/h.$$

L'hamiltonien pour le système entier de l'atome plus la radiation sera maintenant, conformément à la théorie classique,

$$(29) \quad F = H_P(J) + \Sigma_r(2\pi h\nu_r)N_r + 2c^{-1}\sigma_r(h\nu_r/c\sigma_r)^{\frac{1}{2}}\dot{X}_r^{\frac{1}{2}}N_r^{\frac{1}{2}}\cos\theta_r/h,$$

où $H_P(J)$ est l'hamiltonien pour l'atome seul. En théorie quantique, nous devons faire des variables N_r et θ_r des q -nombres canoniques comme les variables J_k, w_k qui décrivent l'atome. Nous devons maintenant remplacer le $N_r^{\frac{1}{2}}\cos\theta_r/h$ dans (29) par le q -nombre réel

$$\frac{1}{2}\{N_r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_r/h} + e^{-i\theta_r/h}N_r^{\frac{1}{2}}\} = \frac{1}{2}\{N_r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_r/h} + (N_r + 1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_r/h}\}$$

de telle façon que l'hamiltonien (29) devienne

$$(30) \quad F = H_P(J) + \Sigma_r(2\pi h\nu_r)N_r + h^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{3}{2}}\Sigma_r(\nu_r/\sigma_r)^{\frac{1}{2}}\dot{X}_r\{N_r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_r/h} + (N_r + 1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_r/h}\}.$$

Celui-ci est de la forme (27), avec

$$(31) \quad v_r = v_r^* = h^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{3}{2}}(\nu_r/\sigma_r)^{\frac{1}{2}}\dot{X}_r$$

et

$$v_{rs} = 0 \quad (r, s \neq 0).$$

Le point de vue ondulatoire est ainsi consistant avec le point de vue quantique et il donne des valeurs aux coefficients inconnus d'interaction v_{rs} dans la théorie quantique. Ces valeurs ne sont pas telles qu'elles permettent d'exprimer l'énergie d'interaction comme une fonction algébrique des variables canoniques. Puisque la théorie ondulatoire donne $v_{rs} = 0$ pour $r, s \neq 0$, cela semblerait montrer qu'il n'y a pas de processus directs d'éparpillement, mais cela pourrait être dû à une incomplétude de la théorie ondulatoire proposée ici.

Nous montrerons maintenant que l'hamiltonien (30) amène les expressions correctes des A et des B d'Einstein. Nous devons d'abord modifier légèrement l'analyse du §5 pour l'appliquer au cas où le

système a un grand nombre discret d'états stationnaires plutôt qu'un continuum de tels états. Au lieu de l'équation (21), nous aurons maintenant

$$i\hbar\dot{a}(\alpha') = \sum_{\alpha''} V(\alpha'\alpha'')a(\alpha'').$$

Si le système est initialement dans l'état α^0 , nous devons prendre pour valeur initiale de $a(\alpha')$ la valeur $\delta_{\alpha'\alpha^0}$, qui est maintenant correctement normalisée. Cela donne en première approximation

$$i\hbar\dot{a}(\alpha') = V(\alpha'\alpha^0) = v(\alpha'\alpha^0) = v(\alpha'\alpha^0)e^{i[W(\alpha')-W(\alpha^0)]t/\hbar},$$

qui amène à

$$i\hbar a(\alpha') = \delta_{\alpha'\alpha^0} + v(\alpha'\alpha^0) \frac{e^{i[W(\alpha')-W(\alpha^0)]t/\hbar} - 1}{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]/\hbar},$$

correspondant à (22). Si, comme précédemment, nous transformons les variables $W, \gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_{u-1}$, nous obtenons (quand $\gamma' \neq \gamma^0$)

$$a(W'\gamma') = v(W', \gamma' ; W^0, \gamma^0) [1 - e^{i(W'-W^0)t/\hbar}] / (W' - W^0).$$

La probabilité du système d'être dans un état pour lequel chaque γ_k est égal à γ'_k est $\sum_{W'} |a(W'\gamma')|^2$. Si les états stationnaires sont proches les uns des autres et si le temps t n'est pas trop grand, nous pouvons remplacer cette somme par l'intégrale $(\Delta W)^{-1} \int |a(W'\gamma')|^2 dW'$, où ΔW est l'écart entre les niveaux d'énergie. En évaluant cette intégrale comme précédemment, nous obtenons pour probabilité par unité de temps d'une transition vers un état pour lequel chaque $\gamma_k = \gamma'_k$

$$(32) \quad 2\pi/\hbar\Delta W \cdot |v(W^0, \gamma' ; W^0, \gamma^0)|^2.$$

En appliquant ce résultat, nous pouvons prendre pour γ n'importe quel ensemble de variables qui sont indépendantes de l'énergie propre totale W et qui avec W définissent un état stationnaire.

Nous retournons maintenant au problème défini par l'hamiltonien (30) et considérons le processus d'absorption dans lequel l'atome saute de l'état J^0 à l'état J' avec absorption d'un photon de l'état r . Nous prenons comme variables γ' les variables J' of the de l'atome avec les variables qui définissent la direction du mouvement et l'état de polarisation du quantum absorbé, mais pas son énergie. L'élément matriciel $v(W^0, \gamma' ; W^0, \gamma^0)$ devient

$$h^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{3}{2}} (\nu_r/\sigma_r)^{\frac{1}{2}} \dot{X}_r(J^0 J') N_r^0,$$

où $\dot{X}_r(J^0 J')$ est l'élément matriciel ordinaire ($J^0 J'$) de \dot{X}_r . Par conséquent, à partir de (32), la probabilité par unité de temps du processus d'absorption est

$$\frac{2\pi}{\hbar\Delta W} \cdot \frac{h\nu_r}{c^3\sigma_r} |\dot{X}_r(J^0 J')|^2 N_r^0.$$

Pour obtenir la probabilité du processus lorsque le photon vient depuis n'importe quelle direction dans un angle solide $d\omega$, nous devons multiplier cette expression par le nombre de directions possibles pour le quantum de lumière dans l'angle solide $d\omega$, qui est $d\omega\sigma_r\Delta W/2\pi\hbar$. Cela donne

$$d\omega \frac{\nu_r}{\hbar c^3} |\dot{X}_r(J^0 J')|^2 N_r^0 = d\omega \frac{1}{2\pi\hbar^2 c \nu_r^2} |\dot{X}_r(J^0 J')|^2 I_r$$

avec l'aide de (28). Par conséquent le coefficient de probabilité pour le processus d'absorption est $1/2\pi\hbar^2 c \nu_r^2 \cdot |\dot{X}_r(J^0 J')|^2$, conformément à la valeur habituelle du coefficient d'absorption d'Einstein en mécanique matricielle. La concordance des coefficients d'émission peut être vérifiée de la même manière.

La présente théorie, puisqu'elle rend compte de sa propre façon de l'émission spontanée, doit supposément donner l'effet de la réaction de la radiation sur le système émettant, et permettre de calculer les largeurs naturelles des raies spectrales, si l'on réussit à dépasser les difficultés mathématiques que présente la recherche d'une solution générale au problème de l'onde correspondant à l'hamiltonien (30). La théorie permet également de comprendre comment il se fait qu'il n'y ait pas de violation des lois de conservation de l'énergie quand, disons, un photo-électron est émis par un atome sous l'action d'une radiation incidente extrêmement faible. L'énergie de l'interaction entre l'atome et la radiation est un q -nombre qui ne commute pas avec les premières intégrales du mouvement de l'atome seul ou avec l'intensité de la radiation. De ce fait, on ne peut pas spécifier cette énergie par un c -nombre en même temps qu'on spécifie l'état stationnaire de l'atome et l'intensité de la radiation par des c -nombres. En particulier, on ne peut pas dire que l'énergie d'interaction tend vers zéro quand l'intensité de la radiation incidente tend vers zéro. Il y a du coup toujours une partie non spécifiable de l'énergie d'interaction qui peut fournir de l'énergie au photo-électron.

Je voudrais exprimer ma gratitude au Prof. Niels Bohr pour son intérêt pour ce travail et pour de nombreuses discussions amicales à ce propos.

Résumé

On traite le problème d'un assemblage de systèmes similaires satisfaisant les contraintes de Einstein-Bose de la mécanique statistique, qui interagit avec un autre système différent, une fonction hamiltonienne étant obtenue pour décrire le mouvement. La théorie est appliquée à l'interaction d'un assemblage de quanta lumineux et d'un atome ordinaire, et l'on montre que cela fournit les lois d'Einstein pour l'émission et l'absorption d'une radiation.

L'interaction d'un atome avec des ondes électromagnétiques est alors considérée, et il est montré que si l'on prend des énergies et des phases d'ondes qui sont des q -nombres satisfaisant les conditions propres du quantum lui-même plutôt que des c -nombres, la fonction hamiltonienne prend la même forme que celle du traitement quantique. La théorie amène à l'expression correcte des A et B d'Einstein.

L'élimination des nœuds en mécanique quantique

P. A. M. Dirac

1. Introduction.

Les lois de la mécanique classique doivent être généralisées quand on les applique à des systèmes atomiques, la généralisation étant que la loi commutative de la multiplication, lorsqu'on l'applique à des variables dynamiques, doit être remplacée par certaines conditions quantiques, qui sont juste suffisantes pour permettre d'évaluer $xy - yx$ quand x et y sont donnés. Il découle de cela que les variables dynamiques ne peuvent être des nombres ordinaires exprimables en notation décimale (nombres qui seront appelés des c-nombres), mais doivent être considérés comme des nombres d'une sorte particulière (que nous appellerons q-nombres), dont la nature ne peut être spécifiée exactement, mais qui peuvent être utilisés dans la solution algébrique d'un problème dynamique d'une manière assez analogue à la manière dont les variables classiques correspondantes sont utilisées¹.

La seule justification des noms donnés aux variables dynamiques réside dans l'analogie avec la théorie classique, e.g., si on dit que x, y, z sont les coordonnées cartésiennes d'un électron, on veut seulement dire que x, y, z sont des q-nombres qui apparaissent dans la solution quantique du problème d'une manière analogue aux coordonnées cartésiennes de l'électron dans la solution classique. Il peut se produire que deux q-nombres ou plus sont analogues aux mêmes quantités classiques (l'analogie étant, bien sûr, imparfaite et selon différentes caractéristiques pour des q-nombres différents), et ainsi ont droit aux mêmes noms. Cela arrive, par exemple, quand on considère que les q-nombres seront appelés les fréquences d'un système multi-périodique, donnant lieu à plusieurs fréquences orbitales et plusieurs fréquences de transition, chacune correspondant selon certains critères aux fréquences classiques. Dans un tel cas, on doit décider quelles sont les propriétés des variables classiques qui sont dynamiquement les plus importantes, et on doit choisir le q-nombre qui a ces propriétés comme étant la variable quantique correspondante.

Dans le traitement classique du problème dynamique d'un certain nombre de particules ou d'électrons bougeant dans un champ central de force et se perturbant les uns les autres, on commence toujours par faire la simplification initiale, connue sous le nom d'élimination des nœuds, qui consiste à obtenir une transformation de contact des coordonnées cartésiennes et des moments des électrons à un ensemble de variables canoniques, dont toutes sauf trois sont indépendantes de l'orientation du système comme un tout, alors que les trois en question déterminent l'orientation. En l'absence d'un champ de force externe, l'Hamiltonien, quand il est exprimé en fonction des nouvelles variables, doit être indépendant de ces trois, ce qui simplifie l'équation du mouvement. On peut montrer que les nouvelles variables peuvent être les suivantes : la distance r de chaque électron au centre, avec la composante radiale du moment p_r comme variable conjuguée, la composante M_z ($= p$ disons) du moment angulaire total du système dans une direction donnée, z disons, avec l'azimut de cette direction par rapport à la direction du moment total comme variable conjuguée ; et dans le cas d'un

P. A. M. Dirac, Lycée St. John, Cambridge.

Communiqué par R. H. Fowler, F.R.S., reçu le 27 mars 1926.

traduction Denise Vella-Chemla, janvier 2021.

1. Roy. Soc. Proc., A, vol. 110, p. 561 (1926). La méthode qui est donnée dans les § 1 et § 4 de cette référence est celle que nous utiliserons ici.

système avec un seul électron, les seules autres nouvelles variables doivent être la grandeur du moment angulaire k , avec l'angle θ dans le plan orbital entre le vecteur rayon et la ligne d'intersection du plan orbital avec le plan xy comme variable conjuguée ; alors que dans le cas de deux électrons, les nouvelles variables restantes doivent être les moments angulaires k et k' des deux électrons, avec, pour variables conjuguées, les angles θ et θ' entre les vecteurs rayons et la ligne des nœuds, et le moment angulaire total j avec l'azimut ψ de la ligne de nœuds par rapport à la direction de j pour variable conjuguée. La transformation n'implique pas de choses sensiblement différentes lorsqu'il y a plus de deux électrons, et on peut considérer que tous les électrons sauf un forment un système interne, ou noyau, qui joue le rôle du second électron quand il n'y en a que deux, de telle façon que le j du noyau compte comme le k' du système global, le ψ du noyau comptent comme le θ' du système global, alors que la grandeur des résultants de k et k' correspond aux j du système global, et l'azimut par rapport à la direction du résultant de la ligne d'intersection des plans perpendiculaires aux vecteurs de k et k' est le ψ . Toutes les nouvelles variables sont indépendantes de l'orientation du système comme un tout, exceptés p , ϕ et ψ (ou θ quand il n'y a qu'un seul électron). On peut appeler les variables k, k', j et p des variables d'action, et leurs conjugués canoniques des variables d'angle.

L'objet du présent article est de réaliser la simplification initiale correspondante dans le traitement quantique du problème par l'introduction de certaines variables quantiques, à qui on donnera les mêmes noms r, p_r, k, θ , etc. dont les propriétés après recherche s'avèreront être très analogues à celles des variables classiques. Les variables quantiques, bien sûr, ne peuvent être considérées géométriquement. Les relations géométriques satisfaites par les variables classiques doivent être exprimées sous une forme analytique de telle façon que l'on puisse essayer d'obtenir les variables quantiques qui satisfont les mêmes relations algébriques. Si une variable classique est indépendante de l'orientation du système comme un tout, la variable quantique correspondante doit être invariante selon la transformation

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{x} = l_1x + m_1y + n_1z & \bar{p}_x = l_1p_x + m_1p_y + n_1p_z \\ \bar{y} = l_2x + m_2y + n_2z & \bar{p}_y = l_2p_x + m_2p_y + n_2p_z \\ \bar{z} = l_3x + m_3y + n_3z & \bar{p}_z = l_3p_x + m_3p_y + n_3p_z \end{cases}$$

où les l , m et n sont des c -nombres satisfaisant les mêmes relations que les coefficients classiques pour les axes de rotation. Les nouvelles variables, bien sûr, doivent être réelles, et également les variables d'angles θ, θ', ψ et ϕ doivent être telles que les coordonnées cartésiennes, quand on les exprime en fonction des nouvelles variables, sont des multiples périodiques des θ, θ', ψ et ϕ de période 2π . Finalement, la propriété la plus essentielle des nouvelles variables est qu'elles doivent être canoniques, ce qui peut être vérifié seulement en évaluant toutes leurs expressions par crochets de Poisson, calculées pour les variables prises deux à deux.

Dans le présent article, nous ne sommes pas trop concernés par ce qu'est l'Hamiltonien du système. Nous voulons seulement trouver la transformation de contact à partir des coordonnées cartésiennes et des moments pour les nouvelles variables, notamment, les r, p_r et certaines variables que nous appellerons variables d'action et variables d'angle. Ce seront de vraies actions et de vraies variables d'angle seulement si l'Hamiltonien est une fonction des r, p_r et des variables d'action seulement. Dans ce cas, pour compléter la solution du problème dynamique, il est seulement nécessaire d'obtenir une transformation de contact de r et p_r à une action externe et des variables d'angle, dont la transformation peut nécessiter l'ajout de fonctions des r et p_r aux précédentes variables d'angle.

Quand l'Hamiltonien ne satisfait pas cette condition, les variables d'action et d'angle introduites dans le présent article forment un système préliminaire de variables canoniques, dont les variables uniformisantes finales peuvent être obtenues par une transformation de contact supplémentaire. On peut montrer que l'énergie cinétique d'un électron est une fonction des r , p_r , et des seules variables d'angle, et par conséquent, si le champ total dans lequel se meut l'électron est approximativement central ou symétrique par rapport à l'axe des z , l'Hamiltonien diffèrera d'une fonction des r , p_r et des variables d'action seulement par une petite quantité, de telle façon que la transformation de contact supplémentaire peut être effectuée à l'aide de la théorie de la perturbation. En l'absence d'un champ externe de force, l'Hamiltonien doit dans tous les cas être une fonction seulement de celles des nouvelles variables qui sont invariantes par la transformation (1), puisque l'Hamiltonien lui-même est invariant selon cette transformation.

2. Relations algébriques préliminaires.

Soient x, y, z et p_x, p_y, p_z , les coordonnées cartésiennes et les moments d'un électron. Toute fonction des coordonnées et moments d'un électron commute avec toute fonction de ceux d'un autre. Définissons r et p_r par

$$(2) \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$(3) \quad rp_r = xp_x + yp_y + zp_z - ih.$$

Alors nous avons, puisque r commute avec x, y et z

$$[r, rp_r] = x[r, p_x] + y[r, p_y] + z[r, p_z].$$

Maintenant

$$[r, p_x] = [(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, p_x] = x/(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = x/r,$$

avec des équations similaires pour $[r, p_y]$ et $[r, p_z]$. Par conséquent

$$[r, rp_r] = (x^2 + y^2 + z^2)/r = r,$$

ou

$$[r, p_r] = 1.$$

Ainsi r et p_r sont canoniquement conjugués et peuvent être pris comme paires des nouvelles variables, puisqu'ils sont trivialement invariants selon la transformation (1). Le $(-ih)$ est mis dans l'équation (3) pour des raisons de symétrie et pour rendre $p - r$ réel, l'équation imaginaire conjuguée, obtenue en écrivant $-i$ pour i et en inversant l'ordre des facteurs des produits est

$$(3') \quad p_r r = p_x x + p_y y + p_z z + ih$$

qui est en accord avec (3).

Les composants du moment angulaire² d'un électron sont définis, comme dans la théorie classique, par

$$m_x = yp_z - zp_y, \quad m_y = zp_x - xp_z, \quad m_z = xp_y - yp_x.$$

2. Les relations de moment angulaire de cette section ont été obtenues indépendamment par Born, Heisenberg et Jordan (Zeits. f. Phys. vol. 35, p. 557 (1926)).

Nous avons à la fois l'identité

$$(4) \quad xm_x + ym_y + zm_z = 0$$

comme dans la théorie classique. Aussi

$$(5) \quad \begin{cases} [m_z, x] &= [xp_y - yp_x, x] = y \\ [m_z, y] &= [xp_y - yp_x, y] = -x \end{cases}$$

$$(6) \quad [m_z, z] = [xp_y - yp_x, z] = 0,$$

et similairement

$$(7) \quad [m_z, p_x] = p_y, \quad [m_z, p_y] = -p_x,$$

$$(8) \quad [m_z, p_z] = 0,$$

avec les relations correspondantes pour m_x , et m_y . De plus,

$$(5) \quad \begin{cases} [m_x, m_y] &= [m_x, zp_x - xp_z] = [m_x, z]p_x - x[m_x, p_z] \\ &= -yp_x + xp_y = m_z \\ [m_y, m_z] &= m_x, \quad [m_z, m_x] = m_y, \text{ de façon similaire.} \end{cases}$$

Ces relations seront continuellement utilisées dans la suite du travail. On peut se souvenir aisément des équations (5), (7) et (9) à partir du fait que le signe + est utilisé quand l'ordre cyclique $(x y z x)$ est préservé, et le signe - dans le cas contraire.

De (2), (5) et (6),

$$[r^2, m_z] = [x^2 + y^2, m_z] = -2xy + 2xy = 0,$$

et de (3), (5), (6), (7) et (8),

$$[rp_r, m_z] = [xp_x + yp_y, m_z] = -yp_x - xp_y + xp_y + yp_x = 0,$$

de telle façon que r et p_r commutent avec m_z , et par conséquent, il y a symétrie également avec m_x et m_y , et par conséquent, avec toute fonction des moments angulaires.

Mettons,

$$M_x = \sum m_x, \quad M_y = \sum m_y, \quad M_z = \sum m_z,$$

la sommation étant développée pour tous les électrons. Nous avons à la fois de (5) et (6) pour chaque électron

$$(10) \quad [M_x, x] = y, \quad [M_x, y] = -x, \quad [M_x, z] = 0.$$

Également

$$(11) \quad \begin{cases} [M_x, M_y] &= [\sum m_x, \sum m_y] = \sum [m_x, m_y] = \sum m_z = M_z \\ [M_y, M_z] &= M_x, \quad [M_z, M_x] = M_y, \text{ de façon similaire.} \end{cases}$$

Posons

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = m^2.$$

On a à partir de (9),

$$[m^2, m_z] = [m_x^2 + m_y^2, m_z] = -m_y m_x - m_x m_y + m_x m_y + m_y m_x = 0,$$

de telle façon que m commute avec m_z , et par conséquent également avec m_x et m_y . De façon similaire, si

$$M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M^2$$

M commute avec M_x , M_y et M_z .

L'énergie cinétique d'un électron est une fonction de $(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$. Grâce à (2), (3) et (3'), on obtient

$$\begin{aligned}
m^2 &= \sum_{xyz} (yp_z - zp_y)^2 = \sum_{xyz} (yp_zyp_z + zp_yzp_y - yp_zzp_y - zp_yyp_z) \\
&= \sum_{xyz} (y^2p_z^2 + z^2p_y^2 - yp_y p_z z - zp_z p_y y - xp_x p_x x + x^2 p_x^2 - 2ihxp_x) \\
&= (x^2 + y^2 + z^2)(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - (xp_x + yp_y + zp_z)(p_x x + p_y y + p_z z + 2ih) \\
&= r^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - (rp_r + ih)(p_r r + ih) \\
&= r^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - r^2 p_r^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$(12) \quad p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = p_r^2 + m^2/r^2$$

comme dans la théorie classique. Maintenant m^2 va être une fonction des variables d'action, et par conséquent, l'énergie cinétique du système sera une fonction des r , p_r et des variables d'action.

Nous ne serons pas davantage concernés par les r et p_r si ce n'est pour vérifier qu'ils commutent avec chacune des variables d'action et d'angle qui seront introduites, ceci étant nécessaire pour que les variables soient canoniques.

3. Les variables d'action

Dans la théorie classique, l'une des variables d'action à introduire, appelons-la k , est juste égale à m . La variable quantique k peut ne pas être égale à m , mais elle doit être choisie de telle façon que x, y et z soient des fonctions périodiques de sa variable conjuguée θ de période 2π . Dans la théorie classique, si une coordonnée, disons z , est développée en série de Fourier des variables d'angle, les coefficients des termes dans lesquels $e^{ui\theta}$ intervient s'évanouissent tous à moins que $n = \pm 1$. Ce fait s'exprime analytiquement par l'équation $\partial^2 z / \partial \theta^2 = -z$, ou par l'expression par crochets de Poisson $[k, [k, z]] = -z$. Nous essayons de choisir nos variables quantiques de façon à satisfaire également

$$(13) \quad [k, [k, z]] = -z.$$

Cette relation devrait assurer que quand z est exprimé en fonction des nouvelles variables, il devrait être périodique en θ de période 2π , et, de plus, que tous les coefficients dans le développement de Fourier devraient s'évanouir exceptés ceux des termes en $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. La règle de sélection ordinaire pour k devrait alors en découler.

L'équation (13) donne

$$[k^2, [k, z]] = k[k, [k, z]] + [k, [k, z]]k = -(kz + zk),$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
[k^2, [k^2, z]] &= k[k^2, [k, z]] + [k^2, [k, z]]k = -(k^2 z + 2kzk + zk^2) \\
&= -2(k^2 z + zk^2) + (k^2 z - 2kzk + zk^2) \\
&= -2(k^2 z + zk^2) - h^2 [k, [k, z]] \\
&= -2(k^2 z + zk^2) + h^2 z
\end{aligned}$$

ou

$$(14) \quad \frac{1}{2}[k^2, [k^2, z]] = -(k^2 - \frac{1}{4}h^2)z - z(k^2 - \frac{1}{4}h^2).$$

Maintenant de (5) et (6)

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} [m^2, z] &= \frac{1}{2} [m_x^2 + m_y^2, z] = \frac{1}{2} (-ym_x - m_x y + xm_y + m_y x) \\ &= m_y x - m_x y + ihz = m_y x - ym_x = xm_y - m_x y. \end{aligned}$$

Des relations similaires sont vérifiées pour $\frac{1}{2}[m^2, x]$ et $\frac{1}{2}[m^2, y]$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [m^2 [m^2, z]] &= m_y [m^2, x] - m_x [m^2, y] + ih [m^2, z] \\ &= m_y 2(ym_z - m_y z) - m_x 2(m_x z - xm_z) + ih [m^2, z] \\ &= 2(m_x x + m_y y + m_z z)m_z - 2(m_x^2 + m_y^2 + m_z^2)z + ih [m^2, z] \\ &= -2m^2 z + (m^2 z - zm^2) \\ &= -m^2 z - zm^2. \end{aligned}$$

En comparant cela avec l'équation (14), nous voyons qu'elles sont en accord si l'on prend

$$(17) \quad m^2 = k^2 - \frac{1}{4}h^2 = k_1 k_2,$$

où

$$k_1 = k + \frac{1}{2}h, \quad k_2 = k - \frac{1}{2}h.$$

(En général, nous prendrons l'indice 1 pour chaque variable d'action pour dénoter que la valeur de cette variable est augmentée de $\frac{1}{2}h$, et l'indice 2 pour dénoter que sa valeur est diminuée de $\frac{1}{2}h$.)

Avec k définie par (17), l'équation (14) découle de l'équation (16), mais l'équation (13) ne découle pas nécessairement de l'équation (14). Nous pourrions, pourtant, prendre (13), en même temps que les équations correspondantes

$$(18) \quad [k, [k, x]] = -x \quad [k, [k, y]] = -y$$

comme complétant la définition de k , qui avait été précédemment seulement défini par k^2 . Il semble probable qu'en général, une équation algébrique en algèbre quantique a un nombre infini de racines, e.g., l'équation algébrique $xa - ax = b$ est analogue à une équation différentielle de la théorie classique, et sa solution générale contient des c -nombres arbitraires. Il semble ainsi raisonnable de prendre deux équations ou plus pour définir un q -nombre, lorsque c'est nécessaire, sous la contrainte que ces équations sont consistantes, comme dans le cas présent.

On peut examiner la nécessité des prochaines suppositions (13), (18) dans la définition de k par la méthode matricielle utilisée par Born, Heisenberg et Jordan³. Si on regarde (14) comme une équation matricielle et que l'on rend égaux les composants (nm) des deux côtés, on obtient une relation qui est effectivement la même que l'équation 22 chap. 4 de Born, Heisenberg et Jordan (excepté le fait que Born, Heisenberg et Jordan utilisent M plutôt que m , et X , une fonction linéaire de x, y et z , plutôt que z). De ceci, ces auteurs déduisent que tous les composants (nm) de X s'évanouissent, exceptés ceux reliés aux deux k , a_n et a_m disons, qui satisfont

$$(23) \text{ chap. 4.} \quad a_n = \pm a_m \pm 1.$$

Mais nous voulons que tout $X (nm)$ s'évanouisse excepté quand

$$(23') \text{ chap. 4.} \quad a_n = a_m \pm 1$$

Born, Heisenberg et Jordan posent que les valeurs négatives de k peuvent être ignorées sans perte de généralité, mais ceci n'est justifiable que si on peut montrer que les transitions d'une valeur po-

3. Born, Heisenberg et Jordan, loc. cit.

sitive à une valeur négative k ne peuvent avoir lieu. Ceci ne peut être réalisé sans une supposition supplémentaire, puisque s'il y a une représentation matricielle dans laquelle tout $X (nm)$ s'évanouit excepté quand (23') chap. 4 est satisfaite, on peut obtenir de celle-ci d'autres relations par lesquelles la condition n'est pas respectée, mais seulement la condition que chaque $X (nm)$ s'évanouit, excepté quand (23) chap. 4 est satisfaite, en interchangeant dans la matrice k quelques-unes des paires de lignes, et les paires de colonnes correspondantes, pour lesquelles les a_n sont égaux en valeur mais de signes opposés, car ce procédé n'affecte pas la validité de toute équation matricielle dans laquelle k n'intervient que sous la forme k^2 . Les équations (13), (18) fournissent la supposition supplémentaire nécessaire.

On peut prendre comme autre variable d'action la quantité M_z , égale à p disons, puisque de (10)

$$(19) \quad \begin{cases} [p, [p, x]] = [p, y] = -x \\ [p, [p, y]] = -[p, x] = -y. \end{cases}$$

Ces équations montrent que x et y sont des fonctions périodiques de ϕ , les variables conjuguées des p , de période 2π , et que tous les coefficients dans leurs développements de Fourier s'évanouissent exceptés ceux des termes en $e^{i\phi}$ et $e^{-i\phi}$. De plus, puisque $[p, z] = 0$, tous les coefficients dans le développement de Fourier de z s'évanouissent exceptés ceux des termes indépendants de ϕ . Les règles de sélection pour p découlent de cela.

À nouveau, quand il y a plus d'un électron dans le système, nous pouvons définir j par

$$(20) \quad M^2 = j^2 - \frac{1}{4}h^2 = j_1, j_2,$$

qui est analogue à (17), et prendre j comme une variable d'action, parce que, comme nous le montrerons ultérieurement, des quantités μ_x, μ_y, μ_z peuvent être trouvées qui satisfont

$$(21) \quad [j, [j, \mu_x]] = -\mu_x, \quad [j, [j, \mu_y]] = -\mu_y, \quad [j, [j, \mu_z]] = -\mu_z.$$

Des résultats du § 2, il est évident que j, p et les k commutent avec les r et les p_r et les uns avec les autres et également que les j et les k sont invariants par la transformation (1).

4. Les variables d'angle.

Chacune des variables d'angle w est donnée dans la théorie classique par le fait qu' e^{iw} est égal à la racine carrée du rapport de deux quantités qui sont des imaginaires conjugués, i.e. par une relation du type

$$(22) \quad e^{iw} = \left(\frac{a + ib}{a - ib} \right)^{\frac{1}{2}}$$

où a et b sont réels. Cela bien sûr, rend w réel, puisque si on écrit $-i$ à la place de i dans (22), elle reste vraie. Dans la théorie quantique, il y a deux façons correspondantes par lesquelles on peut définir e^{iw} , notamment,

$$e^{iw} = \left\{ (a + ib) \frac{1}{a - ib} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad e^{iw} = \left\{ \frac{1}{a - ib} (a + ib) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

mais aucune des deux ne rend w réel. La généralisation quantique correcte de (22) est la relation plus symétrique

$$(23) \quad e^{iw}(a - ib)e^{iw} = a + ib.$$

Celle-ci devient, quand on rend égaux les imaginaires conjugués des deux côtés

$$e^{-iw}(a+ib)e^{-iw} = a-ib,$$

ce qui est équivalent à (23), de telle façon que w défini de cette manière est réel. On peut résoudre l'équation (23) pour e^{iw} des deux manières, notamment,

$$e^{iw}(a-ib)e^{iw}(a-ib) = (a+ib)(a-ib),$$

ce qui donne

$$e^{iw}(a-ib) = \{(a+ib)(a-ib)\}^{\frac{1}{2}} = \{(a+ib)(a-ib)\}^{-\frac{1}{2}}(a+ib)(a-ib),$$

de telle façon que,

$$(24) \quad e^{iw} = \{(a+ib)(a-ib)\}^{-\frac{1}{2}}(a+ib),$$

ou alternativement

$$(a-ib)e^{iw}(a-ib)e^{iw} = (a-ib)(a+ib),$$

qui donne

$$(25) \quad e^{iw} = (a+ib)\{(a-ib)(a+ib)\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Supposons maintenant que J est une variable d'action telle que

$$(26) \quad [J, a] = b, \quad [J, b] = -a.$$

On a

$$[J, a+ib] = b-ia = -i(a+ib)$$

$$[J, a-ib] = b+ia = i(a-ib),$$

de telle façon que

$$(27) \quad \begin{cases} J(a+ib) = (a+ib)(J+h) \\ J(a-ib) = (a-ib)(J-h), \\ J(a+ib)(a-ib) = (a+ib)(J+h)(a-ib) = (a+ib)(a-ib)J, \end{cases}$$

de telle façon que J commute avec le produit $(a+ib)(a-ib)$. Par conséquent, de (24) ou (25)

$$Je^{iw} = e^{iw}(J+h),$$

ou

$$[e^{iw}, J] = ie^{iw}.$$

Il n'en découle pas rigoureusement que $[w, J] = 1$, mais puisque w n'intervient dans l'analyse que dans l'expression e^{iw} , la relation $[e^{iw}, J] = ie^{iw}$ est suffisante pour montrer que nous pouvons prendre w comme étant la variable conjuguée de J .

De (26)

$$(28) \quad [J, [J, a]] = -a.$$

Par conséquent, pour déterminer la variable d'angle w canoniquement conjuguée à n'importe quelle

variable d'action J , on doit rechercher une quantité a qui satisfait (28) et qui commute avec chacune des autres variables d'action, et alors, si on réussit à en trouver une, il faut alors définir w par (28) avec b égal à $[J, a]$. Cela rendra w réel et conjugué à J , et le fera commuter avec toutes les autres variables d'action. Il devra être vérifié, bien sûr, qu'il commute avec les r et p_r . (Dans la théorie classique, les conditions qu' a doit satisfaire sont qu'elle doit varier périodiquement selon la loi des cosinus lorsque w croît uniformément et que les autres nouvelles variables sont gardées constantes, et doit rester constante lorsque les variables d'action r , p_r , et w sont gardées constantes et que les autres variables d'angle varient arbitrairement.)

Pour déterminer, par exemple, la variable d'angle θ canoniquement conjuguée au k du § 3, nous savons que $[k, [k, z]] = -z$ et que z commute avec p , et par conséquent, pour le cas d'un système avec un seul électron quand il n'y a pas d'autre variable d'action, nous pouvons définir θ par

$$(29) \quad e^{i\theta}(z - i[k, z])e^{i\theta} = z + i[k, z].$$

Nous devons prendre une valeur différente pour a lorsqu'il y a plus d'un électron dans le système, puisque z ne commute pas avec j . Il est évident que θ , défini par (29) ou

$$e^{i\theta} = \{(z + i[k, z])(z - i[k, z])\}^{-\frac{1}{2}}(z + i[k, z]),$$

commute avec r puisque z et k le font. Pour prouver qu'il commute également avec p_r , on a

$$[z, rp_r] = z$$

ou

$$z(rp_r) = (rp_r + ih)z.$$

Cette équation doit rester vraie quand on substitue à z l'expression $(z + i[k, z])$ ou $(z - i[k, z])$ ou $\{(z + i[k, z])(z - i[k, z])\}^{\frac{1}{2}}$.⁴ Il en découle que $e^{i\theta}$ commute avec rp_r , et par conséquent avec p_r . De (27), nous déduisons l'équation

$$(30) \quad k_2(z + i[k, z]) = (z + i[k, z])k_1,$$

qui sera nécessaire ultérieurement.

De la même façon, nous pouvons définir ϕ , la variable d'angle canoniquement conjuguée à p , en prenant $a = M_x$, puisque nous savons que $[p, [p, M_x]] = -M_x$, et que M_x commute avec chaque k et avec j . Nous avons par conséquent

$$e^{i\phi}(M_x - iM_y)e^{i\phi} = M_x + iM_y.$$

Il est évident que r et p_r commutent avec ϕ , puisqu'elles commutent avec M_x et M_y .

Les équations (23), (24), (25) pour les variables d'angle typiques sont plus utiles sous la forme

$$(31) \quad \begin{cases} a + ib = \{(a + ib)(a - ib)\}^{\frac{1}{2}}e^{iw} = e^{iw}\{(a - ib)(a + ib)\}^{\frac{1}{2}}. \\ a - ib = \{(a - ib)(a + ib)\}^{\frac{1}{2}}e^{-iw} = e^{-iw}\{(a + ib)(a - ib)\}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Il est nécessaire d'évaluer les produits de $(a + ib)$ et $(a - ib)$ dans chaque cas dans lesquels ces

4. Cela n'est pas rigoureux, mais semble justifiable.

équations sont utilisées. Dans le cas où a est M_x et b est M_y , on a

$$\begin{aligned} (M_x + iM_y)(M_x - iM_y) &= M_x^2 + M_y^2 - i(M_xM_y - M_yM_x) \\ &= M^2 - M_z^2 + hM_z = j^2 - \frac{1}{4}h^2 - p^2 + hp \\ &= j^2 - p_2^2, \end{aligned}$$

de telle façon que les équations (31) deviennent

$$(32) \quad \begin{cases} M_x + iM_y = (j^2 - p_2^2)^{\frac{1}{2}} e^{i\phi} = e^{i\phi} (j^2 - p_1^2)^{\frac{1}{2}} \\ M_x - iM_y = (j^2 - p_1^2)^{\frac{1}{2}} e^{-i\phi} = e^{-i\phi} (j^2 - p_2^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

L'évaluation du produit $(z + i[k, z])(z - i[k, z])$ n'est pas si facile. Nous évaluerons le produit plus général $(z + i[k, z])(\zeta - i[k, \zeta])$, où ξ, η, ζ sont trois quantités satisfaisant les relations analogues à (4), (5) et (6) (et les relations correspondant à (5) et (6) pour m_y et m_z) dans lesquelles x, y, z ont été remplacées par ξ, η, ζ car nous aurons besoin de cette partie de l'analyse ultérieurement.

ξ, η, ζ doivent satisfaire les relations analogues à n'importe quelle conséquence de (4), (5) et (6) qui ne nécessitent pas pour leur preuve le fait que x, y, z commutent les unes avec les autres, comme (15) et (13) [si la contrainte que les suppositions auxiliaires (13), (18) nécessitées pour la définition de k sont vraies pour les ξ, η, ζ].

Nous déduisons de (15), dans laquelle m^2 est remplacé par k^2 ,

$$k[k, z] + [k, z]k = [k^2, z] = 2(m_yx - m_xy + ihz).$$

Également

$$k[k, z] - [k, z]k = ih[k, [k, z]] = -ihz$$

qui découle de (13). Par conséquent,

$$(33) \quad k[k, z] = m_yx - m_xy + \frac{1}{2}ihz,$$

et de façon similaire

$$k[k, \zeta] = m_y\xi - m_x\eta + \frac{1}{2}ih\zeta.$$

De (4)

$$m_zzm_z\zeta = (m_xx + m_yy)(m_x\xi + m_y\eta),$$

de telle façon que

$$\begin{aligned} &(m_yx - m_xy)(m_y\xi - m_x\eta) + m_zzm_z\zeta \\ &= m_y(xm_y + ym_x)\xi + m_x(y m_x + x m_y)\eta \\ &\quad + m_x(xm_x - ym_y)\xi + m_y(y m_y - x m_x)\eta \\ &= m_y(m_yx + m_xy)\xi + m_x(m_xy + m_yx)\eta \\ &\quad + m_x(m_xx - m_yy)\xi + m_y(m_yy - m_xx)\eta \end{aligned}$$

$$= (m_x^2 + m_y^2)(x\xi + y\eta) - ihm_z y\xi + ihm_z x\eta$$

En utilisant ces résultats et également (30), on trouve

$$\begin{aligned}
(34) \quad k(k-h)(z+i[k,z])(\zeta-i[k,\zeta]) &= k(z+i[k,z])k(\zeta-i[k,\zeta]) \\
&= \{k_2 z + i(m_y x - m_x y)\} \{k_1 \zeta - i(m_y \xi - m_x \eta)\} \\
&= (m_y x - m_x y)(m_y \xi - m_x \eta) + \{k_2 z + i(m_y x - m_x y)\} k_1 \zeta \\
&\quad - ik_2 z(m_y \xi - m_x \eta) \\
&= (m_x^2 + m_y^2)(x\xi + y\eta) - m_z^2 z\zeta + ihm_z(x\eta - y\xi) \\
&\quad + k_2 \{k_2 z + i(m_y x - m_x y)\} \zeta - ik_2 z(m_y \xi - m_x \eta) \\
&= (k_1 k_2 - m_z^2)(x\xi + y\eta) + (k_2^2 - m_z^2)z\zeta + ihm_z(x\eta - y\xi) \\
&\quad - ik_2 \{-(m_y x - m_x y)\zeta + (m_y z - ihx)\xi - (m_x z + ihy)\eta\} \\
&= (k_2^2 - m_z^2)(x\xi + y\eta + z\zeta) + ihm_z(x\eta - y\xi) \\
&\quad - ik_2 \{m_x(y\zeta - z\eta) + m_y(z\xi - x\zeta)\}.
\end{aligned}$$

Maintenant, prenons ξ, η, ζ égaux à x, y, z . L'équation (34) se réduit à ce simple résultat

$$(35) \quad k(k-h)(z+i[k,z])(z-i[k,z]) = (k_2^2 - m_z^2)r^2.$$

5. Les équations de transformation pour le système avec un seul électron

Quand le système est constitué d'un seul électron, les nouvelles variables canoniques sont, en plus des r et p_r , les variables d'action k [définies par (17)] et p [= m_z] et les variables d'angle θ et ϕ [définies par (29) et (32)]. Grâce à (35), l'équation de transformation (29) peut être mise sous la forme (31). Le résultat est

$$(36) \quad \begin{cases} z + i[k, z] = rk^{-\frac{1}{2}}(k-h)^{-\frac{1}{2}}(k_2^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}e^{i\theta} \\ \quad \quad \quad = rk^{-\frac{1}{2}}(k_2^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}e^{i\theta}k^{-\frac{1}{2}} = rk^{-\frac{1}{2}}e^{i\theta}(k_1^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}} \\ z - i[k, z] = rk^{-\frac{1}{2}}(k_1^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta}k^{-\frac{1}{2}} = rk^{-\frac{1}{2}}e^{-i\theta}(k_2^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Nous avons déjà montré que les nouvelles variables satisfont toutes les conditions qu'elles doivent satisfaire à l'exception du fait que $[\theta, \phi] = 0$. Cette relation n'est pas très facile à prouver, mais heureusement, elle n'est pas d'une importance dynamique puisque si elle n'est pas vraie, nos θ et ϕ différeront des vraies variables conjuguées à k et p seulement par des quantités réelles qui sont fonctions de k et p seulement, et sont, par conséquent, constantes. L'amplitude de x, y, z exprimée en série de Fourier ne sera alors pas affectée.

Un manière plus simple que celle déjà fournie de prouver que la transformation depuis les variables originales vers les nouvelles variables est une transformation de contact consiste à supposer que les nouvelles variables sont canoniques et satisfont les conditions quantiques, et de déduire de cela que les variables originales sont canoniques. Il est pratique avec cette méthode d'introduire les variables

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (k + p - \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}i(\theta+\phi)} = e^{\frac{1}{2}i(\theta+\phi)}(k + p + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}, \\
\eta_1 &= -i(k + p + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}i(\theta+\phi)} = -ie^{-\frac{1}{2}i(\theta+\phi)}(k + p - \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_2 &= (k - p - \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}i(\theta-\phi)} = e^{\frac{1}{2}i(\theta-\phi)} (k - p + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}, \\ \eta_2 &= -i(k - p + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}i(\theta-\phi)} = -ie^{-\frac{1}{2}i(\theta-\phi)} (k - p - \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

dont on vérifie facilement qu'elles sont canoniques, ce qui donne

$$\begin{aligned}\xi_1 \eta_1 &= -i(k + p - \frac{1}{2}h), & \eta_1 \xi_1 &= -i(k + p + \frac{1}{2}h), \\ \xi_2 \eta_2 &= -i(k - p - \frac{1}{2}h), & \eta_2 \xi_2 &= -i(k - p + \frac{1}{2}h).\end{aligned}$$

Les équations de transformation peuvent maintenant être mises sous la forme simple

$$(37) \quad \begin{cases} x + iy = -\frac{1}{2}rk^{-\frac{1}{2}}(\xi_1^2 - \eta_2^2)k^{-\frac{1}{2}} \\ x - iy = -\frac{1}{2}rk^{-\frac{1}{2}}(\xi_2^2 - \eta_1^2)k^{-\frac{1}{2}} \\ z = \frac{1}{2}rk^{-\frac{1}{2}}(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)k^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}m_x + im_y &= i\xi_1\eta_2 \\ m_x - im_y &= i\xi_2\eta_1 \\ m_z &= \frac{1}{2}i(\xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2) \\ xp_x + yp_y + zp_z &= rp_r + ih,\end{aligned}$$

dont on peut aisément vérifier que x, y, z, p_x, p_y, p_z sont canoniques quand on suppose que les ξ et η sont canoniques. Accessoirement, cette méthode montre que nos θ et ϕ précédents commutent.

Les équations (37) sont aussi les plus pratiques pour évaluer les amplitudes des différentes composantes des vibrations, puisqu'elles donnent directement

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} x + iy &= -\frac{1}{2}r \left\{ \frac{(k + p - \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}(k + p - \frac{3}{2}h)^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}(k + h)^{\frac{1}{2}}} e^{i(\theta+\phi)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k - p + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}(k - p + \frac{3}{2}h)^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}(k + h)^{\frac{1}{2}}} e^{i(\phi-\theta)} \right\} \\ x - iy &= \frac{1}{2}r \left\{ \frac{(k - p - \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}(k - p - \frac{3}{2}h)^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}(k - h)^{\frac{1}{2}}} e^{i(\theta-\phi)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k + p + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}(k + p + \frac{3}{2}h)^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}(k + h)^{\frac{1}{2}}} e^{-i(\phi+\theta)} \right\} \\ z &= \frac{1}{2}r \left\{ \frac{(k + p - \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}(k - p - \frac{3}{2}h)^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}(k - h)^{\frac{1}{2}}} e^{i(\theta+\phi)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(k + p + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}(k - p + \frac{3}{2}h)^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}(k + h)^{\frac{1}{2}}} e^{-i\theta} \right\} \end{aligned} \right.$$

La simplicité des équations (37) est due au fait qu'on peut associer chaque composante de vibration du système avec le produit de deux des variables ξ, η qui ne sont pas conjuguées. Avec des systèmes de plus d'un électron, il y a trop de composantes des vibrations pour qu'on puisse procéder ainsi, de telle façon qu'il n'y a pas d'équations correspondant à (37) pour de tels systèmes.

6. Les équations de transformation pour le système à deux électrons.

Considérons maintenant le cas d'un système avec deux électrons et utilisons des lettres avec des primes comme x', p'_z, m'_x, k' pour dénoter le second électron. Nous prenons comme nouvelles variables, en plus des r, p_r, r', p'_r les variables d'action k [définies par (17)], k', p et j [définies par (20)], et leurs variables conjuguées θ, θ', ϕ et ψ , seront maintenant définies.

Nous définissons comme auparavant ϕ par les équations (32). Pour définir θ , nous devons remplacer les z dans (29) par une quantité qui satisfait également (13) et qui commute avec les k', p et j . Les quantités $xm'_x + ym'_y + zm'_z$ ($= \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}'$ disons, en utilisant le point pour dénoter le produit scalaire et q pour dénoter le vecteur x, y, z) a les propriétés nécessaires, puisque

$$[k, [k, \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}']] = [k, [k, \mathbf{q}]] \cdot \mathbf{m}' = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}'$$

de (18), et

$$[\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}', k'] = 0,$$

grâce au fait que k' commute avec m'_x, m'_y et m'_z ; et de plus, de (4)

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{m}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{M},$$

de telle façon que

$$\begin{aligned} [\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}', p] &= [\mathbf{q} \cdot \mathbf{M}, M_z] = [xM_x + yM_y, M_z] \\ &= -yM_x - xM_y + xM_y + yM_x = 0, \end{aligned}$$

et par symétrie

$$[\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}', M_x] = 0, \quad [\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}', M_y] = 0,$$

de telle façon que

$$[\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}', j] = 0,$$

comme requis. Ainsi, θ défini par

$$(39) \quad e^{i\theta}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' - i[k, \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}'])e^{i\theta} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' + i[k, \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}'].$$

est conjugué à k et commute avec k', p et j , et on peut également montrer que, comme dans le cas d'un électron unique, il commute avec r et p_r . D'une façon similaire, on peut définir θ' par

$$(40) \quad e^{i\theta'}(\mathbf{q}' \cdot \mathbf{m} - i[k', \mathbf{q}' \cdot \mathbf{m}])e^{i\theta'} = \mathbf{q}' \cdot \mathbf{m} + i[k', \mathbf{q}' \cdot \mathbf{m}].$$

Pour définir ψ , nous devons introduire les quantités

$$(41) \quad \begin{cases} \mu_x = m_y m'_z - m_z m'_y = M_y m'_z - m'_y M_z = m'_z M_y - M_z m'_y \\ \mu_y = m_z m'_x - m_x m'_z = M_z m'_x - m'_z M_x = m'_x M_z - M_x m'_z \\ \mu_z = m_x m'_y - m_y m'_x = M_x m'_y - m'_x M_y = m'_y M_x - M_y m'_x \end{cases}$$

Nous avons

$$(42) \quad \begin{cases} [M_z, \mu_x] = [m_z, m_y m'_z] + [m'_z, -m_z m'_y] = -m_x m'_z + m_z m'_x = \mu_y \\ [M_z, \mu_y] = [m_z, -m_x m'_z] + [m'_z, m_z m'_x] = -m_y m'_z + m_z m'_y = -\mu_x \end{cases}$$

$$(43) \quad [M_z, \mu_z] = m_y m'_y + m_x m'_x - m_x m'_x - m_y m'_y = 0$$

et également

$$\begin{cases} \mu \cdot \mathbf{m} = (m_z m_y - m_y m_z) m'_x + (m_x m_z - m_z m_x) m'_y + (m_y m_x - m_x m_y) m'_z \\ = -ih(m_x m'_x + m_y m'_y + m_z m'_z), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mu \cdot m' = m_x(m'_y m'_z - m'_z m'_y) + m_y(m'_z m'_x - m'_x m'_z) + m_z(m'_x m'_y - m'_y m'_x) \\ = -i\hbar(m_x m'_x + m_y m'_y + m_z m'_z), \end{cases}$$

de telle façon que

$$\mu \cdot m = 0.$$

Les relations (42), (43) et (44) entre μ_x, μ_y, μ_z et M_x, M_y, M_z correspondent exactement aux relations (5), (6) et (4) entre x, y, z et m_x, m_y, m_z , de telle façon que n'importe quelle conséquence de (5), (6) et (4) qui ne nécessite pas pour être démontrée que x, y, z commutent les uns avec les autres peut être appliquée directement aux μ et aux M . Les équations (13), (18) sont de telles conséquences, et elles donnent quand on les applique aux μ exactement les équations (21), et ainsi justifient la définition (20) pour la variable d'action j . [Le fait que (13), (18) fassent intervenir une supposition supplémentaire, qui peut être vue comme complétant la définition de k , se répète elle-même, comme (21) fait intervenir la supposition supplémentaire correspondante, qui peut être vue comme complétant la définition de j .] L'équation (33) appliquée aux μ donne de la même façon

$$j[j, \mu_z] = M_y \mu_x - M_x \mu_y + \frac{1}{2} i \hbar \mu_z,$$

dont on aura besoin ultérieurement.

Maintenant μ_x commute de façon évidente avec r, p_r, r', p'_r, k et k' , et nous avons démontré qu'il commute avec p , de telle façon que nous pouvons le prendre pour être substitué à a dans (28) pour la définition de ψ . Nous obtenons alors

$$e^{i\psi}(\mu_z - i[j, \mu_z])e^{i\psi} = \mu_z + i[j, \mu_z].$$

Nous avons ainsi établi toutes les relations nécessaires pour que les nouvelles variables soient canoniques, excepté que les variables d'angle ne commutent pas les unes avec les autres, mais cela, comme précédemment dans le cas de l'électron unique, n'a pas d'importance dynamique. Toutes les nouvelles variables exceptées p, ϕ et ψ sont de façon évidente invariante par la transformation (1).

Pour mettre les équations de transformation (39) et (46) sous la forme (31), il est nécessaire d'évaluer les $(a + ib)(a - ib)$ pour chacune d'elles. Dans le cas de (46), l'analyse menant à l'équation (34) est directement applicable, et donne, quand on écrit j pour k, M_x et M_y pour m_x et m_y, p pour m_x , et μ_x, μ_y, μ_z pour x, y, z et ξ, η, ζ ,

$$\begin{aligned} & j(j - \hbar)(\mu_z + i[j, \mu_z])(\mu_z - i[j, \mu_z]) \\ &= (j^2 - \hbar^2)(\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2) + i\hbar p(\mu_x \mu_y - \mu_y \mu_x) \\ & \quad - i j^2 \{M_x(\mu_y \mu_z - \mu_z \mu_y) + M_y(\mu_z \mu_x - \mu_x \mu_z)\}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2 &= \sum_{xyz} (m_y^2 m_z'^2 + m_z^2 m_y'^2 - m_y m_z m'_z m'_y - m_z m_y m'_y m'_z) \\ &= (m_x^2 + m_y^2 + m_z^2)(m_x'^2 + m_y'^2 + m_z'^2) \\ & \quad - (m_x m'_x + m_y m'_y + m_z m'_z)^2 \\ & \quad + \sum_{xyz} xyz (m_y m_z - m_z m_y)(m'_y m'_z - m'_z m'_y) \\ &= m^2 m'^2 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}')^2 - \hbar^2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}', \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
[\mu_x, \mu_y] &= [\mu_x, m_z] m'_x + m_z [\mu_x, m'_x] - [\mu_x, m_x] m'_z - m_x [\mu_x, m'_z] \\
&= m_x m'_z m'_x + m_z (m_y m'_y + m_z m'_z) \\
&\quad - (-m_z m'_z - m_y m'_y) m'_z + m_x m_z m'_x \\
&= (m_z + m'_z) (m_x m'_x + m_y m'_y + m_z m'_z) \\
&\quad + (m_x m_z - m_z m_x) m'_x + m_y (m'_y m'_z - m'_z m'_y) \\
&= \mathbf{M}_z \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}'
\end{aligned}$$

comme les deux derniers termes s'évanouissent, avec des relations similaires pour $[\mu_y, \mu_z]$ et $[\mu_z, \mu_x]$.

Par conséquent, le côté droit de (47) devient

$$\begin{aligned}
&(j_2^2 - p^2) \{m^2 m'^2 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}')^2 - h^2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}'\} - h^2 p^2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' + h j_2 (M_x^2 + M_y^2) \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' \\
&= (j_2^2 - p^2) \{m^2 m'^2 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}')^2\} - h^2 j_2^2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' + h j_2 (j_1 j_2 - p^2) \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' \\
&= (j_2^2 - p^2) \{m^2 m'^2 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}')^2 + h j_2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}'\}.
\end{aligned}$$

Maintenant

(48)

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' &= \frac{1}{2} (j_1 j_2 - k_1 k_2 - k'_1 k'_2) \\
&= \frac{1}{2} (j_2^2 - k_1 k_2 - k'_1 k'_2 + h j_2) \\
\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' - h j_2 &= \frac{1}{2} (j_2^2 - k_1 k_2 - k'_1 k'_2 - h j_2) \\
m^2 m'^2 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' - h j_2) \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' &= k_1 k_2 k'_1 k'_2 - \frac{1}{4} \{ (j_2^2 - k_1 k_2 - k'_1 k'_2)^2 - h^2 j_2^2 \} \\
&= \frac{1}{4} \{ j_2^4 - 2 j_2^2 (k_1 k_2 + k'_1 k'_2 + \frac{1}{2} h^2) \\
&\quad + (k_1 k_2 - k'_1 k'_2)^2 \} \\
&= \frac{1}{4} \{ j_2^4 - 2 j_2^2 (k^2 + k'^2) + (k^2 - k'^2)^2 \} \\
&= \frac{1}{4} (k, k', j_2),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la notation

$$\begin{aligned}
(a, b, c) &= -(a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2 c^2 - 2c^2 a^2 - 2a^2 b^2) \\
&= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)
\end{aligned}$$

pour les trois quantités a, b, c qui commutent. Par conséquent, (47) se réduit à

$$(49) \quad j(j-h)(\mu_z + i \square)(\mu_z - i \square) = \frac{1}{4} (j_2^2 - p^2) (k, k', j_2).$$

L'évaluation du produit $(a + ib)(a - ib)$ pour l'équation (39) est plus compliqué, et la méthode sera seulement indiquée. Le produit à évaluer, notamment, $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' + i[k, \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}']) (\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' - i[k, \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}'])$, est composé de la somme des trois termes comme

$$m_x'^2 (x + i[k, x])(x - i[k, x]),$$

et de trois termes comme

$$\{m'_x m'_y (x + i[k, x])(y - i[k, y]) + m'_y m'_x (y + i[k, y])(x - i[k, x])\}.$$

Les valeurs des trois premiers termes sont données directement par l'équation (35), alors que la valeur de la somme des quantités $(x + i[k, x])(y - i[k, y])$ et $(y + i[k, y])(x - i[k, x])$ peut être obtenue en appliquant la transformation linéaire (1) au z et m_z dans (35) en égalisant les coefficients de $l_3 m_3$, des deux côtés. En procédant de cette manière, on obtient finalement

$$(50) \quad k(k-h)(q \cdot m' + i[k, q \cdot m'])(q \cdot m' - i[k, q \cdot m']) = \frac{1}{4} (k_2, k', j) r^2.$$

Grâce à (49) et (50), les équations de transformation (46), (39), (40) peuvent être mises sous la forme (31), et donner

$$(51) \quad \begin{cases} \mu_z + i [j, \mu_z] = \frac{1}{2} j^{-\frac{1}{2}} (j_2^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} (k, k', j_2)^{\frac{1}{2}} e^{i\psi} j^{-\frac{1}{2}} \\ \quad = \frac{1}{2} j^{-\frac{1}{2}} e^{i\psi} (j_1^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} (k, k', j_1)^{\frac{1}{2}} j^{-\frac{1}{2}} \\ \mu_z - i [j, \mu_z] = \frac{1}{2} j^{-\frac{1}{2}} (j_2^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} (k, k', j_1)^{\frac{1}{2}} e^{-i\psi} j^{-\frac{1}{2}} \\ \quad = \frac{1}{2} j^{-\frac{1}{2}} e^{-i\psi} (j_2^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} (k, k', j_2)^{\frac{1}{2}} j^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\text{et (52)} \quad \begin{cases} \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' + i [k, \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}'] = \frac{1}{2} r k^{-\frac{1}{2}} (k_2, k', j)^{\frac{1}{2}} e^{i\theta} k^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} r k^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta} (k_1, k', j)^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' - i [k, \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}'] = \frac{1}{2} r k^{-\frac{1}{2}} (k_1, k', j)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta} k^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} r k^{-\frac{1}{2}} e^{-i\theta} (k_2, k', j)^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

avec les relations correspondantes pour θ' .

7. Systèmes à plus de deux électrons.

L'extension de la transformation aux systèmes à plus de deux électrons peut être faite comme en théorie classique, comme cela a été expliqué au § 1. Les M_x, M_y, M_z , du noyau forment les m'_x, m'_y, m'_z , du système global et les j du noyau forment les k' du système global. Un léger changement doit être effectué dans le ψ du noyau qui devient le θ' du système global, puisque le ψ du noyau doit commuter avec les M_z du noyau ou les m'_z du système global alors que les θ' du système global n'ont pas besoin de le faire, comme m'_z n'est pas une variable d'action, mais doivent plutôt commuter avec les p et les j du système global. Ce changement est effectué en substituant aux μ_z dans l'équation de définition (46) le produit scalaire des (μ_x, μ_y, μ_z) du noyau et les (m_x, m_y, m_z) de l'électron externe, de la même façon qui a été utilisée quand on a changé la définition de θ en passant du cas à un électron à celui à deux électrons en remplaçant $q \cdot m'$ par z dans (29).

Ce changement rend également θ' invariant selon la transformation (1), alors que ça n'était pas le cas de ψ du noyau. Dans la théorie classique, la signification géométrique du changement est que le ψ du noyau est son azimut par rapport à la direction du j du noyau mesuré à partir du plan contenant ce j et l'axe des z , alors que le θ' du système global est la même azimut, mesuré à partir du plan contenant le j du noyau et le j du système global.

Il y a des méthodes alternatives pour traiter le système contenant plus de deux électrons, et on peut ajouter les moments angulaires ensemble selon les différents plans; par exemple, on devrait d'abord ajouter les moments angulaires des deux électrons extérieurs, et alors ajouter cette somme au moment angulaire résultant de ceux restant. La pertinence des différentes méthodes dépend de l'importance relative des termes différents de la perturbation dans l'Hamiltonien. Les variables d'action (excepté p) sont toujours reliées aux grandeurs des moments angulaires par des équations de type (17) et (20), alors que la méthode du § 4 peut toujours être utilisée pour trouver les variables d'angle.

8. Applications. Valeurs limites des variables d'action.

Les applications qui vont être faites maintenant ne sont valides que lorsque l'Hamiltonien est tel que k, k', j, p sont les vraies variables d'action ou s'il en est approximativement ainsi.

Pour obtenir des résultats physiques de la théorie présente, on doit substituer aux variables d'action un ensemble de c-nombres qui peuvent être vus comme représentant un état stationnaire. Les différents c-nombres qu'une variable d'action particulière peut prendre forment une progression arithmétique de différence constante h , qui doit être habituellement bornée, dans une direction au moins, de façon à ce que le système puisse avoir un état normal. Tous les termes dans le développement de Fourier des coordonnées cartésiennes qui correspondent aux transitions d'un état stationnaire dans les limites à un état à l'extérieur des limites doivent s'évanouir. Il peut sembler que ces conditions soient difficiles à satisfaire, et qu'en général, il devrait n'y avoir aucun moyen de choisir une progression arithmétique qui satisfasse ces conditions. En pratique, il semble y avoir une règle générale qui fait que les conditions peuvent être satisfaites d'une façon dont l'exemple à suivre est un exemple type.

Supposons que w est une variable d'angle et que J est la variable d'action conjuguée et que partout où e^{iw} apparaît dans les équations de transformation, il ait immédiatement face à lui le facteur $(J_2 - c)$, où c est un c-nombre, et partout où e^{-iw} intervient, il ait immédiatement après lui le facteur $(J_2 - c)$, ce qui est équivalent au facteur $(J_1 - c)$ immédiatement devant. Alors faisons prendre à J la série de valeurs $c + \frac{1}{2}h, c + \frac{3}{2}h, c + \frac{5}{2}h, \dots$, qui se termine en $(c + \frac{1}{2}h)$. L'amplitude reliée à $(c + \frac{1}{2}h, c - \frac{1}{2}h)$ est donnée en mettant $J = c + \frac{1}{2}h$ dans le coefficient devant e^{iw} ou le coefficient derrière e^{-iw} et ainsi, s'évanouit à cause du facteur $(J_2 - c)$. Les amplitudes reliées à $(c + \frac{1}{2}h, c - \frac{3}{2}h)$ et $(c + \frac{3}{2}h, c - \frac{1}{2}h)$ sont données en mettant $J = c + \frac{1}{2}h$ et $J = c + \frac{3}{2}h$ dans le coefficient devant e^{2iw} , ou le coefficient derrière e^{-2iw} . Maintenant e^{2iw} ne peut arriver qu'à travers

$$\{e^{-iw}(J_2 - c)\}^2 = e^{-2iw}(J - c - \frac{1}{2}h)(J - c - \frac{3}{2}h).$$

de telle façon que son coefficient s'évanouit quand $J = c + \frac{1}{2}h$ ou $c + \frac{3}{2}h$, et similairement e^{-2iw} ne peut intervenir que dans

$$\{(J_2 - c)e^{iw}\}^3 = (J - c - \frac{1}{2}h)(J - c - \frac{3}{2}h)(J - c - \frac{5}{2}h)e^{3iw},$$

De la même façon, e^{3iw} ne peut intervenir qu'à travers

$$\{(J_2 - c)e^{iw}\}^3 = (J - c - \frac{1}{2}h)(J - c - \frac{3}{2}h)(J - c - \frac{5}{2}h)e^{3iw},$$

et son coefficient s'évanouit quand $J = c + \frac{1}{2}h$, ou $c + \frac{3}{2}h$, et etc.

Ainsi toutes les amplitudes dans les développements de Fourier qui sont reliées à une valeur de J plus grande que c et une valeur moindre que c s'évanouissent, ce qui justifie la série que nous avons choisie pour J . Nous pourrions aussi bien avoir pris la série $c - \frac{1}{2}h, c - \frac{3}{2}h, c - \frac{5}{2}h, \dots$. Nous pourrions appeler la valeur $J = c$ la valeur limite de l'une ou l'autre série.

De la même façon, quand il y a plus d'une variable d'action, J et J' disons, si e^{iw} est toujours précédé dans les équations de transformation par un coefficient avec le facteur $f(J_2, J')$, et e^{-iw} est précédé par $f(J_1, J')$ nous pouvons prendre $f(J, J') = 0$ comme valeur limite pour J . Cette équation, pourtant, peut également être considérée comme le fait de fixer une valeur limite pour J' , et il est alors nécessaire que le facteur $f(J, J_2)$ doive toujours être devant $e^{iw'}$ et $f(J, J_1)$ devant e^{-iw} .

Maintenant considérons (32) et (36), les équations de transformation qui font intervenir les variables d'angle pour le système avec un seul électron. On voit que $e^{i\psi}$ est précédé par les facteurs

$(j - p_2)^{\frac{1}{2}}, (j + p_2)^{\frac{1}{2}}$, qui sont les mêmes que $(k - p_2)^{\frac{1}{2}}, (k + p_2)^{\frac{1}{2}}$, et $e^{i\psi}$ par $(k - p_1)^{\frac{1}{2}}, (k + p_1)^{\frac{1}{2}}$, et, de plus, que $e^{i\theta}$ est précédé par $(k_2 - p)^{\frac{1}{2}}, (k_2 + p)^{\frac{1}{2}}$, et $e^{-i\theta}$ par $(k_1 - p)^{\frac{1}{2}}, (k_1 + p)^{\frac{1}{2}}$. Toutes les conditions sont ainsi satisfaites pour $k - p = 0$ et $k + p = 0$ pour être les valeurs limites des variables d'action. Par conséquent, pour k donné, p prend les $2|k|$ valeurs allant de $|k| - \frac{1}{2}h$ à $-|k| + \frac{1}{2}h$. On peut montrer que k prend des valeurs quantiques demi-entières quand le champ central consiste en un champ inverse du carré de la force avec un petit inverse de cube de champ de force superposé (en mécanique non-relativiste), et qu'ainsi il prend les valeurs $\pm\frac{1}{2}h, \pm\frac{3}{2}h, \pm\frac{5}{2}h \dots$, correspondant aux termes $S, P, D \dots$ en spectroscopie. Il y aura ainsi 1, 3, 5... états stationnaires pour les termes $S, P, D \dots$ quand le système a été rendu non dégénéré par un champ magnétique, en accord avec l'observation des spectres de singlets.

Nous avons déjà montré les règles de sélection pour k et p . Il reste à prouver que les transitions de $k = \frac{1}{2}h$ vers $k = -\frac{1}{2}h$ ne peuvent advenir, car elles apparaîtraient expérimentalement comme des transitions $S \rightarrow S$. Quand k est $\pm\frac{1}{2}h$, la seule valeur possible pour p est zéro, de telle façon que nous n'avons qu'à considérer des transitions pour lesquelles p ne change pas. De (36) ou (38), on voit que le coefficient devant $e^{i\theta}$ dans le développement de Fourier de z s'évanouit quand on met $k = \frac{1}{2}h, p = 0$, de telle façon que la transition $k = \frac{1}{2}h$ vers $k = -\frac{1}{2}h$ ne peut avoir lieu.

Pour un système de deux électrons ou plus, on voit dans les équations (32) et (51) que $j \pm p = 0$ sont des valeurs limites pour j et p , et des équations (51), (52) et des équations correspondant à (52) pour θ' , que $k \pm k' \pm j = 0$ sont des valeurs limites pour k, k' et j . Par conséquent, p prend des valeurs de $|j| - \frac{1}{2}h$ à $-|j| + \frac{1}{2}h$, alors que j prend les valeurs, quand k et k' sont positifs, de $k + k' - \frac{1}{2}h$ à $|k - k'| + \frac{1}{2}h$, en accord avec l'expérience. Cette règle s'applique généralement pour l'addition de deux moments quelconques.

La transition $k = \frac{1}{2}h$ vers $k = -\frac{1}{2}h$ est toujours interdite, puisque quand $k = \pm\frac{1}{2}h$, j peut seulement prendre la valeur k' , de telle façon que j ne peut pas changer pendant la transition et de (52), le coefficient devant $e^{i\theta}$ s'évanouit quand on met $k = \frac{1}{2}h, j = k'$, à cause des facteurs $(k_2 + k' - j)^{\frac{1}{2}}$ ou $(k_2 - k' + j)^{\frac{1}{2}}$.

9. Effet anomal de Zeeman.

La présente théorie ne donne aucune explication de ces phénomènes atomiques qui sont regroupés sous le terme de duplicité, notamment, les relations particulières de la relativité et des doublets à l'écran dans le spectre des rayons X, la règle de branchement de la spectroscopie et l'effet anomal de Zeeman. Si, pourtant, on adopte le modèle habituel de l'atome, consistant en une série d'électrons et un noyau dans lequel le rapport entre le moment magnétique et le moment angulaire mécanique est le double de la valeur normale de Lorentz, alors la théorie présente donne la g -formule correcte pour l'énergie des états stationnaires dans un champ magnétique faible sans avoir besoin d'aucune supposition supplémentaire.

L'énergie de l'atome dans un champ magnétique dans la direction de l'axe des z est proportionnelle, dans ce modèle, à

$$m_z + 2m'_z = M_z + m'_z$$

plutôt qu'à M_x , comme dans le modèle normal. Si le champ est faible, nous pouvons utiliser la

théorie de la perturbation, selon laquelle le changement d'énergie des états stationnaires est donné, au premier ordre, par le terme constant dans le développement de Fourier de l'énergie, en fonction des variables uniformisantes pour le système non perturbé. Nous devons alors obtenir le terme constant dans le développement de Fourier de $(M_z + m'_z)$ en fonction des θ, θ', ϕ et ψ . Nous avons, découlant de (45) et (41)

$$\begin{aligned} j [j, \mu_z] &= M_y(M_y m'_z - m'_y M_z) - M_x(m'_x M_z - M_x m'_z) + \frac{1}{2} i h \mu_z \\ &= (M_x^2 + M_y^2 + M_z^2) m'_z - (M_x m'_x + M_y m'_y + M_z m'_z) M_z + \frac{1}{2} i h \mu_z. \end{aligned}$$

Des équations (51), les développements de Fourier de μ_z , et $[j, \mu_z]$ ne contiennent aucun terme constant. Par conséquent, le terme constant dans le développement de m'_z est

$$\frac{M_x m'_x + M_y m'_y + M_z m'_z}{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} M_z = \frac{k'_1 k'_2 + \frac{1}{2} (j_1 j_2 - k_1 k_2 - k'_1 k'_2)}{j_1 j_2} M_z,$$

en utilisant (48), et le terme constant dans le développement de $M_z + m'_z$, est

$$\left(1 + \frac{1}{2} \frac{j_1 j_2 - k_1 k_2 + k'_1 k'_2}{j_1 j_2} \right) M_z.$$

Le coefficient de M_z dans cette expression est la g -valeur, et est en accord avec la formule de Landé⁵.

10. Intensités relatives des lignes d'un multiplet.

L'amplitude de vibration d'un atome correspondant aux transitions de l'état $J_r = n_r h$ à l'état $J_r = (n_r - \alpha_r) h$ est obtenue en mettant $J_r = n_r h$ dans le coefficient devant $\exp.i \sum \alpha_r w_r$, dans le développement de Fourier de la polarisation totale de l'atome, ou en mettant $J_r = (n_r - \alpha_r) h$ dans le coefficient derrière son exponentielle. Nous ne pouvons pas vraiment déterminer les amplitudes à présent parce que nous ne connaissons pas les variables d'action et d'angle correspondant aux r et p_r . Si, pourtant, nous supposons que dans le développement de Fourier de r , les variables p, j, ϕ, ψ n'interviennent pas, alors quand $x/r, y/r, z/r$ sont développés en séries de Fourier en $e^{i\phi}, e^{i\psi}$, les rapports des coefficients donneront les rapports des amplitudes correspondantes. Nous pouvons ainsi déterminer les intensités relatives des lignes d'un multiplet et des composantes dans lesquelles ces lignes sont séparées dans un champ magnétique faible⁶.

Dans le cas d'un système avec un seul électron, les équations (38) donnent en une seule fois les amplitudes relatives des composantes d'un champ magnétique. Dans le cas des électrons de la série du noyau de l'atome, nous devons obtenir les développements de Fourier x, y, z de (32), (51) et (52). Il est pratique d'introduire les quantités

$$\begin{aligned} \lambda_x &= M_y z - y M_z = z M_y - M_z y = M_y z - M_z y - i h x \\ \lambda_y &= M_z x - z M_x = x M_z - M_x z = M_z x - M_x z - i h y \\ \lambda_z &= M_x y - x M_y = y M_x - M_y x = M_x y - M_y x - i h z \end{aligned}$$

5. Landé, Zeits. f. Phys. vol. 15, p. 189 (1923).

6. Les intensités relatives des composantes d'une ligne d'un champ magnétique ont été obtenues par Born, Heisenberg et Jordan (loc. cit.) par leur méthode matricielle.

On a

$$(53) \quad M_x \lambda_x + M_y \lambda_y + M_z \lambda_z = \sum_{xyz} \{(M_x M_y - M_y M_x)z - ihM_z z\} = 0$$

et

$$(54) \quad \begin{cases} [M_z, \lambda_x] = [M_z, M_y z - y M_z] = -M_x z + x M_z = \lambda_y \\ [M_z, \lambda_y] = [M_z, M_z x - z M_x] = M_x y + z M_y = -\lambda_x \end{cases}$$

$$(55) \quad [M_z, \lambda_z] = [M_z, M_x y - x M_y] = M_y y - M_x x - y M_y + x M_x = 0$$

Les relations (53), (64), (63) entre les λ et M correspondent exactement aux relations (4), (5), (6) entre les x, y, z et les m ou les relations (44), (42), (43) entre les μ et M . Nous pouvons donc alors appliquer les résultats déduits de (4), (5), (6) directement aux λ . Nous obtenons ainsi, correspondant à (33) ou (45)

$$(56) \quad j[j, \lambda_z] = M_y \lambda_x - M_x \lambda_y + \frac{1}{2} ih \lambda_z,$$

et nous pouvons également prendre $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ égaux aux ξ, η, ζ de l'équation (34) et nous pouvons alors écrire μ_x, μ_y, μ_z pour x, y, z à la condition de remplacer les m_x, m_y, m_z , par les M_x, M_y, M_z, j . Cela donne

$$(57) \quad \begin{aligned} j(j-h)(\mu_z + i[j, \mu_z])(\lambda_z - i[j, \lambda_z]) \\ (j_2^2 - p^2)(\mu_x \lambda_x + \mu_y \lambda_y + \mu_z \lambda_z) + ihM_z(\mu_x \lambda_y - \mu_y \lambda_x) \\ - ij_2 \{M_x(\mu_y \lambda_z - \mu_z \lambda_y) + M_y(\mu_z \lambda_x - \mu_x \lambda_z)\}. \end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \mu_x \lambda_x + \mu_y \lambda_y + \mu_z \lambda_z &= \sum_{xyz} (m'_z m_y - m'_y m_z)(M_y z - M_z y - ihx) \\ &= \sum_{xyz} \{(m'_z m_y - m'_y m_z)M_y - (m'_x m_z - m'_z m_x)M_x \\ &\quad - ih(m'_y m_x - m'_x m_y)\}z \\ &= \sum_{xyz} \{m'_z(m_x M_x + m_y M_y + m_z M_z) \\ &\quad - (m'_x M_x + m'_y M_y + m'_z M_z)m_z\}z \\ &= \sum_{xyz} \{(m_x M_x + m_y M_y + m_z M_z)m'_z \\ &\quad + m_x(m'_z M_x - M_x m'_z) + m_y(m'_z M_y - M_y m'_z)\}z \\ &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{M} \mathbf{m}' \cdot \mathbf{q} + ih\mu \cdot \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Également

$$\begin{aligned} \mu_x \lambda_y - \mu_y \lambda_x &= \mu_x(xM_z - M_x z) - \mu_y(M_y z - yM_z) \\ &= (\mu_x x + \mu_y y + \mu_z z)M_z - (\mu_x M_x + \mu_y M_y + \mu_z M_z)z \\ &= \mu \cdot \mathbf{q} M_z, \end{aligned}$$

et de façon similaire

$$\begin{aligned} \mu_y \lambda_z - \mu_z \lambda_y &= \mu \cdot q M_x, \\ \mu_z \lambda_x - \mu_x \lambda_z &= \mu \cdot q M_y, \end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned} \mu \cdot q &= \sum_{xyz} (m_y m'_z - m_z m'_y)x = \sum_{wyz} (m_y x - m_x y)m'_z \\ &= k[k, \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}'] - \frac{1}{2} ih \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' \end{aligned}$$

de (83).

En utilisant ces résultats et le fait que M_x, M_y, M_z , commutent avec $\mu \cdot q$ (puisqu'ils commutent avec k et avec $q \cdot m'$), l'équation (57) devient

$$\begin{aligned}
& j(j-h)(\mu_z + i[j, \mu_z])(\lambda_z - i[j, \lambda_z]) \\
&= (j_2^2 - p^2)(\mathbf{m} \cdot \mathbf{M} \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' + ih\mu \cdot \mathbf{q}) + i\{hM_z^2 - j_2(M_x^2 + M_y^2)\}\mu \cdot \mathbf{q} \\
&= (j_2^2 - p^2)(\mathbf{m} \cdot \mathbf{M} \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' + ih\mu \cdot \mathbf{q} - ih_1\mu \cdot \mathbf{q}) \\
&= \frac{1}{2}(j_2^2 - p^2)\{(j_1j_2 + k^2 - k'^2)\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' \\
&\quad - 2ij_2(k[k, \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}'] - \frac{1}{2}ih\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}')\} \\
&= \frac{1}{2}(j_2^2 - p^2)\{(k + k' + j_2)(k - k' + j_2)(\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' - i[k, \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}']) \\
&\quad - (k + k' - j_2)(-k + k' + j_2)(\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' + i[k, \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}'])\}.
\end{aligned}$$

Maintenant en substituant aux $\mu_z + i[j, \mu_z]$, $\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' - i[k, \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}']$ et $\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' + i[k, \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}']$ leur valeur donnée par (51) et (52).

Après l'élimination de certains facteurs et en prenant le $e^{i\psi}$ du côté droit, on obtient

$$(58) \quad \lambda_z - i[j, \lambda_z] = r \frac{(j_1^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} j_1^{\frac{1}{2}}}{j^{\frac{1}{2}}(j+h)^{\frac{1}{2}}} \{F_{+1}e^{-i(\theta+\psi)} - F'_{+1}e^{i(\theta-\phi)}\},$$

où

$$\begin{aligned}
F_{+1} &= \frac{1}{4}(k + k' + j + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}(k - k' + j + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}(k + k' + j + \frac{3}{2}h)^{\frac{1}{2}}(k - k' + j + \frac{3}{2}h)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \div (j + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}(k+h)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F'_{+1} &= \frac{1}{4}(k + k' - j - \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}(-k + k' + j + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}(k + k' - j - \frac{3}{2}h)^{\frac{1}{2}}(-k + k' + j + \frac{3}{2}h)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \div (j + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}(k-h)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

De façon similaire, on peut montrer que

$$(59) \quad \lambda_z + i[j, \lambda_z] = r \frac{(j_2^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} j_2^{\frac{1}{2}}}{j^{\frac{1}{2}}(j+h)^{\frac{1}{2}}} \{F'_{-1}e^{i(\theta+\psi)} - F_{-1}e^{-i(\theta-\psi)}\}$$

où F'_{-1}, F_{-1} sont les quantités obtenues en écrivant $-h$ pour h dans F_{+1}, F'_{+1} , respectivement.

Également de (52)

$$(60) \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' = r(j_1j_2/j)^{\frac{1}{2}}(F_0e^{-i\theta} + F'_0e^{i\theta})$$

où

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{4}j^{\frac{1}{2}}(k + k' + j + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}(k + k' - j + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}(k - k' + j + \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}}(-k + k' + j - \frac{1}{2}h)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \div j_1^{\frac{1}{2}}j_2^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}(k+h)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

et F'_0 est la quantité obtenue en écrivant $-h$ pour h dans F_0 .

De (56)

$$\begin{aligned}
j[j, \lambda_z] &= M_y(M_yz - yM_z) - M_x(xM_z - M_xz) + \frac{1}{2}ih\lambda_z \\
&= (M_x^2 + M_y^2 + M_z^2)z - (M_xx + M_yy + M_zz)M_z + \frac{1}{2}ih\lambda_z.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$j_1 j_2 z = \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' p - \frac{1}{2} i h \lambda_z + j [j, \lambda_z].$$

ou

$$(61) \quad z = \frac{p}{j_1 j_2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' + \frac{1}{2} i \frac{1}{j_1} (\lambda_z - i [j, \lambda_z]) - \frac{1}{2} i \frac{1}{j_2} (\lambda_z + i [j, \lambda_z]).$$

On a également

$$\begin{aligned} (x + iy)(M_x - iM_y) &= xM_x + yM_y + i(yM_x - xM_y) \\ &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' - pz + i(\lambda_z - ihz) \\ &= \frac{j_1 j_2 - p(p - h)}{j_1 j_2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' + \frac{1}{2} i \frac{j_1 - (p - h)}{j_1} (\lambda_z - i [j, \lambda_z]) \\ &\quad + \frac{1}{2} i \frac{j_2 + (p - h)}{j_2} (\lambda_z + i [j, \lambda_z]) \end{aligned}$$

en utilisant (61). Maintenant, prenons le facteur $(M_x - iM_y)$ du côté droit et substituons sa valeur à $(M_x - iM_y)^{-1}$ dans les équations (32), notamment, $(j^2 - p^2)^{-\frac{1}{2}} e^{i\phi}$. Le résultat après réarrangement des facteurs est

$$(62) \quad x + iy = \left\{ \frac{(j^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}}{j^2 - \frac{1}{4} h^2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}' + \frac{1}{2} i \frac{(j - p + \frac{3}{2} h)^{\frac{1}{2}}}{j_1 (j + p + \frac{1}{2} h)^{\frac{1}{2}}} (\lambda_z - i [j, \lambda_z]) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} i \frac{(j + p - \frac{3}{2} h)^{\frac{1}{2}}}{j_2 (j - p - \frac{1}{2} h)^{\frac{1}{2}}} (\lambda_z + i [j, \lambda_z]) \right\} e^{i\phi}.$$

Pour obtenir les développements de Fourier de $x/r, y/r, z/r$, il est maintenant seulement nécessaire de substituer aux facteurs $\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}'$, $\lambda_z - i [j, \lambda_z]$, et $\lambda_z + i [j, \lambda_z]$ dans (61) et (62), leur valeur donnée par (60), (58) et (59). Les rapports des amplitudes obtenus de cette manière sont maintenant en parfait accord avec ceux obtenus précédemment par Kronig et al.⁷ au moyen de certaines suppositions spécifiques, et en accord parfait avec l'expérience. Les F_{+1}, F_{-1}, F_0 du présent article sont proportionnels aux racines carrées des $F_{+1}, F_{-1}, \frac{1}{2} F_0$ de Kronig.

Mes remerciements vont à M. R. H. Fowler, F.R.S., pour ses critiques et aide dans l'écriture de cet article.

Résumé.

La nouvelle mécanique quantique dans laquelle intervient l'algèbre non-commutative est appliquée au problème d'un certain nombre d'électrons se déplaçant dans un champ de force approximativement central, une transformation de contact étant obtenue pour un ensemble de variables qui incluent les k pour chaque électron et les j du système global. On trouve que k n'est pas égal à m , la valeur du moment angulaire de l'électron, comme dans la théorie classique, mais doit être reliée à m par la formule $m^2 = (k + \frac{1}{2} h)(k - \frac{1}{2} h)$, et une relation similaire est respectée entre j et le moment angulaire résultant du système global.

On montre que la théorie donne les valeurs limites correctes pour les j du résultant de deux

7. Kronig, Zeits. f. Phys., vol. 31, p. 885 (1925); Sommerfeld et Hönl, Sitz. d. Preuss. Akademie, p. 141 (1925); Russell, Proc. Nat. Academy Sciences, U.S.A., vol. 11, p. 314 (1925).

moments angulaires dont les k sont donnés, et donne également la g -formule correcte pour les niveaux d'énergie d'un atome dans un champ magnétique faible sous la supposition de l'anomalie magnétique usuelle du noyau de l'atome. La théorie fournit également les résultats de Kronig pour les intensités relatives des lignes d'un multiplet et leurs composants dans un champ magnétique faible.

Sur la théorie de la mécanique quantique

P. A. M. Dirac

1. Introduction et résumé.

La nouvelle mécanique de l'atome introduite par Heisenberg^[1] peut être basée sur la supposition que les variables qui décrivent un système dynamique n'obéissent pas à la loi commutative de la multiplication, mais vérifient à la place certaines conditions quantiques. On peut établir une théorie en ne sachant rien des variables dynamiques si ce n'est les lois algébriques auxquelles elles sont soumises, et on peut montrer qu'elles peuvent être représentées par des matrices à chaque fois qu'un ensemble de variables uniformisantes existe pour le système dynamique.^[2] On peut montrer pourtant (voir § 3), qu'il n'y a pas d'ensemble de variables uniformisantes pour un système contenant plus d'un électron, de telle façon que la théorie ne peut pas progresser beaucoup en suivant ce genre de voie.

Un nouveau développement de la théorie a été donné récemment par Schrödinger.^[3] En partant de l'idée qu'un système atomique ne peut pas être représenté par une trajectoire, i.e., par un point bougeant dans l'espace des coordonnées, mais doit être représenté par une onde dans l'espace, Schrödinger obtient d'un principe de variation une équation différentielle que la fonction d'onde doit satisfaire. Cette équation différentielle s'avère être très liée à l'équation de l'Hamiltonien qui spécifie le système, notamment, si

$$H(q_r, p_r) - W = 0$$

est l'équation de l'Hamiltonien du système, quand les q_r , p_r sont les variables canoniques, alors l'équation d'onde pour ψ est

$$(1) \quad \left\{ H \left(q_r, ih \frac{\partial}{\partial q_r} \right) - W \right\} \psi = 0$$

où h est $(2\pi)^{-1}$ fois la constante de Planck habituelle. Chaque moment p_r dans H est remplacé par l'opérateur $ih\partial/\partial q_r$, et est supposé opérer sur tout ce qui apparaît sur son côté droit dans le terme dans lequel il apparaît. Schrödinger prend la valeur du paramètre W pour laquelle il existe un ψ satisfaisant (1) qui est continue, à valeur unique et bornée sur la totalité du q -espace pour représenter les niveaux d'énergie du système, et montre que quand la solution générale de (1) est connue, les matrices représentant les p_r et les q_r peuvent facilement être obtenues, respectant toutes les conditions qu'elles doivent satisfaire selon la mécanique des matrices d'Heisenberg, et consistantes avec les niveaux d'énergie précédemment trouvés. L'équivalence mathématique des théories est ainsi établie.

Dans le présent article, la théorie de Schrödinger est considérée dans le § 2 d'un point de vue légèrement plus général, dans lequel le temps t et son moment conjugué $-W$ sont traités depuis le début sur le même pied que les autres variables. Une méthode plus générale, nécessitant seulement

P. A. M. Dirac, Lycée St. John, Cambridge. (Communiqué par R. H. Fowler, F.R.S., Reçu le 26 Août 1926.)
traduction Denise Vella-Chemla, janvier 2021.

1. Voir plusieurs articles de Born, Heisenberg et Jordan, Zeits. f. Phys., à partir du vol. 33.
2. Roy. Soc. Proc., A, vol. 110, p. 561 (1926).
3. Voir les articles variés dans les Ann. d. Phys., en commençant par le vol. 79, p. 361 (1926).

de l'algèbre symbolique élémentaire, d'obtenir des représentations matricielles des variables dynamiques est fournie.

Au § 3, on considère le problème d'un système contenant plusieurs particules semblables, tel qu'un atome avec plusieurs électrons. Si les positions de deux des électrons sont interchangées, le nouvel état de l'atome est physiquement indistinguable de l'état original. Dans un tel cas, on s'attendrait à ne pouvoir représenter par des matrices que les fonctions symétriques des coordonnées de tous les électrons. On trouve que cela permet d'obtenir deux solutions du problème satisfaisant toutes les conditions nécessaires, et la théorie est incapable de décider laquelle des deux est correcte. Une des solutions amène au principe de Pauli selon lequel pas plus d'un électron ne peut être sur une orbite donnée, et l'autre, quand elle est appliquée au problème analogue du gaz parfait, amène à la mécanique statistique d'Einstein-Bose.

L'effet d'une perturbation arbitraire d'un système atomique est étudié au § 5 à l'aide d'une nouvelle supposition. La théorie est appliquée à l'absorption et à l'émission stimulée de radiation par un atome. Une généralisation de la description du phénomène par les coefficients B d'Einstein est obtenue, dans laquelle les phases jouent leur propre rôle. La méthode ne peut pas être appliquée à l'émission spontanée.

2. Théorie générale.

Selon le nouveau point de vue introduit par Schrödinger, nous ne laissons plus non spécifiée la nature des variables dynamiques qui décrivent un système atomique, mais nous comptons les q et les t comme des variables mathématiques ordinaires (ceci étant permis par le fait qu'elles permutent l'une avec l'autre) et nous appelons p et W les opérateurs différentiels

$$(2) \quad p_r = -ih \frac{\partial}{\partial q_r}, \quad -W = -ih \frac{\partial}{\partial t}.$$

À chaque fois qu'un p_r ou W intervient dans un terme d'équation, il doit être considéré comme représentant l'opérateur différentiel correspondant agissant sur tout ce qu'il y a à sa droite dans le terme en question. Ainsi, en effectuant cela, on peut réduire n'importe quelle fonction de p , q , W et t à une fonction des q et t seulement.

Les relations (2) nécessitent que soient effectuées deux modifications évidentes dans l'algèbre gouvernant les variables dynamiques. D'abord, seules les fonctions rationnelles entières des p et W ont un sens, et ensuite, on peut multiplier une équation par un facteur (intégral selon les p et W) du côté gauche, mais on ne peut pas, en général, multiplier par un facteur du côté droit. Ainsi, si on donne l'équation $a = b$, on peut inférer d'elle que $Xa = Xb$, où X est quelconque, mais on ne peut pas en déduire que $aX = bX$.

Il y a, pourtant, certaines équations $a = b$ pour lesquelles il est vrai que $aX = bX$ pour tout X , et nous appelons ces équations des identités. Les conditions quantiques

$$q_r p_s - p_s q_r = ih \delta_{rs}, \quad p_r p_s - p_s p_r = 0,$$

avec les relations similaires dans lesquelles interviennent $-W$ et t , sont des identités, comme il peut facilement être vérifié (et cela a été vérifié par Schrödinger) que les relations

$$(q_r p_s - p_s q_r)X = ih\delta_{rs}X,$$

etc., sont vérifiées pour tout X . Ces relations constituent la principale justification des hypothèses (2).

Si $a = b$ est une identité, nous pouvons déduire, puisque $aX = bX$ et $Xa = Xb$, que

$$aX - Xa = bX - Xb,$$

ou

$$[a, X] = [b, X].$$

Par conséquent, nous pouvons égaler le crochet de Poisson de n'importe quel côté d'une identité avec une quantité arbitraire, et ainsi notre identité quantique est l'analogie d'une identité de la théorie classique. Nous supposons que l'équation générale $xy - yx = ih[x, y]$ et que les équations du mouvement d'un système dynamique sont des identités.

Un système dynamique est spécifié par une équation hamiltonienne entre les variables

$$(3) \quad H(q_r, p_r, t) - W = 0,$$

ou plus généralement

$$(4) \quad F(q_r, p_r, t, W) = 0,$$

et les équations du mouvement sont

$$dx/ds = [x, F],$$

où x est n'importe quelle fonction des variables dynamiques, et s est une variable qui dépend de la forme dans laquelle (4) est écrite, et en particulier, vaut juste t si (4) est écrite sous la forme (3). Dans la nouvelle théorie, on considère l'équation

$$(4) \quad F\psi = 0,$$

qui, si l'on choisit ψ comme étant une fonction des variables q et t seulement, est une équation différentielle ordinaire pour ψ . De la solution générale de l'équation différentielle, les matrices qui constituent la solution du problème mécanique peuvent être trouvées très facilement.

Puisque (5) est linéaire en ψ , sa solution générale est de la forme

$$(6) \quad \psi = \sum c_n \psi_n,$$

où les c_n sont des constantes arbitraires et les ψ_n constituent un ensemble de solutions indépendantes, qu'on peut appeler fonctions propres. Seules les solutions qui sont continues, à valeur unique, et bornées sur la totalité du domaine des q et t sont reconnues par la théorie. Plutôt qu'un ensemble discret de fonctions propres ψ_n , on peut avoir un ensemble continu $\psi(\alpha)$, dépendant d'un paramètre α , et vérifiant l'équation différentielle pour toutes les valeurs de α dans un certain domaine, auquel cas, la somme dans (6) doit être remplacée par une intégrale $\int c_\alpha \psi(\alpha) d\alpha$ ⁴, ou à la fois un ensemble discret et un ensemble continu peuvent advenir ensemble. Pour la définition, pourtant, nous écrivons seulement la somme discrète explicitement dans le travail ci-dessous.

4. La solution générale peut contenir des quantités, comme ψ_α et $\partial\psi_\alpha/\partial\alpha$, qui vérifient l'équation différentielle (5), mais qui ne peuvent strictement être mises sous la forme $\int c_\alpha \psi_\alpha d\alpha$, bien qu'on puisse les voir comme les limites de séries de quantités qui sont de cette forme.

Nous allons maintenant montrer que toute constante d'intégration du système dynamique (soit la première intégrale soit la seconde intégrale) peut être représentée par une matrice dont les éléments sont des constantes, une colonne et une ligne de la matrice correspondant à chaque fonction propre ψ_n . Soit a une constante d'intégration d'un tel système, i.e., une fonction des variables dynamiques telle que $[a, F] = 0$ identiquement. On a la relation

$$Fa = aF,$$

que nous pouvons multiplier par ψ_n du côté droit, puisque c'est une identité. Nous obtenons ainsi

$$Fa\psi_n = aF\psi_n = 0,$$

puisque $F\psi_n = 0$ (bien que non identiquement). Par conséquent $a\psi_n$ est une solution de l'équation différentielle (5), de telle façon qu'elle peut être développée sous la forme (6), i.e.,

$$a\psi_n = \sum_m \psi_m a_{mn},$$

où les a_{mn} sont des constantes. Nous prenons comme quantités a_{mn} les éléments de la matrice qui représente a . La règle de multiplication matricielle est vérifiée puisque, si b est une autre constante d'intégration du système, on a

$$ab\psi_n = a \sum_m \psi_m b_{mn} = \sum_{mk} \psi_k a_{km} b_{mn},$$

et également

$$ab\psi_n = \sum_k \psi_k (ab)_{kn},$$

de telle façon que

$$(ab)_{kn} = \sum_m a_{km} b_{mn}.$$

Comme exemple de constante d'intégration du système dynamique, on peut prendre la valeur $x(t_0)$ qu'une fonction arbitraire x des p , q , W et t prend à un instant donné $t = t_0$. La matrice qui représente $x(t_0)$ consistera en éléments dont chacun est une fonction de t_0 . En écrivant t pour t_0 , nous voyons qu'une fonction arbitraire des variables dynamiques $x(t)$, ou simplement x , peut être représentée par une matrice dont les éléments sont des fonctions de t seulement.

La représentation matricielle que nous avons obtenue n'est pas unique, puisque tout ensemble de fonctions propres indépendantes ψ_n convient. Pour obtenir les matrices de la mécanique quantique originale de Heisenberg, nous devons choisir les ψ_n d'une façon particulière. Nous pouvons toujours, par une transformation linéaire, obtenir un ensemble de ψ_n qui rend diagonale la matrice représentant toute constante d'intégration du système dynamique donnée. Supposons maintenant que l'Hamiltonien F ne contienne pas explicitement le temps, de telle façon que W est une constante du système, et est l'énergie, et choisissons ψ_n de façon à rendre diagonale la matrice représentant W , i.e., de telle façon à rendre

$$(7) \quad W\psi_n = W_n\psi_n,$$

où W_n est une constante numérique. Dénotons par x n'importe quelle fonction des variables dynamiques *dans lesquelles le temps n'intervient pas explicitement*, et posons

$$x\psi_n = \sum_m x_{mn}\psi_m,$$

où les x_{mn} sont des fonctions du temps uniquement. Nous allons montrer maintenant que les x_{mn} ne sont pas de la forme

$$(8) \quad x_{mn} = a_{mn} e^{i(W_m - W_n)t/h},$$

où les a_{mn} sont des constantes, comme dans la théorie d'Heisenberg. On a

$$(9) \quad \begin{aligned} Wx\psi_n &= \sum_m Wx_{mn}\psi_m \\ &= \sum_m (Wx_{mn} - x_{mn}W)\psi_m + \sum_m x_{mn}W\psi_m \\ &= \sum_m ih\dot{x}_{mn}\psi_m + \sum_m x_{mn}W_m\psi_m. \end{aligned}$$

Également, puisque x ne contient pas t explicitement,

$$(10) \quad \begin{aligned} Wx\psi_n &= xW\psi_n = xW_n\psi_n = W_nx\psi_n \\ &= W_n \sum_m x_{mn}\psi_m. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients de ψ_m dans (9) et (10), on obtient

$$ih\dot{x}_{mn} = x_{mn}(W_n - W_m),$$

ce qui montre que x_{mn} est de la forme (8).

Nous avons ainsi montré que si les ψ_n sont choisis de cette manière, les matrices satisfont toutes les conditions de la mécanique matricielle de Heisenberg, exceptée la condition que les matrices qui représentent les quantités doivent être hermitiennes (i.e., doivent avoir leurs mn et nm qui sont des quantités imaginaires conjuguées). Il ne semble pas y avoir une preuve générale que c'est effectivement le cas, car la preuve devrait utiliser le fait que les ψ_n sont bornés. Il est facile de démontrer le cas particulier dans lequel la matrice représentant W est hermitienne, i.e., lorsque les W_n sont réels, puisque de (7), les ψ_n doivent être de la forme

$$\psi_n = u_n e^{-iW_n t/h},$$

où u_n est indépendant de t , et si W_n contient une partie imaginaire, ψ_n ne devrait pas rester borné lorsque t devient infini. En général, les matrices représentant des quantités réelles devraient être hermitiennes seulement si les constantes numériques arbitraires par lesquelles les ψ_n peuvent être multipliés sont choisies d'une façon particulière.

On peut voir une fonction propre ψ_n comme étant associée à des valeurs numériques définies pour certaines constantes d'intégration du système. Ainsi, si nous trouvons des constantes d'intégration a, b, \dots telles que

$$(11) \quad a\psi_n = a_n\psi_n, \quad b\psi_n = b_n\psi_n, \dots$$

où a_n, b_n, \dots sont des constantes numériques, nous pouvons dire que les ψ_n représentent un état du système dans lequel a, b, \dots prennent les valeurs numériques a_n, b_n, \dots (Noter que a, b, \dots doivent commuter pour que (11) soit possible.). De cette manière, nous pouvons avoir des fonctions propres représentant des états stationnaires d'un système atomique avec des valeurs définies pour l'énergie, le moment angulaire, et d'autres constantes d'intégration.

On devrait noter que le choix du temps t qui apparaît comme variable dans les éléments des matrices représentant des quantités variables est assez arbitraire, et que toute fonction de t et des q qui croît devrait le faire régulièrement. Pour déterminer précisément la radiation émise par le système dans la direction de l'axe des x , on devrait utiliser $(t - x/c)$ plutôt que t ⁵. Il est probable que la représentation d'une constante d'intégration du système par une matrice d'éléments constants est

5. Roy. Soc. Proc., A, vol. 111, p. 405 (1926).

plus fondamentale que la représentation d'une quantité variable par une matrice dont les éléments sont des fonctions d'une variable telle que t ou $(t-x/c)$. Il semblerait qu'il soit possible de construire une théorie électromagnétique dans laquelle les potentiels du champ en un point donné x_0, y_0, z_0, t_0 dans l'espace-temps sont représentés par des matrices d'éléments constants qui sont des fonctions de x_0, y_0, z_0, t_0 .

3. Systèmes contenant plusieurs particules similaires

Dans la mécanique matricielle d'Heisenberg, on suppose que les éléments des matrices qui représentent les variables dynamiques déterminent les fréquences et les intensités des composants de la radiation émise. La théorie permet par conséquent de calculer juste les quantités qui sont importantes d'un point de vue physique, et ne donne pas d'information à propos des quantités comme les fréquences orbitales que l'on ne pourra jamais espérer mesurer expérimentalement. Nous devrions nous attendre à ce que cette caractéristique très satisfaisante perdue dans les développements ultérieurs de la théorie.

Considérons maintenant un système qui contient deux particules similaires ou davantage, disons, pour prendre un exemple précis, un atome avec deux électrons. Dénотons par (mn) cet état de l'atome dans lequel un électron est sur une orbite étiquetée par m , et l'autre sur une orbite étiquetée par n .

La question se pose de savoir si les deux états (mn) et (nm) , qui sont physiquement indistingables puisqu'ils diffèrent seulement par l'échange des deux électrons doivent être comptés comme deux états différents ou comme un seul état, i.e., donnent-ils naissance à deux colonnes et lignes dans les matrices ou seulement à une? Si la première alternative est correcte, alors la théorie devrait permettre de calculer les intensités dues aux deux transitions $(mn) \rightarrow (m'n')$ et $(mn) \rightarrow (n'm')$ séparément, puisque l'amplitude correspondant à chacun d'elles devrait être donnée par un élément défini dans la matrice représentant la polarisation totale. Les deux transitions sont, pourtant, physiquement indistingables, et seule la somme des intensités pour les deux ensemble devrait pouvoir être déterminée expérimentalement. Par conséquent, pour garder cette caractéristique essentielle de la théorie qui devrait permettre le calcul seulement pour des quantités observables, on doit adopter la seconde alternative qui est que (mn) et (nm) ne comptent que pour un état seulement.

Cette alternative, pourtant, amène également des difficultés. La symétrie entre les deux électrons nécessite que l'amplitude associée à la transition $(mn) \rightarrow (m'n')$ de x_1 une coordonnée de l'un des électrons, devrait égaler l'amplitude associée à la transition $(nm) \rightarrow (n'm')$ de x_2 , la coordonnée correspondante de l'autre électron, i.e.,

$$(12) \quad x_1(mn ; m'n') = x_2(nm ; n'm').$$

Si nous comptons maintenant (mn) et (nm) comme définissant tous deux les mêmes colonne et ligne des matrices, et similairement pour $(m'n')$ et $(n'm')$, l'équation (12) montre que chaque élément de la matrice x_1 égale l'élément correspondant de la matrice x_2 , de telle sorte que nous devrions avoir l'équation matricielle

$$x_1 = x_2.$$

Cette relation est évidemment impossible, puisque, entre autres choses, elle est inconsistante avec

les conditions quantiques. Nous devons inférer que les fonctions assymétriques des coordonnées (et des moments) des deux électrons ne peuvent être représentées par des matrices. Les fonctions symétriques, telles que la polarisation totale de l'atome, peuvent être considérées comme étant représentées par des matrices sans inconsistance, et ces matrices sont par elles-mêmes suffisantes pour déterminer toutes les propriétés physiques du système.

Une conséquence de ces considérations est que la théorie d'uniformisation des variables introduite par l'auteur ne peut plus s'appliquer. Cela est dû au fait que, correspondant à toute transition $(mn) \rightarrow (m'n')$, il devrait y avoir un terme $e^{i(aw)}$ dans les développements de Fourier, et nous devrions obliger à ce qu'il n'y ait là qu'un seul état, $(m''n'')$, disons, tel que le même terme $e^{i(aW)}$ correspond à la transition $(m'n') \rightarrow (m'',n'')$ et $e^{2i(aW)}$ correspond à $(mn) \rightarrow (m''n'')$. Si les m et les n sont des nombres quantiques, et que nous prenons le cas d'un nombre quantique par électron pour garantir la définition, nous devrions avoir

$$m'' - m' = m' - m, \quad n'' - n' = n' - n.$$

Puisque, pourtant, l'état $(m'n')$ pourrait aussi bien être appelé l'état $(n'm')$, on pourrait aussi bien prendre

$$m'' - n' = n' - m, \quad n'' - m' = m' - n,$$

qui donnerait un état différent $(m''n'')$. Il n'y a donc pas d'état unique $(m''n'')$ que la théorie des variables uniformisantes nécessite.

Si nous négligeons l'interaction entre deux électrons, alors nous pouvons obtenir les fonctions propres de l'atome tout entier simplement en multipliant les fonctions propres pour un électron quand il existe tout seul dans l'atome par les fonctions propres de l'autre électron tout seul, et en prenant la même variable de temps pour chacun⁶. Par conséquent, si $\psi_n(x, y, z, t)$ est la fonction propre pour un seul électron sur l'orbite n , alors la fonction propre pour l'atome entier dans l'état (mn) est

$$\psi_m(x_1, y_1, z_1, t)\psi_n(x_2, y_2, z_2, t) = \psi_m(1)\psi_n(2),$$

disons, où x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 sont les coordonnées des deux électrons et $\psi(r)$ signifie $\psi(x_r, y_r, z_r, t)$. La fonction propre $\psi_m(2)\psi_n(1)$, pourtant, correspond aussi au même état de l'atome si nous comptons les états (mn) et (nm) comme identiques. Mais deux fonctions propres indépendantes doivent donner naissance à deux lignes et colonnes dans les matrices. Si nous devons avoir seulement une ligne et une colonne dans les matrices correspondant à la fois à (mn) et (nm) , nous devons trouver un ensemble de fonctions propres de la forme

$$\psi_{mn} = a_{mn}\psi_m(1)\psi_n(2) + b_{mn}\psi_m(2)\psi_n(1),$$

où les a_{mn} et les b_{mn} sont constants, dont l'ensemble doit contenir seulement une ψ_{mn} correspondant à la fois à (mn) et (nm) , et doit être suffisant pour permettre d'obtenir la matrice représentant la fonction symétrique A des deux électrons. Cela signifie que ψ_{mn} doit être choisi de telle façon que A compte le nombre de fois où chaque ψ_{mn} peut être développé en fonction des ψ_{mn} choisis dans la forme

$$(13) \quad A\psi_{mn} = \sum_{m'n'} \psi_{m'n'} A_{m'n'.mn},$$

6. La même variable temps t doit être prise pour chacun des deux en raison du fait que nous pouvons écrire l'équation de l'Hamiltonien pour le système complet : $H(1) + H(2) - W = 0$, où $H(1)$ et $H(2)$ sont les Hamiltoniens pour les deux électrons séparément, de telle façon qu'il y a un temps commun conjugué à moins l'énergie W .

dans laquelle les $A_{m'n'.mn}$ sont des constantes ou des fonctions du temps seulement.

Il y a deux manières de choisir l'ensemble des ψ_{mn} pour satisfaire les conditions. Nous pouvons soit prendre $a_{mn} = b_{mn}$, ce qui fait de chaque ψ_{mn} une fonction symétrique des deux électrons, de telle façon que le côté gauche de l'égalité (13) sera symétrique et que seules les fonctions propres symétriques seront nécessaires pour le développement, ou bien nous pouvons prendre $a_{mn} = -b_{mn}$, ce qui rend ψ_{mn} anti-symétrique, de telle façon que le côté gauche de (13) sera anti-symétrique et que seules les fonctions anti-symétriques seront requises pour son développement. Par conséquent, les fonctions propres symétriques seules donnent une solution complète du problème. La théorie à présent est incapable de décider quelle solution est la solution correcte. Nous sommes capables d'obtenir des solutions du problème qui utilisent des fonctions propres en nombre moindre que le nombre total possible de fonctions propres, au détriment d'être capable de représenter seulement les fonctions symétriques des deux électrons par des matrices.

Ces résultats peuvent évidemment être développés pour n'importe quel nombre d'électrons. Pour r électrons n'interagissant pas, de coordonnées $x_1, y_1, z_1, \dots, x_r, y_r, z_r$, les fonctions propres symétriques sont

$$(14) \quad \sum_{a_1, \dots, a_r} \psi_{n_1}(\alpha_1) \psi_{n_2}(\alpha_2) \dots \psi_{n_r}(\alpha_r),$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ est n'importe quelle permutation des entiers $1, 2, \dots, r$, alors que celles qui sont anti-symétriques peuvent être écrites sous la forme du déterminant suivant

$$(15) \quad \begin{vmatrix} \psi_{n_1}(1), & \psi_{n_1}(2), & \dots & \psi_{n_1}(r) \\ \psi_{n_2}(1), & \psi_{n_2}(2), & \dots & \psi_{n_2}(r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n_r}(1), & \psi_{n_r}(2), & \dots & \psi_{n_r}(r) \end{vmatrix}$$

S'il y a interaction entre les électrons, il y aura à nouveau des fonctions propres symétriques et anti-symétriques, bien qu'elles ne puissent plus être mises dans ces formes simples. Dans tous les cas, les symétriques seules ou les anti-symétriques seules donnent une solution complète du problème.

Une fonction propre anti-symétrique s'évanouit identiquement quand deux des électrons sont sur la même orbite. Cela signifie que dans la solution du problème avec des fonctions propres anti-symétriques, il peut ne pas y avoir d'état stationnaire avec deux électrons ou plus sur la même orbite, ce qui est juste le principe d'exclusion de Pauli.⁷ La solution avec des fonctions propres symétriques, d'un autre côté, permet à n'importe quel nombre d'électrons d'être sur la même orbite, de telle façon que cette solution ne peut être une solution correcte pour le problème des électrons dans un atome⁸.

4. Théorie du gaz parfait.

Les résultats de la section précédente s'appliquent à n'importe quel système contenant différentes particules semblables, en particulier à un assemblage de molécules de gaz. Il y aura deux solutions du problème, dans l'une desquelles les fonctions propres sont des fonctions symétriques des coor-

7. Pauli, Zeits. f. Phys., vol. 31, p. 765 (1925).

8. Prof. Born m'a informé du fait que Heisenberg a obtenu indépendamment des résultats équivalents à ceux-ci (Ajouté à la preuve) - voir Heisenberg, 6 Zeit. fur Phys., vol. 38, p. 411 (1926).

données de toutes les molécules, et dans l'autre, ce sont des fonctions anti-symétriques.

L'équation d'onde pour une molécule simple de masse au repos m se déplaçant librement dans l'espace est

$$\{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - W^2/c^2 + m^2c^2\}\psi = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{m^2c^2}{h^2} \right\} \psi = 0,$$

et sa solution est de la forme

$$(16) \quad \psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \exp.i(\alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3z - Et)/h,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et E sont des constantes vérifiant

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - E^2/c^2 + m^2c^2 = 0.$$

Les fonctions propres (16) représentent un atome ayant des composantes de moment $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et l'énergie E .

Nous devons maintenant obtenir une restriction sur les fonctions propres possibles due à la présence des murs limites. On suppose habituellement que la fonction propre ou la fonction d'onde associée à une molécule, s'évanouit sur la frontière, mais on devrait s'attendre à être capable de déduire cela, si c'est vrai, de la théorie générale. Nous supposons comme une généralisation naturelle des méthodes de la section précédente qu'il doit y avoir seulement des fonctions propres juste suffisantes pour que l'on puisse représenter par une matrice toute fonction des coordonnées qui a un sens physique. Supposons pour la définition que chaque molécule soit confinée entre deux limites en $x = 0$ et $x = 2\pi$. Alors seules les fonctions de x qui sont définies seulement pour $0 < x < 2\pi$ ont un sens physique et doivent pouvoir être représentées par des matrices (cela nécessitera moins de fonctions propres que si toute fonction de x devait pouvoir être représentée par une matrice.). Ces fonctions $f(x)$ peuvent toujours être développées en séries de Fourier de la forme

$$(17) \quad f(x) = \sum_n a_n e^{inx},$$

où les a_n sont des constantes et les n sont des entiers. Si nous choisissons dans ces fonctions propres (16) celles pour lesquelles α_1/h est un entier, alors $f(x)$ compte le nombre de fois où une fonction propre donnée peut être développée en une série parmi les fonctions propres dont les coefficients sont des fonctions de t seulement, et par conséquent $f(x)$ peut être représenté par une matrice. Par conséquent ces fonctions propres choisies sont suffisantes, et peuvent facilement être vues comme étant juste suffisantes, pour la représentation matricielle de toute fonction de x de la forme (17). Au lieu de choisir ces fonctions propres avec des valeurs entières pour α_1/h , nous pourrions aussi bien prendre celles avec α_1/h égal à un demi entier impair ou plus généralement, avec $\alpha_1/h = n + \varepsilon$, où n est un entier et ε est n'importe quel nombre réel. La théorie est incapable de décider quels sont les choix corrects. Pour les problèmes statistiques, pourtant, ils mènent tous aux mêmes résultats.

Quand y et z sont aussi bornés par $0 < y < 2\pi, 0 < z < 2\pi$, on trouve comme nombre d'ondes associé aux molécules dont les énergies sont comprises entre E et $E + dE$ la valeur

$$\frac{4\pi}{c^3 h^3} (E^2 - m^2c^4)^{\frac{1}{2}} E dE.$$

Cette valeur est en accord avec la supposition habituelle que la fonction d'onde s'évanouit sur la

frontière. Elle se réduit, quand on néglige la mécanique relativiste, à l'expression familière

$$(18) \quad \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{\frac{1}{2}} E_1^{\frac{1}{2}} dE_1,$$

où $E_1 = E - mc^2$ est l'énergie cinétique. Pour un volume arbitraire de gaz V , l'expression doit être multipliée par $V/(2\pi)^3$.

Pour passer aux fonctions propres pour l'assemblage de molécules, entre lesquelles on suppose qu'il n'y a pas d'interaction, nous multiplions les fonctions propres pour les molécules séparées, et alors nous prenons soit les fonctions propres symétriques, de la forme (14), soit les anti-symétriques, de la forme (15). Nous devons maintenant faire la nouvelle supposition que tous les états stationnaires de l'assemblage (chacun représenté par une fonction propre) ont la même probabilité a priori. Si maintenant nous adoptons la solution du problème dans lequel interviennent des fonctions propres symétriques, nous pouvons trouver que toutes les valeurs pour le nombre de molécules associées à n'importe quelle onde ont la même probabilité a priori, ce qui donne juste la mécanique statistique d'Einstein-Bose⁹. D'un autre côté, nous pourrions obtenir une mécanique statistique différente, si nous adoptions la solution avec les fonctions propres anti-symétriques, de même que nous pourrions alors avoir soit 0 soit 1 molécule associée à chaque onde. La solution avec les fonctions d'ondes symétriques doit être la solution correcte lorsqu'on l'applique à des quanta de lumière, puisque il est connu que la mécanique statistique d'Einstein-Bose mène à la loi de Planck de la radiation du corps noir. La solution avec les fonctions propres anti-symétriques, pourtant, est probablement celle qui est correcte pour des molécules de gaz, puisqu'on sait qu'elle est correcte pour les électrons dans un atome, et que l'on s'attendrait à ce que les molécules ressemblent à des électrons davantage qu'à des quanta de lumière.

Nous allons maintenant traiter, selon les principes bien connus, l'équation d'état du gaz en supposant que la solution avec les fonctions d'ondes anti-symétriques est celle qui est correcte, de telle façon que pas plus d'une molécule ne peut être associée à chaque onde. Divisons les ondes en un certain nombre d'ensembles de façon à ce que les ondes dans chaque ensemble soient associées avec des molécules ayant sensiblement la même énergie. Dénotons par A_s le nombre d'ondes dans le s -ième ensemble, et par E_s l'énergie cinétique d'une molécule associée à l'un d'entre eux. Alors la probabilité qu'une distribution (ou que le nombre de fonctions propres antisymétriques correspondant aux distributions) dans laquelle N_s molécules sont associées avec des ondes dans le s -ième ensemble est

$$W = \prod_s \frac{A_s!}{N_s!(A_s - N_s)!},$$

ce qui donne pour l'entropie

$$S = k \log W = k \sum_s \{A_s(\log A_s - 1) - N_s(\log N_s - 1) - A_s - N_s\} [\log(A_s - N_s) - 1].$$

Cela doit être maximum, de telle façon que

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= k \sum_s \{-\log N_s + \log(A_s - N_s)\} \delta N_s \\ &= k \sum_s \log(A_s/N_s - 1) \cdot \delta N_s, \end{aligned}$$

pour toutes les variations δN_s qui laissent le nombre total de molécules $N = \sum_s N_s$ et l'énergie

9. Bose, Zeits. f. Phys., vol. 26, p. 178 (1924); Einstein, Sitzungsber. d. Preuss. Ak., p. 261 (1924) et p. 3 (1925).

totale $E = \sum_s E_s N_s$ inchangés, de telle façon que

$$\sum_s \delta N_s = 0, \quad \sum_s E_s \delta N_s = 0.$$

Nous obtenons donc

$$\log(A_s/N_s - 1) = \alpha + \beta E_s,$$

où α et β sont des constantes, ce qui donne

$$(19) \quad N_s = \frac{A_s}{e^{\alpha + \beta E_s}} + 1.$$

En faisant varier l'énergie totale E et en mettant $\delta E/\delta S = T$, la température, nous trouvons facilement que $\beta = 1/kT$, de telle façon que (19) devient

$$N_s = \frac{A_s}{e^{\alpha + E_s/kT} + 1}.$$

Cette formule donne la distribution en énergie des molécules. Dans la théorie d'Einstein-Bose, la formule correspondante est

$$N_s = \frac{A_s}{e^{\alpha + E_s/kT} - 1}.$$

Si le s -ième ensemble d'ondes contient les ondes associées aux molécules dont les énergies sont comprises entre E_s et $E_s + dE_s$, nous obtenons de (18) [où E_s signifie maintenant E_1 de l'équation (18)],

$$A_s = 2(2m)^{\frac{1}{2}} E_s^{\frac{1}{2}} dE_s / (2\pi h)^3,$$

où V est le volume du gaz. Cela donne

$$N = \sum N_s = \frac{2\pi V (2m)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi h)^3} \int_0^\infty \frac{E_s^{\frac{1}{2}} dE_s}{e^{\alpha + E_s/kT} + 1}$$

et

$$E = \sum E_s N_s = \frac{2\pi V (2m)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi h)^3} \int_0^\infty \frac{E_s^{\frac{3}{2}} dE_s}{e^{\alpha + E_s/kT} + 1}.$$

En éliminant α de ces deux équations et en utilisant la formule $PV = \xi E$, où P est la pression, ce qui est vérifié pour n'importe quelle mécanique statistique, l'équation d'état peut être obtenue.

Le phénomène de saturation de la théorie d'Einstein-Bose n'advient pas dans la théorie présente. On peut montrer que la chaleur spécifique tend facilement vers 0 lorsque $T \rightarrow 0$, plutôt que de d'abord croître jusqu'à ce que le point de saturation soit atteint et ensuite décroître, comme dans la théorie d'Einstein-Bose.

5. Théorie des perturbations arbitraires.

Dans cette section, nous considérerons le problème d'un système atomique sujet à une perturbation de l'extérieur (e.g., un champ électromagnétique incident) qui peut varier avec le temps d'une manière arbitraire. Soit l'équation d'onde du système non perturbé

$$(20) \quad (H - W)\psi = 0$$

dans laquelle H est une fonction des p et des q seulement. Sa solution générale est de la forme

$$(21) \quad \psi = \sum_n c_n \psi_n,$$

où les c_n sont des constantes. Nous supposons que les ψ_n doivent être choisis de telle façon que l'un d'entre eux est associé à chaque état stationnaire de l'atome, et doit être multiplié par les constantes propres pour que les matrices qui représentent des quantités réelles soient hermitiennes.

Maintenant supposons qu'une perturbation est appliquée, débutant au temps $t = 0$. L'équation d'onde pour le système perturbé sera de la forme

$$(22) \quad (H - W + A)\psi = 0,$$

où A est une fonction des p , des q et de t et est réelle. On montrera qu'on peut obtenir une solution de cette équation de la forme

$$(23) \quad \psi = \sum_n a_n \psi_n,$$

où les a_n sont des fonctions de t seulement, qui peut prendre des valeurs arbitraires c_n à l'instant $t = 0$. Nous considérerons que la solution générale (21) de l'équation (20) représente un assemblage d'atomes perturbés dans lequel $|c_n|^2$ est le nombre d'atomes dans le n -ième état, et nous assumerons que (23) représente de la même manière un assemblage des atomes perturbés, $|a_n(t)|^2$ étant le nombre de ceux dans le n -ième état à n'importe quel instant t . On prend $|a_n|^2$ au lieu de n'importe quelle autre fonction de a_n parce que, comme cela sera montré ultérieurement, cela permet au nombre total d'atomes de rester constant.

La condition que ψ , défini par l'équation (23), doit satisfaire l'équation (22) est

$$(24) \quad \begin{aligned} 0 &= \sum_n (H - W + A)a_n \psi_n \\ &= \sum_n a_n (H - W + A)\psi_n - i\hbar \sum_n \dot{a}_n \psi_n, \end{aligned}$$

puisque H et A commutent avec a_n ¹⁰ alors que $W a_n = a_n W = i\hbar \dot{a}_n$ identiquement. Supposons que $A\psi_n$ soit développé sous la forme

$$A\psi_n = \sum_m A_{mn} \psi_m,$$

où les coefficients A_{mn} sont des fonctions de t seulement, et satisfont $A_{mn}^* = A_{nm}$, où l'* dénote l'imaginaire conjugué. L'équation (24) devient maintenant, puisque $(H - W)\psi_n = 0$.

En sortant le coefficient de ψ_m , on trouve

$$(25) \quad i\hbar \dot{a}_m = \sum_n a_n A_{mn},$$

qui est une simple équation différentielle montrant comment les a_m varient avec le temps.

En prenant les imaginaires conjugués, on trouve

$$-i\hbar \dot{a}_m^* = \sum_n a_n^* A_{mn}^* = \sum_n a_n^* A_{nm}.$$

Par conséquent, si $N_m = a_m a_m^*$ est le nombre d'atomes dans le m -ième état, nous avons

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{N}_m &= i\hbar (\dot{a}_m a_m^* + \dot{a}_m^* a_m) \\ &= \sum_n (\dot{a}_n A_{mn} a_m^* - a_n A_{nm} \dot{a}_m). \end{aligned}$$

10. L'assertion a commute avec b signifie $ab = ba$ identiquement.

Cela donne

$$ih \sum_m N_m = \sum_{nm} (a_m^* A_{mn} a_n - a_n^* A_{nm} a_m) = 0,$$

comme il le faut.

Si la perturbation consiste en une radiation électromagnétique incidente se déplaçant dans la direction de l'axe des x et polarisée selon un plan avec le vecteur électrique dans la direction de l'axe des y , le terme de perturbation A dans l'Hamiltonien est, en négligeant la mécanique relativiste, $\kappa/c \cdot \dot{\eta} \square$, où η est la polarisation totale dans la direction de l'axe des y et O, κ, O, O sont les composants du potentiel de la radiation incidente. On peut développer $\eta\psi_n$ et $\dot{\eta}\psi_n$ sous la forme

$$\begin{aligned} \eta\psi_n &= \sum_m \eta_{mn} e^{i(W_m - W_n)t/h\psi_m}, \\ \dot{\eta}\psi_n &= \sum_m \dot{\eta}_{mn} e^{i(W_m - W_n)t/h\psi_m}, \end{aligned}$$

où les η_{mn} et les $\dot{\eta}_{mn}$ sont constants, et $\dot{\eta}_{mn} = i(W_m - W_n)/h \cdot \eta_{mn}$. Notre A_{mn} précédent est maintenant $\kappa/c \cdot e^{i(W_m - W_n)t/h}$, et l'équation (25) devient

$$(26) \quad ihc \dot{a}_m = \sum_n a_n \kappa \dot{\eta}_{mn} e^{i(W_m - W_n)t/h}.$$

Nous pouvons intégrer cette équation du premier ordre en κ en remplaçant les a_n du côté droit par leurs valeurs c_n à l'instant $t = 0$. Cela donne

$$(27) \quad a_m = c_m + 1/ihc \cdot \sum_n c_n \dot{\eta}_{mn} \int_0^t \kappa(s) e^{i(W_m - W_n)s/h} ds.$$

Pour obtenir une seconde approximation, nous écrivons pour les a_n du côté droit de (26) leurs valeurs fournies par (27). Nous trouvons alors pour les valeurs des a_m à l'instant T ,

$$(28) \quad a_m = c_m + 1/ihc \cdot \sum_n c_n \dot{\eta}_{mn} \int_0^T \kappa(t) e^{i(W_m - W_n)t/h} dt$$

disons, où c'_m et c''_m dénotent les termes du premier et second ordre respectivement.

Cela donne pour le nombre d'atomes dans l'état m à l'instant T

$$N_m = a_m a_m^* = c_m c_m^* + c'_m c_m^* + c_m c_m'^* + c'_m c_m'^* + c'_m c_m'^* + c''_m c_m^* + c_m c_m''^*.$$

Si nous souhaitons obtenir des effets qui sont indépendants des phases initiales des atomes, nous devons substituer $c_m \exp.i\gamma m$ pour c_m et calculer la moyenne sur toutes les valeurs des y_m de 0 à 2π . Cela fait s'évanouir les termes du premier ordre en N_m , notamment, $c'_m c_m^*$, et $c_m c_m'^*$, alors que les termes du second ordre donnent

$$\begin{aligned} &1/h^2 c^2 \cdot \sum_n c_n c_n^* \dot{\eta}_{mn} \dot{\eta}_{mn}^* \int_0^T \kappa(t) e^{i(W_m - W_n)t/h} dt \cdot \int_0^T \kappa(t) e^{-i(W_m - W_n)t/h} dt \\ &- 1/h^2 c^2 \cdot \sum_n c_m c_m^* \dot{\eta}_{nm} \dot{\eta}_{mn}^* \int_0^T \kappa(t) e^{i(W_m - W_n)t/h} dt \cdot \int_0^T \kappa(t) e^{-i(W_n - W_m)s/h} ds \\ &- 1/h^2 c^2 \cdot \sum_n c_m c_m^* \dot{\eta}_{nm} \dot{\eta}_{mn}^* \int_0^T \kappa(t) e^{i(W_m - W_n)t/h} dt \cdot \int_0^T \kappa(t) e^{-i(W_m - W_n)s/h} ds \end{aligned}$$

11. Nous avons négligé un terme dans lequel intervient κ^2 . Cette approximation est légitime, même si nous évaluerons ultérieurement le nombre de transitions qui adviennent à l'instant T comme étant de l'ordre de κ^2 , sous la condition que T est grand comparativement aux périodes de l'atome.

qui se réduit à

$$(29) \quad 1/h^2 c^2 \cdot \sum_n \{|c_n|^2 - |c_m|^2\} |\dot{\eta}_{nm}^2| \left| \int_0^T \kappa(t) e^{i(W_m - W_n)t/h} dt \right|^2.$$

Cela donne ΔN_m , l'accroissement du nombre d'atomes dans l'état m de l'instant $t = 0$ à l'instant $t = T$. Le terme dans la sommation qui a le suffixe n doit être vu comme dû aux transitions entre l'état m et l'état n .

Si l'on résoud la radiation de l'instant $t = 0$ à l'instant $t = T$ en ses composantes harmoniques, on trouve pour l'intensité de la fréquence ν par unité de fréquence du domaine la valeur

$$I_\nu = 2\pi\nu^2 c^{-1} \left| \int_0^T \kappa(t) e^{2\pi i \nu t} dt \right|^2.$$

Par conséquent, le terme dans l'expression (29) pour ΔN_m dû aux transitions entre l'état m et l'état n peut s'écrire

$$1/2^2 \nu^2 c \cdot \{|c_n|^2 - |c_m|^2\} |I_\nu,$$

où

$$2\pi\nu = (W_m - W_n)/h,$$

ou

$$2\pi/h^2 c \cdot \{|c_n|^2 - |c_m|^2\} |\nu_{nm}^2 I_\nu.$$

Si l'on effectue la moyenne selon toutes les directions et états de polarisation de la radiation incidente, cela devient

$$2/3 h^2 c \cdot \{|c_n|^2 - |c_m|^2\} |P_{nm}^2 I_\nu,$$

où

$$|P_{nm}|^2 = |\xi_{nm}|^2 + |\eta_{nm}|^2 + |\zeta_{nm}|^2,$$

ξ , η et ζ étant les trois composants de la polarisation totale. Par conséquent, on peut dire que la radiation a causé $2\pi/3 h^2 c \cdot |c_n|^2 |P_{nm}|^2 I_\nu$, transitions de l'état n à l'état m , et $2\pi/3 h^2 c \cdot |c_m|^2 |P_{nm}|^2 I_\nu$, transitions de l'état m à l'état n , le coefficient de probabilité pour chacun des processus étant

$$B_{n \rightarrow m} = B_{m \rightarrow n} = 2\pi/3 h^2 c \cdot |P_{nm}|^2$$

en accord avec la théorie d'Einstein.

La présente théorie prend par conséquent en compte l'absorption et l'émission stimulée de radiation et elle montre que les éléments des matrices représentant la polarisation totale déterminent les probabilités de transition. On ne peut prendre en compte l'émission spontanée sans une théorie plus élaborée faisant intervenir les positions des différents atomes et l'interférence de leurs émissions individuelles, car les effets dépendront du fait que les atomes sont distribués au hasard, ou bien arrangés dans un réseau cristallin, ou tous confinés dans un volume de petite taille comparée à la longueur d'onde. La dernière alternative mentionnée, qui n'est d'aucun intérêt pratique, semble être théoriquement la plus simple.

Il faut observer que nous avons obtenu les résultats simples d'Einstein seulement parce que nous avons calculé la moyenne sur toutes les phases initiales des atomes. L'argument suivant montre, pourtant, que les phases initiales sont d'une importance physique réelle, et qu'en conséquence,

les coefficients d'Einstein ne sont pas adéquats pour décrire le phénomène excepté dans des cas particuliers. Si initialement tous les atomes sont dans l'état normal, alors on voit facilement que l'expression (29) pour ΔN_m est respectée sans le processus de calcul de la moyenne, de telle façon que dans ce cas, les coefficients d'Einstein sont adéquats. Si maintenant nous considérons le cas où les atomes sont initialement dans un état excité, nous pouvons supposer qu'ils ont été amenés à cet état par une radiation incidente sur les atomes avant l'instant $t = 0$. L'effet de la radiation incidente suivante doit alors dépendre des relations de phase entre elle et la radiation incidente précédente, puisqu'une manière correcte de traiter le problème serait de résoudre les deux radiations incidentes dans une seule intégrale de Fourier. Si nous ne souhaitons pas que la radiation qui a eu lieu la première apparaisse explicitement dans le calcul, nous devons supposer qu'elle imprime certaines phases à l'atome qu'elle excite, et que ces phases sont importantes pour déterminer l'effet de la radiation suivante. Il ne devrait donc pas être permis de calculer la moyenne de ces phases, mais on devrait travailler directement à partir de l'équation (28).



SUR L'ARTICLE DE RIEMANN,
 “SUR LE NOMBRE DE NOMBRES PREMIERS
 INFÉRIEURS À UNE GRANDEUR DONNÉE”

W. DITTRICH

Institut de physique théorique

Université de Tübingen

Auf der Morgenstelle 14

D-72076 Tübingen

Allemagne

Résumé : Cet article est dédié à l'un des trois membres du triumvirat de Göttingen, Gauß, Dirichlet et Riemann. C'est au dernier que je souhaiterais rendre honneur, et particulièrement à son article de 1859, qu'il présenta en personne à l'Académie de Berlin lors de son élection comme membre correspondant. Son article intitulé “Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe” (“Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée”) a révolutionné les mathématiques mondiales. Dans le présent article, on mène une analyse détaillée de l'article de Riemann, incluant des concepts nouveaux comme le prolongement analytique dans le plan complexe ; la formule du produit pour les fonctions entières ; et, en dernier lieu mais non des moindres, une étude détaillée des zéros et de celle qu'on appelle la fonction zeta de Riemann et de sa relation proche à la détermination du nombre de nombres premiers jusqu'à une certaine grandeur, i.e. une formule explicite pour la fonction de décompte des nombres premiers.

Courte biographie de Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Bernhard Riemann est né à Breselenz près de Dannenberg en Basse-Saxe en 1826. Comme son père, il était d'abord supposé devenir pasteur, mais déjà au lycée, le talent extraordinaire de Riemann en mathématiques attira l'attention du Principal. On dit que Riemann lut le livre de Legendre de théorie des nombres de 859 pages qui lui avait été prêté par le Principal en une semaine. Il commença à étudier les mathématiques à Göttingen, où il assista aux cours de Gauß, bien qu'ils soient fermés aux étudiants de premier semestre. Riemann fut alors transféré à Berlin auprès de Jacobi et Dirichlet qui tous deux le soutinrent et l'encouragèrent ; il retourna alors à Göttingen. Sa thèse doctorale portait sur la théorie des fonctions. Pour avoir le droit d'enseigner comme professeur privé à Göttingen,

Référence : <https://arxiv.org/pdf/1609.02301.pdf>.

Traduction : Denise Vella-Chemla, août 2023.

les candidats devaient proposer trois sujets pour leur exposé d'habilitation, et normalement le chef du département choisissait le premier sujet de la liste. Le troisième sujet de Riemann était "Les bases de la géométrie", et quand il lut cela, Gauß, en tant que chef du département, choisit ce sujet pour l'exposé d'habilitation de Riemann. Très surpris, Riemann mit toutes ses recherches sur le sujet "Électricité, magnétisme, lumière et gravitation" de côté et deux mois avant sa leçon test, il créa les fondements de la géométrie différentielle. Gauß était content ! En 1855 Gauß mourut et Dirichlet lui succéda. Quand Dirichlet mourut quatre ans plus tard, Riemann prit en charge la chaire de mathématiques à l'Université de Göttingen. En 1862, il épousa Elise Koch, avec qui il eut une fille. Riemann attrapa la tuberculose et il chercha à améliorer sa santé dans le climat plus doux du Tessin, où il mourut au jeune âge de seulement 39 ans au Lac Majeur.

En plus de fonder la géométrie différentielle, Riemann fit d'autres contributions majeures ; son travail dans la théorie des fonctions a été particulièrement important ; son article "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe" (Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée), communiqué dans le Monatsberichte der Berliner Akademie, en novembre 1859, avec des découvertes sur la fonction zeta ; ses travaux sur la théorie de l'intégration, la transformée de Fourier, l'équation différentielle hyper-géométrique, et les équations différentielles hyperboliques et les problèmes de stabilité des solutions des équations différentielles partielles en physique mathématique. Riemann était influencé par les recherches en géométrie algébrique et topologie de ses collègues mathématiciens italiens Betti et Beltrami. La théorie de la relativité générale d'Einstein aurait été impensable sans la géométrie riemanienne.

Tous ces sujets ont occupé les mathématiciens et les physiciens théoristes pendant de nombreuses années et continueront de le faire pour de longues années encore. Aujourd'hui, exactement 150 ans après la mort de Riemann, le problème non résolu le plus grand en mathématiques pures est ce qu'on appelle l'hypothèse de Riemann, une conjecture énoncée par Riemann en 1859 dans son article sur le nombre de nombres premiers inférieurs à un certain entier positif donné x .

Les mathématiciens réalisèrent plus tard que l'hypothèse de Riemann gouverne la distribution des nombres premiers à un degré extraordinaire, ce pourquoi sa preuve est si avidement recherchée. Puisque tous les efforts de quelques-uns des meilleurs mathématiciens ont échoué jusque là, peut-être faudrait-il un autre Riemann.

Ceci est également vrai pour de nombreux modèles en théorie quantique des champs des particules élémentaires, où les résultats de Riemann sont de la plus haute importance pour

gérer les infinis à l'aide de sa régularisation de la fonction zeta. En mécanique quantique non relativiste, on a besoin de l'hamiltonien riemanien qui devient diagonalisé dans la base des nombres premiers. Le processus de mesure, i.e. l'opérateur agissant sur un objet qui nous fournira un ensemble de valeurs propres qui soit l'ensemble des nombres premiers est encore à trouver. On peut se demander quelle sorte de structure de symétrie se cache derrière un tel système physique.

N'oublions pas que le peu d'articles que Riemann a publié tout au long de sa vie traitent de problèmes physiques. De plus, du temps de Gauß, Dirichlet et Riemann, la distinction entre les disciplines mathématique et physique n'existait pas. En particulier, Riemann abordait les problèmes mathématiques et physiques non pas comme un analyste mais il les éclairait plutôt globalement d'un point de vue géométrique et topologique, ceci signifiant qu'il rendit de nombreux résultats de l'analyse plus compréhensibles en utilisant les nouvelles méthodes de la théorie des fonctions et du prolongement analytique au plan complexe dans sa totalité, simplifiant ainsi de nombreux problèmes de l'analyse réelle.

1 Vers la formule du produit d'Euler et l'extension de Riemann de la fonction zeta

Il y a une connexion très forte entre les sommes des inverses des entiers élevés à une puissance variable qu'Euler écrivit en 1737, et qu'on appelle maintenant la fonction zeta,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots, \quad s > 1 \quad (1)$$

et les nombres premiers - qui, comme entiers, sont la véritable signature de la discontinuité. Euler considérait s comme une variable vraiment entière avec $s > 1$ pour assurer la convergence de la somme. En multipliant la définition de $\zeta(s)$ par $1/2^s$, on obtient

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \dots \quad (2)$$

et en soustrayant cela de $\zeta(s)$, on obtient

$$\begin{aligned} \zeta(s) - \frac{1}{2^s} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\ \text{ou} \quad \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) &= 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Par conséquent tous les multiples du nombre premier $n = 2$ disparaissent de la somme originale de la définition de $\zeta(s)$. En bref, on trouve

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ \Lambda n \neq 2k}}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (4)$$

Ensuite, on multiplie ce dernier résultat par $1/3^s$ pour obtenir

$$\frac{1}{3^s} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ \Lambda n \neq 2k}}^{\infty} \frac{1}{(3n)^s} = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \dots \quad (5)$$

et ainsi, en soustrayant cela de $(1 - 1/2^s)\zeta(s)$, on a

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \zeta(s) &= 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \dots \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ \Lambda n \neq 2k \\ \Lambda n \neq 3k}}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \end{aligned} \quad (6)$$

Maintenant, on multiplie ce résultat par $1/5^s$ et etc. Comme on répète ce processus encore et encore, multipliant notre dernier résultat par $1/p^s$, où p dénote les nombres premiers successifs, on soustrait tous les multiples des nombres premiers. Par conséquent, puisque tous les entiers sont composés des nombres premiers (théorème fondamental d'Euclide de la théorie des nombres), on a enlevé tous les nombres du côté droit de la somme définissant $\zeta(s)$ - excepté pour le nombre 1. Ainsi notre résultat final est le produit

$$\left\{ \prod_{p \text{ premier}} (1 - p^{-s}) \right\} \zeta(s) = 1 \quad (7)$$

ou

$$\boxed{\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.} \quad (8)$$

L'assertion exacte d'Euler est : "Si ex serie numerorum primorum sequens formetur expressio $\prod_p \frac{p^s}{p^s - 1}$ erit eius valor aequalis summae huius seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$."

Maintenant on va étendre la fonction zeta d'Euler dans le plan complexe C , ce qui est une découverte majeure de Riemann. Donc à partir de maintenant, s est une valeur complexe et on écrit

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \quad \text{mais avec } \Re(s) > 1. \quad (9)$$

Ceci est une série infinie absolument convergente, qui est également vérifiée par le produit de tous les nombres premiers dans

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \left(\frac{1}{1 - 2^{-s}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - 3^{-s}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - 5^{-s}} \right) \cdots \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) \cdots \quad (10)$$

$\zeta(s)$ n'a pas de zéros dans la région $\Re(s) > 1$, puisqu'aucun de ses facteurs n'a de zéros. Pourtant, avec l'extension de Riemann de zeta à tout le plan complexe, on sera capable de localiser les zéros aussi bien que les pôles. Pour montrer cela, on doit prolonger analytiquement la fonction zeta originale d'Euler à tout le plan complexe s . Un premier résultat dans cette direction sera obtenu à l'aide des séries qu'on dit de Dirichlet qui adviennent quand on calcule

$$\begin{aligned} (1 - 2^{1-s})\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - 2^{1-s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-s} \\ &= 1 - \frac{2}{2^s} + \frac{1}{2^s} - \frac{2}{4^s} + \cdots = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} =: \eta(s), \quad \text{série de Dirichlet.} \end{aligned} \quad (11)$$

Cette série est convergente pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 0$. Donc on peut définir

$$\boxed{\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \quad \text{pour } \Re(s) > 0 \text{ et } 1 - 2^{1-s} \neq 0.} \quad (12)$$

Quand on écrit

$$\begin{aligned} \eta(s) + \frac{2}{2^s} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} + \frac{2}{2^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s} + \frac{2}{(2n)^s} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s), \end{aligned} \quad (13)$$

on peut rassembler les résultats obtenus jusque-là en la suite d'égalités

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}} = \frac{1}{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{(n+1)^s} - \frac{n-s}{n^s} \right). \quad (14)$$

Plus important, on peut prolonger $\zeta(s)$ dans le domaine de la bande critique $0 < \Re(s) < 1$. Bien sûr, les zéros dans le dénominateur de la représentation donnée ci-dessus doivent être exclus, i.e. de

$$1 - 2^{1-s} = 0 \quad (15)$$

découle

$$1 = e^{(1-s)\log 2} \quad (16)$$

signifiant que

$$2\pi in = (1-s)\log 2 \quad (17)$$

ou

$$s = 1 - \frac{2\pi in}{\log 2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

Ayant montré que la fonction zeta peut être prolongée analytiquement dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 0, s \neq 1\}$, on doit encore démontrer que $\zeta(s)$ a un pôle en $s = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1)}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1)}{1-2^{1-s}} \log 2 \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{-\log 2 \cdot 2^{1-s} \cdot (-1)} \log 2 = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{2^{1-s}} = 1, \end{aligned} \quad (19)$$

où on utilise le théorème d'Abel $\lim_{x \rightarrow 1^-} \log(x+1) = \log 2$ et la continuité de $\log(x+1)$. Combien d'arguments environ de la fonction zeta sont égaux ou inférieurs à zéro ? Plus tard on montrera que la fonction zeta satisfait l'équation fonctionnelle

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s). \quad (20)$$

Cela définit $\zeta(s)$ dans la totalité du plan complexe s . Notons que le côté gauche passe par-dessus en changeant juste $s \rightarrow 1-s$ dans $\zeta(1-s)$, donc on peut calculer $\zeta(1-s)$, étant donné $\zeta(s)$, par exemple $\zeta(-15)$ en fonction de $\zeta(16)$.

Si s est un entier négatif pair, alors $\zeta(s) = 0$ parce que le facteur $\sin(\pi s/2)$ s'évanouit. Ce sont les zéros triviaux de la fonction zeta. Ainsi, tous les zéros non triviaux sont dans la bande critique de partie réelle comprise entre 0 et 1.

Voici une première curiosité qui nécessite davantage d'interprétation. Si on substitue dans l'équation fonctionnelle $s = -1$, on obtient

$$\zeta(-1) = 2^{-1} \pi^{-2} (-1) \Gamma(2) \zeta(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi^2} (-1) \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}, \quad (21)$$

ce qui signifie que $\zeta(-1) = -1/12$.

Cette valeur de $\zeta(-1)$ régularisée n'a absolument rien à voir avec la représentation dans l'espace réel de $\zeta(-1)$ par la série divergente $\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = 1+2+3+4+\dots$, qui nous

dit que la même fonction peut avoir différentes interprétations. Quelques mathématiciens très savants entretiennent l'opinion que la régularisation de la fonction zeta a balayé les laides divergences vers l'infini et a produit une "noisette dorée" de séries qui sont tout le contraire de non-convergentes. En théorie quantique, on observe le même phénomène, où la régularisation de la fonction zeta fait disparaître les infinis (effet Casimir, électrodynamique quantique, chromodynamique quantique et production de particules à proximité des trous noirs). Nous reviendrons sur ce point vers la fin de cet article.

2 Fonction de comptage des puissances de nombres premiers

Sur le chemin pour montrer la significativité des zéros de zeta pour compter les nombres premiers, Riemann a introduit une importante fonction pondérée de comptage des nombres premiers $f(x)$. On l'appellera $\Pi(x)$ alors que d'autres utilisent $J(x)$. Puisque cette fonction est de la plus haute importance, on commencera par l'introduire au moyen d'exemples.

D'abord, la définition de $\Pi(x)$ est donnée ainsi

$$\Pi(x) = \sum_{\substack{p^n < x \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{n}, \quad (22)$$

i.e. pour toute puissance de premier p^n qui est plus petite que x , on somme ses fractions ; par exemple,

$$\begin{aligned} \Pi(20) = & \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{1} \right) \\ & \underbrace{2^1, 2^2, 2^3, 2^4 < 20}_{2^1, 2^2, 2^3, 2^4 < 20} \quad \underbrace{3^1, 3^2 < 20}_{3^1, 3^2 < 20} \quad \underbrace{5^1 < 20}_{5^1 < 20} \quad \underbrace{7^1 < 20}_{7^1 < 20} \quad \underbrace{11^1 < 20}_{11^1 < 20} \quad \underbrace{13^1 < 20}_{13^1 < 20} \\ & + \left(\frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{1} \right) \\ & \underbrace{17^1 < 20}_{17^1 < 20} \quad \underbrace{19^1 < 20}_{19^1 < 20} \end{aligned} \quad (23)$$

Les crochets peuvent aussi être réorganisés ainsi :

$$\begin{aligned} \Pi(20) = & \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

La première paire de crochets compte le nombre de nombres premiers inférieurs à $x = 20$; la seconde paire compte les nombres premiers qui sont plus petits que la racine carrée de x , etc. Par conséquent, en notant $\Pi(x)$ le nombre de nombres premiers jusqu'à x , on obtient la formule de Riemann,

$$\Pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi(x^{1/n}), \quad (25)$$

qui contient un nombre fini de termes, ce qui devient évident en regardant l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{4}\pi(\sqrt[4]{x}) + \dots \\ x = 100 : \\ \sqrt{x} &= 10, \sqrt[3]{x} = 4.6415, \sqrt[4]{x} = 3.1622, \sqrt[5]{x} = 2.51188, \\ \sqrt[6]{x} &= 2.15\dots, \sqrt[7]{x} = 1.930\dots < 2. \end{aligned} \quad (26)$$

Si l'argument de Π est inférieur à 2, alors $\Pi(x) = 0$. Donc notre résultat pour $\Pi(100)$ est donné par

$$\begin{aligned} \Pi(100) &= \pi(100) + \frac{1}{2}\pi(10) + \frac{1}{3}\pi(4.6415) + \frac{1}{4}\pi(3.1622) \\ &+ \frac{1}{5}\pi(2.5118) + \frac{1}{6}\pi(2.15) + 0 + 0 + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

En comptant les nombres premiers, on obtient

$$\begin{aligned} \Pi(100) &= 25 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 \\ &= 28 \frac{8}{15} = 28.533. \end{aligned} \quad (28)$$

Donc, pour n'importe quel argument $x > 1$, la valeur $\Pi(x)$ peut être calculée par une somme finie. Jusque là, on a appris que $\Pi(x)$ compte les nombres premiers. Évidemment, $\Pi(x)$ est une fonction en escalier qui commence en $\Pi(0) = 0$ et augmente pour certains entiers positifs, i.e. le saut est de 1 pour les premiers, 1/2 pour les carrés de premiers, 1/3 pour les cubes de premiers. Donc nos équations définissant $\Pi(x)$ peuvent aussi s'écrire comme

$$\Pi(x) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Theta(x - p^n), \quad (29)$$

où $\Theta(x)$ est la fonction en escalier de Heaviside donnée par $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ \frac{1}{2} & , x = 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} .$

Il y a encore une autre fonction de la théorie analytique des nombres dont on a besoin. On l'appelle la fonction de Möbius, elle définit l'inverse de la fonction zeta :

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \frac{1}{7^s} + \dots \quad (30)$$

En utilisant la représentation originale

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{7^s}\right) \dots, \quad (31)$$

on peut calculer la multiplication des différents facteurs et terminer ainsi à nouveau avec

$$1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{10^s} - \dots, \quad (32)$$

qui identifie les valeurs suivantes de μ :

$$\begin{aligned} \mu(1) &= 1, \mu(2) = -1, \mu(3) = -1, \mu(4) = 0, \mu(5) = -1, \\ \mu(6) &= 1, \mu(7) = -1, \mu(8) = 0, \mu(9) = 0, \mu(10) = 1, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (33)$$

Voici la règle :

$$\mu(n) = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ contient un nombre impair de nombres premiers} \\ 1 & \text{si } n \text{ contient un nombre pair de nombres premiers} \\ 0 & \text{si } n \text{ contient comme facteur un nombre premier au carré} \end{cases} \quad (34)$$

Par exemple:

$$\begin{aligned} \mu(7) &= -1; & 7 & \text{ est un nombre premier} \\ \mu(66) &= -1; & 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11, & \text{ contient un nombre impair de nombres premiers} \\ \mu(18) &= 0; & 18 = 2 \cdot 3^2, & \text{ contient un carré de premier} \end{aligned} \quad (35)$$

Pour l'usage ultérieur, on liste les nombres de Möbius en début de liste :

$\mu(n) = -1$	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	30	31	37
$\mu(n) = 0$	4	8	9	12	16	18	20	24	25	27	28	32	36
$\mu(n) = +1$	1	6	10	14	15	21	22	26	33	34	35	38	39

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	-1	0	-1	1	1	0	-1	0	-1	0

La relation entre $\Pi(x)$ et $\pi(x)$ est inversée par Riemann au moyen de la formule d'inversion de Möbius pour obtenir

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \Pi(x^{1/n}) = \Pi(x) - \frac{1}{2}\Pi(x^{1/2}) - \frac{1}{3}\Pi(x^{1/3}) - \frac{1}{5}\Pi(x^{1/5}) + \frac{1}{6}\Pi(x^{1/6}) + \dots \quad (36)$$

Dans la partie finale de cette section, je souhaite discuter brièvement d'une certaine transformation intégrale qui sera d'un grand secours dans la prochaine section. Cette transformation de noyau $K(z, \xi) = \xi^{z-1}$ est appelée transformation de Mellin, bien que Riemann l'ait connue quarante ans avant qu'elle ne devienne connue sous ce nom.

Commençons par

$$g(z) = \int_0^{\infty} d\xi \xi^{z-1} f(\xi), \quad (37)$$

par exemple, avec le côté gauche donné par $\Gamma(s)$, $\Re(s) > 0$ et $f(x) = e^{-x}$:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{s-1} \text{ avec inverse } e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} ds \frac{\Gamma(s)}{x^s}. \quad (38)$$

Maintenant remplaçons x par nx ($n = 1, 2, 3, \dots$), alors multiplions les équations par des constantes c_n et sommons sur n :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{-x})^n \right\} dx, \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{-x})^n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s)}{x^s} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \right\} ds. \end{aligned} \quad (39)$$

On peut voir que la transformation de Mellin change la série de puissances $\sum c_n (e^{-x})^n$ en une série de Dirichlet $\sum c_n / n^s$ et l'inverse de la transformation de Mellin change une série de Dirichlet en série de puissances.

En particulier, si on note $c_n = 1$ pour tout n , alors avec $\sum (e^{-x})^n = 1/(e^x - 1)$ on obtient une représentation intégrale de la fonction zeta de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \quad \Re(s) > 1 \quad (40)$$

dont l'inverse est donné par

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s)\zeta(s)}{x^s} ds \quad (a > 1). \quad (41)$$

Une des plus importantes formules dans l'article de Riemann est

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_0^\infty \Pi(x)x^{-s-1} dx. \quad (42)$$

Ici on reconnaît pour la première fois la forte connexion entre les zéros de zeta et la fonction $\Pi(x)$. Pour mieux comprendre la formule ci-dessus, prenons le logarithme des deux côtés de

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (43)$$

et en utilisant $\log(1 - x) = -x - 1/2 x^2 - 1/3 x^3 \dots$ on obtient

$$\log \zeta(s) = - \sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_p p^{-s} + \frac{1}{2} \sum_p p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum_p p^{-3s} + \dots. \quad (44)$$

Ici on utilise les identités ($\Re(s) > 1$)

$$p^{-s} = s \int_p^\infty x^{-s-1} dx, \quad p^{-2s} = s \int_{p^2}^\infty x^{-s-1} dx, \quad \dots, \quad p^{-ns} = s \int_{p^n}^\infty x^{-s-1} dx, \dots \quad (45)$$

pour écrire

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \sum_p \sum_n \frac{1}{n} p^{-ns} = \sum_p \sum_n \frac{1}{n} \cdot s \int_{p^n}^\infty x^{-s-1} dx \\ &= s \int_0^\infty \Pi(x)x^{-s-1} dx. \end{aligned} \quad (46)$$

Pour expliquer la dernière ligne, écrivons

$$\begin{aligned} s \int_0^\infty \Pi(x)x^{-s-1} dx &= s \left\{ \left[\Pi(x) \left(-1 \right) \frac{1}{2} x^{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty dx d\Pi \frac{x^{-s}}{-s} \right\} \\ &= \int_0^\infty x^{-s} d\Pi(x) \quad (\text{intégrale de Stieltjes}), \end{aligned} \quad (47)$$

où la mesure $d\Pi$ a été écrite comme la densité fois dx ; plus précisément :

$$d\Pi = \left(\frac{d\Pi}{dx} \right) dx, \quad (48)$$

où $d\Pi/dx$ est la densité des nombres premiers plus la 1/2-densité des carrés de nombres premiers, plus la 1/3-densité des cubes de nombres premiers, etc.

N'oublions pas que la version calculatoire de la "formule dorée"

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_0^{\infty} \Pi(x) x^{-s-1} dx \quad (49)$$

trouve son origine dans le produit de nombres premiers d'Euler-Riemann pour la fonction zeta et dans l'invention intelligente de la fonction en escalier $\Pi(x)$. Ce nom est justifié parce que quand x est l'exact carré d'un nombre premier, par exemple quand $x = 9 = 3^2$, $\Pi(x)$ saute d'un demi, puisque $\pi(\sqrt{x}) = \pi(3)$ saute de 1, et etc. Notons qu'au point effectif où le saut a lieu, la fonction est à mi-hauteur du saut.

Donc on a dérivé la merveilleuse formule donnée ci-dessus, qui devrait nous amener directement au résultat central de l'article de Riemann. Mais quelle est l'expression inverse, i.e. comment exprimer $\Pi(x)$ en fonction de $\zeta(x)$? On discutera de cela dans la prochaine section.

3 Riemann, un expert de la transformée de Fourier

Plus tôt on a introduit la paire d'équations

$$\begin{aligned} \frac{\log \zeta(s)}{s} &= \int_0^{\infty} \Pi(x) x^{-s-1} dx \quad (\Re(s) > 1), \\ \text{et } \Pi(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \log \zeta(s) x^s \frac{ds}{s} \quad (a > 1), \end{aligned} \quad (50)$$

quand on a discuté de la transformée de Mellin. Voyons comment Riemann a atteint le même résultat bien plus tôt en utilisant la formule d'inversion de Fourier :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{i(x-\lambda)\mu} d\lambda \right] d\mu. \quad (51)$$

Quand on écrit

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\mu) e^{i\mu x} d\mu, \quad (52)$$

on peut considérer $\phi(\mu)$ comme les coefficients d'une expansion définie par

$$\phi(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-i\lambda\mu} d\lambda. \quad (53)$$

Maintenant notons $s = a + i\mu$, $a = \text{const.} > 1$ et μ une variable réelle.

Alors avec $\lambda = \log x$ and $\varphi(x) = 2\Pi(e^x)e^{-ax}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{x = e^\lambda}{\frac{dx}{x} = d\lambda} : \frac{\log \zeta(a + i\mu)}{a + i\mu} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(e^\lambda) e^{-(a+i\mu)\lambda} d\lambda \\ &=: \phi(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-i\mu\lambda} d\lambda. \end{aligned} \quad (54)$$

Donc on peut continuer à écrire

$$(\varphi(x)) = 2\pi\Pi(e^x)e^{-ax} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \zeta(a + i\mu)}{a + i\mu} e^{i\mu x} d\mu \quad (55)$$

et en utilisant $e^x = y$, alors $y \rightarrow x$, $s = a + i\mu$, $ds = i d\mu$, $d\mu = 1/i \cdot ds$ on obtient finalement

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \log \zeta(s) x^s \frac{ds}{s} \quad (a > 1), \quad (56)$$

qui est le résultat souhaité.

À partir de là, on peut directement arriver au résultat principal de l'article de 1859 de Riemann. Pourtant, pour le moment, on doit accepter deux nouvelles quantités de Riemann (des détails seront fournis ultérieurement) : la fonction entière $\xi(s)$ ($\zeta(s)$ n'est pas une fonction entière) et la formule du produit pour la fonction ξ :

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), & \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \frac{2}{s} \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) \\ &= (s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) \zeta(s) \end{aligned} \quad (57)$$

et

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \quad (58)$$

avec ρ les zéros de la fonction zeta (égaux aux zéros de ζ).

Ainsi, en prenant le logarithme des deux côtés, on obtient

$$-\log 2 + \sum_p \log \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) = \log(s-1) - \frac{s}{2} \log \pi + \log \Gamma \left(1 + \frac{s}{2}\right) + \log \zeta(s)$$

ou $\log \zeta(s) = \sum_{\rho} \log \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) - \log 2 - \log \Gamma \left(1 + \frac{s}{2}\right) + \frac{s}{2} \log \pi - \log(s-1).$

(59)

Le premier terme du côté droit nous donne la connexion recherchée entre les zéros non triviaux de zeta et $\Pi(x)$. Cela devient évident quand on écrit

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s ds$$
(60)

avec $\log \zeta(s)$ pris ci-dessus. Voici, alors, le résultat de Riemann :

$$\Pi(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho}) + \log \left(\frac{1}{2}\right) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1) \log t}, \quad x > 1.$$

(61)

La somme sur ρ doit être comprise comme

$$\sum_{\text{Im}\rho > 0} (\text{Li}(x^{\rho}) + \text{Li}(x^{1-\rho}))$$
(62)

et $\text{Li}(x)$ dénote le logarithme intégral (voir ci-dessous).

Cette expression calculée pour $\Pi(x)$ est alors utilisée dans la formule

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \Pi(x^{1/n}) = \Pi(x) - \frac{1}{2} \Pi(x^{1/2}) - \frac{1}{3} \Pi(x^{1/3}) - \frac{1}{5} \Pi(x^{1/5}) + \frac{1}{6} \Pi(x^{1/6}) + \dots \quad (63)$$

Ceci est la grande prouesse de Riemann, le calcul explicite, exact, de la fonction de comptage des nombres premiers $\pi(x)$.

Réécrivons le résultat de Riemann plus explicitement :

$$\Pi(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\text{Im}\rho > 0} (\text{Li}(x^{\rho}) + \text{Li}(x^{1-\rho})) - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1) \log t}, \quad x > 1 \quad (64)$$

avec

$$\text{Li}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right].$$
(65)

Si on différencie $\Pi(x)$ on obtient

$$d\Pi = \left[\frac{1}{\log x} - \sum_{\operatorname{Re}\alpha > 0} \frac{2 \cos(\alpha \log x)}{x^{1/2} \log x} - \frac{1}{x(x^2 - 1) \log x} \right] dx \quad x > 1. \quad (66)$$

α parcourt toutes les valeurs telles que $\rho = 1/2 + i\alpha$; en d'autres termes, $\alpha = -i(\rho - 1/2)$ où ρ parcourt toutes les racines de telle façon que

$$x^{\rho-1} + x^{-\rho} = x^{-\frac{1}{2}} [x^{i\alpha} + x^{-i\alpha}] = 2x^{-\frac{1}{2}} \cos(\alpha \log x). \quad (67)$$

L'hypothèse de Riemann dit que tous les α sont réels.

À nouveau, par définition de Π , la mesure $d\Pi$ est dx fois la densité des nombres premiers plus $1/2$ la densité des carrés de nombres premiers, plus $1/3$ fois la densité des cubes de nombres premiers, etc. Donc $1/(\log x)$ tout seul ne devrait pas être considéré comme une approximation de la seule densité des nombres premiers comme Gauß le suggérait, mais plutôt comme $d\Pi/dx$, i.e. la densité des nombres premiers plus $1/2$ fois la densité des carrés de nombres premiers, plus, etc.

Une assez bonne approximation néglige le dernier terme dans $d\Pi$. C'est le nombre de α qui est significatif dans $d\Pi$ que Riemann se destinait à étudier empiriquement pour voir l'influence des "termes périodiques" sur la distribution des nombres premiers. Avec les équations ci-dessus, on a atteint la fin du célèbre article de Riemann de 1859.

On a pourtant, laissé de côté un certain nombre de résultats révolutionnaires vers lesquels on souhaite se tourner maintenant.

4 Sur le chemin vers la fonction entière de Riemann

$\xi(s)$

Commençons avec la représentation intégrale de la fonction Γ d'Euler :

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \\ s \rightarrow \frac{s}{2} : \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-x} dx, \\ x = \pi t n^2 : \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{\infty} (\pi t n^2)^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi t n^2} \pi n^2 dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \frac{1}{n^s} = \int_0^{\infty} e^{-\pi t n^2} t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}, \\
\text{Prenons} \quad \sum_{n=1}^{\infty} : \quad & \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \int_0^{\infty} \psi(t) t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}, \quad \Re(s) > 1, \\
& \psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2}. \tag{68}
\end{aligned}$$

La dernière équation définit l'une des fonctions ϑ de Jacobi :

$$\Theta(x) := \vartheta_3(0, ix) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x n^2}, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x n^2}, \quad \Theta(x) = 2\psi(x) + 1. \tag{69}$$

Également, mentionnons l'identité de Jacobi sans démonstration :

$$\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Theta\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0. \tag{70}$$

On peut facilement vérifier que

$$\frac{1 + 2\psi(x)}{1 + 2\psi\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \tag{71}$$

de telle façon que

$$\psi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \Theta\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x} \Theta(x) - \frac{1}{2} = \sqrt{x} \psi(x) + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}. \tag{72}$$

Maintenant, on va calculer l'intégrale suivante, qui nous donnera l'un des merveilleux résultats de Riemann.

En utilisant $\Psi(x) = x^{-1/2} \Psi(1/x) - 1/2 + 1/2x^{-1/2}$ et en séparant l'intégrale en deux parties en 1, on obtient

$$\int_0^{\infty} \Psi(x) x^{s/2} \frac{dx}{x} = \int_1^{\infty} \Psi(x) x^{s/2} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \Psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{s-1}{2}} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^{\frac{s-1}{2}} - x^{\frac{s}{2}}\right) \frac{dx}{x}. \tag{73}$$

Dans les deux dernières intégrales, on substitue $x \rightarrow 1/x$ et donc on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \Psi(x) x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} &= \int_1^{\infty} \Psi(x) \left[x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1}{2}(1-s)}\right] \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \left[x^{\frac{1}{2}(1-s)} - x^{-\frac{s}{2}}\right] \frac{dx}{x} \\
\int_1^{\infty} dx \left[x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right] &= -\frac{2}{s-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} dx [x^{-\frac{s}{2}-1}] &= \frac{2}{s}, \\
&= \int_1^{\infty} \Psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}.
\end{aligned} \tag{74}$$

On a alors ici la formule importante de l'article de Riemann :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) &= \int_1^{\infty} \Psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \right) dx - \frac{1}{s(1-s)}. \\
&\text{p\^ole } \Gamma : s = 0 \\
&\text{p\^ole } \zeta : s = 1
\end{aligned} \tag{75}$$

Notons qu'il n'y a pas de changement du côté droit selon $s \rightarrow 1-s$!

$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$ a des pôles simples en $s = 0$ et $s = 1$. Pour supprimer ces pôles, on multiplie par $1/2s(s-1)$. C'est la raison pour laquelle Riemann définit

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), \tag{76}$$

qui est une fonction entière ($\zeta(s)$ est une fonction méromorphe). De façon évidente, on a $\xi(s) = \xi(1-s)$ et l'équation fonctionnelle

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)} \zeta(1-s). \tag{77}$$

On obtient le côté droit par le côté gauche en remplaçant s par $(1-s)$.

Maintenant on continue à écrire pour $\xi(s)$

$$\begin{aligned}
\xi(s) &= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2} \int_1^{\infty} \Psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1}{2}(1-s)} \right) \frac{dx}{x} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2} \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left\{ \Psi(x) \left[\frac{x^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}(1-s)}}{\frac{1}{2}(1-s)} \right] \right\} dx \\
&\quad + \frac{s(1-s)}{2} \int_1^{\infty} \Psi'(x) \left[\frac{x^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}(1-s)}}{\frac{1}{2}(1-s)} \right] ds \\
&= \frac{1}{2} + \frac{s(1-s)}{2} \Psi(1) \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{1-s} \right] \\
&\quad + \int_1^{\infty} \Psi'(x) \left[(1-s)x^{\frac{s}{2}} + sx^{\frac{1}{2}(1-s)} \right] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \Psi(1) + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}} \Psi'(x) \left[(1-s)x^{\frac{1}{2}(s-1)-1} + sx^{-\frac{s}{2}-1} \right] dx \\
&= \frac{1}{2} + \Psi(1) + \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{3}{2}} \Psi'(x) \left(-2x^{\frac{1}{2}(s-1)} - 2x^{-\frac{s}{2}} \right) \right] dx \\
&\quad - \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{3}{2}} \Psi'(x) \right] \left[-2x^{\frac{1}{2}(s-1)} - 2x^{-\frac{s}{2}} \right] dx \\
&= \frac{1}{2} + \Psi(1) - \Psi'(1)[-2-2] + \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{3}{2}} \Psi'(x) \right] \left(2x^{\frac{1}{2}(s-1)} + 2x^{-\frac{s}{2}} \right) dx. \tag{78}
\end{aligned}$$

La différentiation de

$$2\Psi(x) + 1 = x^{-\frac{1}{2}} \left[2\Psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right] \tag{79}$$

donne facilement

$$\frac{1}{2} + \Psi(1) + 4\Psi'(1) = 0 \tag{80}$$

et utiliser cela permet de mettre la formule dans sa forme finale :

$$\xi(s) = 4 \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{3}{2}} \Psi'(x) \right] x^{-\frac{1}{4}} \cosh \left[\frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{2} \right) \log x \right] dx, \tag{81}$$

ou, comme Riemann l'écrit ($s = 1/2 + it$; $1/2$ est l'hypothèse de Riemann !):

$$\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = 4 \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{3}{2}} \psi'(x) \right] x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \log x\right) dx. \tag{82}$$

Avec

$$\frac{d}{dx} \left[x^{3/2} \psi'(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^4 \pi^2 x - \frac{3}{2} n^2 \pi \right) x^{1/2} \exp(-n^2 \pi x) \tag{83}$$

et

$$v = \frac{1}{2} \log x \tag{84}$$

et alors $v = 2u$, on peut aussi écrire $\Xi\left(\frac{t}{2}\right)$ comme une transformée de Fourier

$$\Xi\left(\frac{t}{2}\right) = 8 \int_0^{\infty} du \Phi(u) \cos(ut) \tag{85}$$

avec

$$\Phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi n^2 (2n^2 \pi \exp(4u) - 3) \exp(5u - n^2 \pi \exp(4u)). \tag{86}$$

Si $\cosh[1/2(s - 1/2) \log x]$ est développé dans la série habituelle de puissances

$$\cosh y = \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}) = \sum \frac{y^{2n}}{(2n)!}, \quad (87)$$

on peut écrire

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{2n}, \quad (88)$$

où

$$a_{2n} = 4 \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} [x^{3/2} \Psi'(x)] x^{-1/4} \frac{(\frac{1}{2} \log x)^{2n}}{(2n)!} dx. \quad (89)$$

Revenons à

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), \quad (90)$$

avec

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \Psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right) dx, \quad (91)$$

et écrivons le côté droit en fonction de $s = 1/2 + it$, ce qui utilise la conjecture de Riemann $\Re(s) = 1/2$. Puisque les détails de la substitution sont évidents, on donne simplement le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + it\right) \left(it - \frac{1}{2}\right) \pi^{-\frac{1}{4} - i\frac{t}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \\ &= \frac{-(t^2 + \frac{1}{4})}{\left[2(\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2} + it}\right]} \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right). \end{aligned} \quad (92)$$

En particulier,

$$\xi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{(8\pi^{1/4})} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \quad (93)$$

avec

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = -1.4603545088, \quad \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{2\varpi 2\pi} = 3.6256099082, \quad (94)$$

où la constante de la lemniscate de Gauß est égale à

$$\varpi = 2.62205755429. \quad (95)$$

Tout ça mis ensemble :

$$\xi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.4971207781 = a_0, \quad (96)$$

qui est le minimum pour la valeur réelle $\xi(s)$ en $s = 1/2$. D'ailleurs $\xi(0) = \xi(1) = -\zeta(0) = 1/2$. Le résultat ci-dessus peut aussi s'écrire

$$\Xi(t) := \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^\infty \Psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \log x\right) dx. \quad (97)$$

Le côté droit de cette équation nous dit cela parce que $t \in R_e, x \in R_e$ et $\log x \in R_e$, on a

$$\operatorname{Im}\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0, \quad \text{i.e.} \quad \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) \equiv \Xi(t) \in R_e. \quad (98)$$

Puisque $\Xi(t) = \xi(1/2 + it)$ change de signe infiniment souvent lorsque $t \rightarrow \infty$, $\xi(s)$ (et $\zeta(s)$) doivent avoir une infinité de zéros sur $\Re(s) = 1/2$.

Il y a une autre forme utile de $\xi(s)$ qu'on obtient en commençant par sa définition originale

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) \\ &= e^{\ln \Gamma(\frac{s}{2})} \pi^{-\frac{s}{2}} \frac{s(s-1)}{2} \zeta(s). \end{aligned} \quad (99)$$

Alors en posant $s = 1/2 + it$, on a

$$\begin{aligned} \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) &= e^{\ln \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+it}{2}\right)} \pi^{-\frac{\frac{1}{2}+it}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + it\right) \left(\frac{1}{2} + it - 1\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \\ &= \left[e^{R_e \ln\left(\frac{\frac{1}{2}+it}{2}\right)} \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{-t^2 - \frac{1}{4}}{2} \right] \left[e^{i \operatorname{Im} \ln \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+it}{2}\right)} \pi^{-\frac{it}{2}} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right] \\ &= \left[-e^{R_e \ln\left(\frac{\frac{1}{2}+it}{2}\right)} \pi^{-\frac{1}{4}} \frac{t^2 + \frac{1}{4}}{2} \right] \left[e^{i \operatorname{Im} \ln \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+it}{2}\right)} \pi^{-\frac{it}{2}} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right]. \end{aligned} \quad (100)$$

Notons que le premier facteur entre crochets est négatif. Pour le second facteur on a

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right), \quad \vartheta(t) = \operatorname{Im} \ln \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2} + it}{2}\right) - \frac{t}{2} \ln \pi. \quad (101)$$

Ainsi, $Z(t)$ et ξ sont toujours de signes opposés.

Maintenant, on doit calculer $\vartheta(t)$ et $\zeta(1/2+it)$. Pour l'analyse numérique, il suffit d'utiliser

$$\vartheta(t) \sim \frac{t}{2} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{48t}, \quad (102)$$

qu'on peut appliquer pour calculer les racines de $\xi(s)$ sur la droite critique.

5 La représentation par un produit de $\xi(s)$ et $\zeta(s)$ par Riemann (1859) et Hadamard (1893)

Le but de Riemann (avant Weierstrass !) était de démontrer que $\xi(s)$ peut être développé en un produit infini

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \quad (103)$$

où ρ parcourt toutes les racines de $\xi(\rho) = 0$. Il n'a pas démontré effectivement cette formule mais il avait raison, comme cela a été montré plus tard par Hadamard. Mais l'on doit admettre que Riemann devait avoir une forte idée de la formule du produit que Weierstrass allait bientôt introduire comme une représentation essentielle en théorie des fonctions, ici les fonctions entières, i.e. les fonctions qui peuvent être déterminées par leurs zéros.

Comme bref rappel, voici la représentation en produit de Weierstrass de la fonction Γ :

$$\Gamma(x) = e^{-\gamma x} \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{\left(1 + \frac{x}{k}\right)}, \quad (104)$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right] \simeq 0.5772157. \quad (105)$$

De cette formule produit découle, avec l'aide de

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \Gamma(x)(-x)\Gamma(-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad (106)$$

la représentation en produit de $\sin(\pi x)$:

$$\begin{aligned} \sin(\pi x) &= -\frac{\pi}{x} \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(-x)} = -\frac{\pi}{x} \left(e^{\gamma x} x \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{k}\right)}{e^{\frac{x}{k}}} \right) \left(e^{-\gamma x} (-x) \prod_{k>1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{x}{k}\right)}{e^{-\frac{x}{k}}} \right) \\ &= \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right), \end{aligned} \quad (107)$$

un polynôme de degré infini. De façon similaire, Euler voyait $\sin(\pi x)$ comme un polynôme de degré infini quand il conjectura, et finalement démontra, la formule de $\sin(\pi x)$.

Aussi, pourquoi ne pas penser à $\xi(s)$ comme à un polynôme de degré infini et ne pas écrire une formule de produit déterminée par son infinité de zéros ρ ? C'est ce qu'Hadamard a fait

en 1893 dans un article dans lequel il a étudié les fonctions entières et leurs représentations comme produits infinis – comme Weierstrass. Il a pu démontrer que la formule de produit de Riemann était correcte :

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{\xi}{\rho}\right). \quad (108)$$

$\xi(s)$ est une fonction entière. Le produit infini est compris comme devant être pris dans un ordre qui apparie chaque racine à la racine correspondante $1 - \rho$. La démonstration de Hadamard de la formule produit pour ξ a été désignée par von Mangoldt comme “la première réelle avancée dans le domaine en 34 ans”, c’est-à-dire la première avancée depuis Riemann.

Hadamard a montré qu’il était possible de construire la fonction ζ comme un produit infini, étant donnés ses zéros

$$\zeta(s) = f(s) \prod_{\zeta(\rho)=0} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}, \quad f(s) = \frac{1}{2(s-1)} \left(\frac{2\pi}{e}\right)^s. \quad (109)$$

Par conséquent, en incluant les zéros triviaux et non triviaux, il obtint

$$\zeta(s) = \frac{1}{2(s-1)} \left(\frac{2\pi}{e}\right)^s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}} \cdot \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}. \quad (110)$$

Pour le premier produit, on utilise la représentation par produit fournie par Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(1+s)} = e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}, \quad (111)$$

et ainsi on obtient la formule du produit de Hadamard, qui est convergente dans $C \setminus \{1\}$:

$$\zeta(s) = \frac{e^{(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma}{2})s}}{2(s-1)\Gamma(1 + \frac{s}{2})} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}. \quad (112)$$

Une forme légèrement simplifiée du produit de Hadamard est

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma(1 + \frac{s}{2})} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right). \quad (113)$$

Ici on prend les paires de racines ρ et $-\rho$ ensemble de telle façon que les exposants $e^{-s/\rho}$ s’annulent.

La dernière expression montre que la fonction ζ peut être complètement construite par ses racines (une spécialité de Riemann) et la singularité en $s = 1$. Pourtant, pour obtenir une convergence absolue, on doit introduire ρ et $-\rho$ par paire dans le produit.

Maintenant, on rappelle la fonction entière de Riemann $\xi(s)$ et la façon dont elle est reliée à la fonction (non entière) ζ :

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s). \quad (114)$$

Alors

$$\frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \quad \Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right) = \frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \quad (115)$$

ou

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \quad (116)$$

et en utilisant $\xi(0) = \frac{1}{2}$, on a en effet

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \quad (117)$$

qui est le résultat de Riemann de 1859 !

Puisque les zéros de $\zeta(s)$ et de $\xi(s)$ dans la bande critique coïncident, on peut également écrire

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \left(1 - \frac{s}{1-\rho}\right) \\ &= \frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)} \left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} + 14.134i}\right) \left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} - 14.134i}\right) \left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} + 21.022i}\right) (\dots), \end{aligned} \quad (118)$$

où on a utilisé les premiers zéros sur l'axe $\Re(s) = 1/2$.

6 Dérivation de la formule de Von Mangoldt pour $\Psi(x)$

Il y a une autre version, plus moderne, de la formule de Riemann pour $\Pi(x)$, i.e.

$$\Pi(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho}) + \log \xi(0) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1) \log t} \quad (x > 1). \quad (119)$$

C'est la formule de von Mangoldt pour $\Psi(x)$, qui contient essentiellement la même information que la formule $\Pi(x)$ de Riemann. Sur le chemin de la formule explicite pour

$\Psi(x)$, on a besoin d'une représentation particulière de la fonction de discontinuité. Donc commençons simplement par vérifier

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s-\beta} &= \int_1^{\infty} x^{-s} x^{\beta-1} dx, & \Re(s-\beta) > 0, \\
x = e^\lambda &:= \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} e^{\lambda(\beta-1)} e^\lambda d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} e^{\lambda\beta} d\lambda, \\
s = a + i\mu &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda(a+i\mu)} e^{\lambda\beta} \alpha \lambda, \\
\frac{1}{a+i\mu-\beta} &= \int_0^{\infty} e^{-i\lambda\mu} e^{\lambda(\beta-a)} d\lambda, & a > \Re\beta, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a+i\mu-\beta} e^{i\mu x} d\mu &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu x} d\mu \int_0^{\infty} e^{-i\lambda\mu} e^{\lambda(\beta-a)} d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{i(x-\lambda)\mu} d\mu \right] e^{\lambda(\beta-a)} d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(x-\lambda) e^{\lambda(\beta-a)} d\lambda \\
&= \begin{cases} 2\pi e^{x(\beta-a)}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \tag{120}
\end{aligned}$$

Jusque là on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a+i\mu-\beta} e^{x(a+i\mu)} d\mu = \begin{cases} e^{x\beta}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \tag{121}$$

Avec $e^x = y$ et $s = a + i\mu$, on obtient le facteur de discontinuité (fonction en escalier)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{s-\beta} y^s ds = \begin{cases} y^\beta, & y > 1 \\ 0, & y < 1 \end{cases} \stackrel{\beta=0}{=} \begin{cases} 1, & y > 1 \\ \frac{1}{2}, & y = 0 \\ 0, & y < 1 \end{cases} \quad a > 0. \tag{122}$$

Maintenant on revient à la fonction zeta d'Euler-Riemann,

$$\zeta(z) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1-p^{-z}}, \quad \Re(z) > 1 \tag{123}$$

et on prend le logarithme :

$$\begin{aligned}
\log \zeta(z) &= - \sum_p \log(1 - p^{-z}) = - \sum_p \log(1 - e^{-z \log p}) , \\
\frac{d}{dz} \log \zeta(z) &= - \sum_p \frac{1}{1 - p^{-z}} \frac{d}{dz} (1 - e^{-z \log p}) = - \sum_p \frac{1}{1 - p^{-z}} \log p \cdot p^{-z} \\
&= - \sum_p \frac{p^{-z}}{1 - p^{-z}} \log p = - \sum_p \sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu z} \log p \\
&= \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} . \\
\cdot \frac{x^z}{z} : \frac{x^z}{z} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{\nu z}} &= \sum_p \left(\frac{x}{p} \right) \frac{\log p}{z} = - \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \cdot \frac{x^z}{z} , \\
\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{p,\nu=1}^{\infty} \left(\frac{x}{p} \right)^z \frac{\log p}{z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{\zeta'(x) x^z}{\zeta(z) z} dz \\
\text{ou } \sum_{\nu=1}^{\infty} \log p \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{x}{p} \right)^z \frac{1}{z} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{\zeta'(z) x^z}{\zeta(z) z} dz \\
y = \frac{x}{p^\nu} : \sum_{\nu=1}^{\infty} \log p \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^z}{z} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{\zeta'(z) x^z}{\zeta(z) z} dz . \tag{124}
\end{aligned}$$

Ici on utilise le 1 du facteur de discontinuité du côté gauche et ainsi, on obtient la fonction de Chebyshev $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = \sum_{p^\nu < x} \log p = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{\zeta'(z) x^z}{\zeta(z) z} dz . \tag{125}$$

On doit donc sommer le logarithme de tous les nombres premiers jusqu'à x .

$p^\nu > x$ devrait signifier $y < 1$, mais pour ce cas, la formule de discontinuité donne zéro.

L'intégrale du côté droit peut être évaluée à l'aide du théorème des résidus. Les contri-

butions aux résidus de $\zeta'(z)/\zeta(z) \cdot x^z/z$ viennent de

Singularité	Raison	Résidu
0	$\frac{x^z}{z}$	$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \frac{-\frac{1}{2} \log 2\pi}{-\frac{1}{2}} = \log(2\pi)$
1	pôle de ζ $\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\frac{1}{z-1} + \gamma + \dots$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left(\frac{-1}{z-1} + \mathcal{O}(1) \right) \frac{x^z}{z} = \frac{-x^1}{1} = -x$
$-2, -4, -6, \dots$	zéros triviaux de $\zeta(z)$	$\frac{1}{2}x^{-2}, \frac{1}{4}x^{-4}, \frac{1}{6}x^{-6}, \dots$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{2n} = \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$
ρ	zéros non triviaux de $\zeta(z)$	$\frac{x^\rho}{\rho}$

(126)

ce qui amène à la formule explicite exacte

$$\Psi(x) = x - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{\zeta(\rho)=0} \frac{x^\rho}{\rho}. \quad (127)$$

On appelle cette formule la formule de von Mangoldt (1895) et c'est une des formules les plus importantes de la théorie analytique des nombres. $\Psi(x)$ est réelle et donne les sauts pour les puissances de nombres premiers x . Bien que le dernier terme ait l'air complexe, il ne l'est pas, puisque les zéros entrent par paires et donc c'est aussi un nombre réel.

$\Psi(x)$ est équivalent à la fonction $\Pi(x)$ de Riemann et on doit admettre que la formule pour $\Psi(x)$ a été déduite beaucoup plus aisément que la formule pour $\Pi(x)$, avec laquelle on avait commencé cette section. Il n'est pas étonnant qu'on l'ait considérée entre-temps comme préférable à $\Pi(x)$.

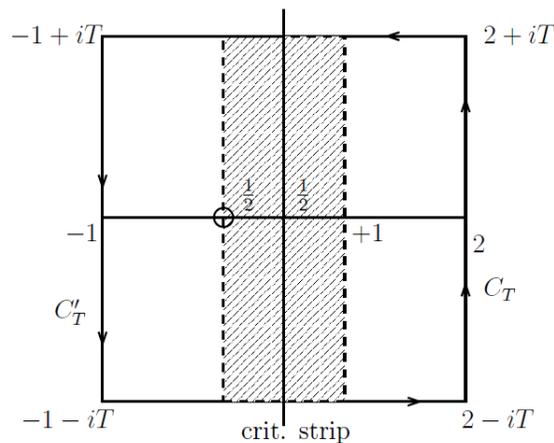
7 Le nombre de racines dans la bande critique

Le théorème suivant a originellement été formulé par Riemann – mais non démontré. Ce n'est qu'en 1905 que von Mangoldt a démontré que le nombre de zéros de ζ dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1, 0 < t < T$ est donné par

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}. \quad (128)$$

Pour prouver cette assertion, supposons que $T \geq 3$ et que $\zeta(s) \neq 0$ pour $t = T$.

Considérons alors la zone rectangulaire R_T dans le plan complexe :

Figure 1: Limites de R_T

Les zéros de la fonction ξ sont identiques à ceux de la fonction ζ dans la zone critique. La symétrie par rapport à l'axe $\Re(s) = 1/2$ amène (rappelons-nous du résidu logarithmique)

$$2N(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_T} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds. \quad (129)$$

De l'équation fonctionnelle de ξ on obtient

$$\begin{aligned} \xi(1-s) &= \xi(s) \\ -\frac{\xi'(1-s)}{\xi(1-s)} &= \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}. \end{aligned} \quad (130)$$

$C'_T(C_T)$ est la limite du côté gauche (droit) de R_T :

$$\begin{aligned} \int_{C'_T} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds &= \int_{C_T} \frac{\xi'(1-s)}{\xi(1-s)} d(1-s) = \int_{C_T} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds \\ &> N(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_T} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds. \end{aligned} \quad (131)$$

Maintenant, en utilisant la représentation suivante de la fonction ξ ,

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \quad (132)$$

on prend le logarithme

$$\log \xi(s) = -\log 2 + \log s + \log(s-1) - \frac{s}{2} \log \pi + \log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \log \zeta$$

$$\begin{aligned}
> \frac{d}{ds} \log \xi(s) &= \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \\
> 2\pi i N(T) &= \underbrace{\int_{C_T} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) ds}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\int_{C_T} \frac{1}{2} \log \pi ds}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{C_T} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} ds}_{\textcircled{3}} + \int_{C_T} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \quad (133)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} \quad \int_{C_T} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) ds &= \frac{1}{2} \int_{\partial R_T} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) ds \stackrel{\text{resid}}{=} \frac{1}{2} 2\pi i (1+1) = 2\pi i \\
\textcircled{2} \quad \int_{C_T} \frac{1}{2} \log \pi ds &= \frac{1}{2} \log \pi \left(\left(\frac{1}{2} + iT \right) - \left(\frac{1}{2} - iT \right) \right) = iT \log \pi \\
\textcircled{3} \quad \int_{C_T} \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} ds &= \log \Gamma \left(\frac{s}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} \\
&= \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2} \right) - \log \Gamma \left(\frac{1}{4} - i\frac{T}{2} \right) \quad (134)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \Gamma(\bar{s}) &= \overline{\log \Gamma(s)} := 2i \operatorname{Im} \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2} \right) \\
&\stackrel{\text{Développons}}{T \geq 3} = 2i \operatorname{Im} \left(\log \sqrt{2\pi} + \left(-\frac{1}{4} + i\frac{T}{2} \right) \log \left(i\frac{T}{2} \right) - i\frac{T}{2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{T} \right) \right) \\
&= 2i \operatorname{Im} \left(\log \sqrt{2\pi} + \left(-\frac{1}{4} + i\frac{T}{2} \right) \left(\log \frac{T}{2} + i\frac{\pi}{2} \right) - i\frac{T}{2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{T} \right) \right) \\
&= 2i\pi \left(\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2\pi} \right) - \frac{1}{8} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{T} \right). \quad (135)
\end{aligned}$$

Notre résultat immédiat est alors

$$2\pi i N(T) = 2\pi i - iT \log \pi + 2\pi i \left(\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2\pi} - \frac{1}{8} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{T} \right) \right) + \int_{C_T} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds. \quad (136)$$

$$\boxed{N(T) = 1 - \frac{T}{2\pi} \log \pi + \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2\pi} - \frac{1}{8} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_T} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds.} \quad (137)$$

Le dernier terme peut être séparé en deux parties, dont les résultats sont fournis sans détailler davantage les calculs :

$$\int_{2-iT}^{2+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = \mathcal{O}(1), \quad \text{pour } T \geq 3 \quad (138)$$

et en utilisant

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}-iT}^{2-iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds &= \int_{1/2}^2 \frac{\zeta'(\sigma - iT)}{\zeta(\sigma - iT)} d\sigma = \overline{\int_{1/2}^2 \frac{\zeta'(\sigma - iT)}{\zeta(\sigma + iT)} ds} \\
&= \overline{\int_{\frac{1}{2}+iT}^{2+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds} \\
> \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\frac{1}{2}-iT}^{2-iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds + \int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right). \quad (139)
\end{aligned}$$

Jusque-là, on a trouvé

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right). \quad (140)$$

En utilisant

$$\begin{aligned}
\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds &= \log \zeta \left(\frac{1}{2} + iT \right) - \log \zeta(2 + iT) \\
> \operatorname{Im} \left(\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right) &= \arg \left(\zeta \left(\frac{1}{2} + iT \right) \right) - \arg \left(\zeta(2 + iT) \right). \quad (141)
\end{aligned}$$

On peut montrer que le module de la dernière expression est $\mathcal{O}(\log T)$.

Par conséquent, notre résultat final pour le nombre de zéros dans la bande critique avec $0 < T$ est donné par

$$\boxed{N(T) = \frac{T}{2\pi} \left(\log \frac{T}{2\pi} - 1 \right) + \mathcal{O}(\log T)}. \quad (142)$$

Comme mentionné ci-dessus, cette formule a été donnée par Riemann en 1859, mais seulement démontrée par von Mangoldt en 1905.

D'ailleurs, on peut aussi approximer $\operatorname{Im} \log \Gamma(1/4 + it/2)$ et ainsi obtenir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \left\{ \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2} \right) \right\} &= \frac{t}{2} \log \left(\frac{t}{2} \right) - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{t}{2} \log \pi + \mathcal{O}(t^{-1}) \\
\text{i.e. } \vartheta(t) &= \frac{t}{2} \log \left(\frac{t}{2\pi} \right) - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \mathcal{O}(t^{-1}). \quad (143)
\end{aligned}$$

Cela nous amène au résultat utile

$$N(T) = \frac{1}{\pi} \vartheta(T) + 1 + \frac{1}{\pi} \arg \zeta \left(\frac{1}{2} + iT \right), \quad (144)$$

avec

$$\frac{1}{\pi} \arg \zeta \left(\frac{1}{2} + iT \right) = \mathcal{O}(\log T) \quad \text{pour } T \rightarrow \infty. \quad (145)$$

On peut ainsi conclure pour le nombre de zéros de ζ dans la bande critique :

$$\begin{aligned} 1. \quad & N(T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty \\ 2. \quad & N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log T. \end{aligned} \quad (146)$$

Cela découle de

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(\log T), \quad (147)$$

qui quand on le divise par $T/2\pi \log T$, amène à

$$\frac{N(T)}{\frac{T}{2\pi} \log T} = \frac{\log T - \log 2\pi}{\log T} + \frac{C}{T/2\pi} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 1. \quad (148)$$

Ce résultat devrait être comparé au théorème des nombres premiers (Gauß 1796, alors qu'il avait 15 ans)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \right) = 1. \quad (149)$$

Von Koch a démontré en 1901 : si l'hypothèse de Riemann ($\Re(s) = \frac{1}{2}$) est vraie, alors

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + \mathcal{O}(\sqrt{x} \log x), \quad (150)$$

i.e. l'erreur dans l'approximation $\pi(x) \sim \text{Li}(x)$ est de l'ordre de $\sqrt{x} \log x$.

8 Régularisation de la fonction zeta de Riemann

Dans cette dernière section, on souhaite introduire le concept de la fonction zeta en lien avec la régularisation de certains problèmes en physique quantique dans lesquels interviennent des quantités infinies. Pour cette raison, on considère un opérateur A avec des valeurs propres positives, réelles discrètes $\{a_n\}$, i.e. $Af_n(x) = a_n f(x)$ et on définit sa fonction de zeta associée par

$$\zeta_A(s) = \sum_n a_n^{-s} = \sum_n e^{-s \ln a_n}, \quad (151)$$

où n parcourt toutes les valeurs propres. Si on choisit pour A l'opérateur de Hamilton de l'oscillateur harmonique, par exemple, on obtient (à part le point d'énergie nulle) exactement la fonction zeta. Par différentiation normale, il découle maintenant :

$$\zeta'_A(0) = - \sum_n \ln a_n e^{-s \ln a_n} \Big|_{s=0} = - \ln \left(\prod_n a_n \right). \quad (152)$$

Cela suggère la définition

$$\det A = \exp [-\zeta'_A(0)], \quad (153)$$

que nous utiliserons exclusivement dans la suite. L'avantage de cette méthode est que $\zeta'_A(0)$ n'est pas singulier pour de nombreux opérateurs présentant un intérêt physique. Comme exemple des nombreuses applications à des problèmes aussi bien relativistes que non relativistes en théorie quantique des champs, on choisira l'effet Casimir.

Cet effet est une force de répulsion non classique électromagnétique, attractive ou répulsive qui advient entre des conducteurs électriquement neutres dans le vide. La grandeur de cette force a d'abord été calculée par Casimir pour le cas de la conduction idéale, infiniment étendue dans des plaques parallèles ; son résultat a été une force

$$F = - \frac{\pi^2}{240} \cdot \frac{\hbar c}{a^4}, \quad (154)$$

où a est la distance entre les plaques et le signe négatif indique que les plaques s'attirent l'une l'autre. Cette force dépend apparemment seulement des constantes fondamentales \hbar et c en dehors de la distance entre les plaques ; elle ne dépend pas, pourtant, de la constante de couplage α entre les champs de Maxwell et de matière. Son caractère propre à la mécanique quantique est révélé par le fait que F s'évanouit dans la limite classique $\hbar \rightarrow 0$.

La dérivation par Casimir de F était basée sur le concept de vide (de particules) en électrodynamique quantique représentant les oscillations au point zéro d'un nombre infini d'oscillateurs harmoniques. Comme résultat, on obtient l'énergie totale du vide en sommant sur les énergies au point nul $1/2\hbar\omega_{\vec{k}}$ de tous les modes autorisés avec un vecteur de nombre d'onde \vec{k} et de polarisation σ ,

$$E = \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}}. \quad (155)$$

Si on évalue cette équation pour le cas de deux plaques parallèles à distance a l'une de l'autre, on obtient effectivement une énergie totale divergente $E(a)$, mais la différence

d'énergie $E(a) - E(a + \delta a)$ est finie ($\delta a =$ changement infinitésimal dans la distance entre les plaques), amenant aussi à une force finie par unité d'aire,

$$F = -\frac{\partial E(a)}{\partial a}. \quad (156)$$

Pour calculer cette différence d'énergie ou force, on introduit en général un UV-cut-off, i.e. l'énergie E est remplacée par

$$\sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}} e^{-\frac{b}{\pi c} \omega_{\vec{k}}} \quad (157)$$

et dans le résultat final, la limite $b \rightarrow 0$ est considérée.

La dérivation de F , pourtant, peut donner l'impression que l'apparence de la force de Casimir est liée à l'existence de fluctuations au point zéro du champ électromagnétique quantifié.

Pour éviter le problème de l'énergie du vide divergente, dans la suite, on considérera le problème selon Hawking du point de vue de la quantisation de l'intégrale de chemin et de la régularisation de la fonction zeta. Ici, il est à nouveau non nécessaire de faire référence à l'oscillation du vide. Pour des raisons de simplicité, on souhaite considérer l'effet Casimir seulement pour la théorie d'un champ réel, scalaire qui est définie par ($\hbar = c = 1!$)

$$\mathcal{L}(\phi) = -\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi), \quad (158)$$

avec le potentiel arbitraire V .

D'abord, on associe le champ ϕ à une source externe J ,

$$\mathcal{L}(\phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi) + J\phi. \quad (159)$$

On peut alors écrire l'amplitude du vide $\langle 0_+ | 0_- \rangle^J$ ou l'action $W[J]$ sous la forme

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = e^{iW[J]} = \int [d\phi] e^{i \int d^4x \{ \mathcal{L}(\phi) + J\phi \}}, \quad (160)$$

où on garantit la convergence de l'intégrale de chemin par la substitution $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$, $\epsilon > 0$. On a supposé que $|0_- \rangle$ or $|0_+ \rangle$ décrit un vide qui n'est pas "perturbé" par la présence de certaines géométries, i.e. l'intégrale de chemin est, sans restrictions par des conditions aux bornes, à prendre sur tous les champs ϕ . Cela change dès qu'on introduit

les deux plaques dans le vide, par exemple, perpendiculairement à l'axe des z (points d'intersection : $z = 0$ et $z = a$) et cela a pour conséquence que seuls ces champs devraient contribuer à l'intégrale de chemin qui devrait s'évanouir sur la surface des plaques, i.e. pour lequel il est vérifié que

$$\phi(x_0, x_1, x_2, 0) = \phi(x_0, x_1, x_2, a) = 0 \quad (161)$$

pour des (x_0, x_1, x_2) arbitraires. On obtient alors

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | 0_- \rangle_a^J &= e^{iW(a, [J])} \\ &= \int_{\mathcal{F}_a} [d\phi] \exp \left[i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (m^2 - i\epsilon) \phi^2 - V(\phi) - J\phi \right\} \right], \end{aligned} \quad (162)$$

où $\int_{\mathcal{F}_a}$ suggère que l'intégrale de chemin doit seulement être prise sur l'espace réduit des fonctions \mathcal{F}_a définies par les conditions aux bornes. Avec ça, on a représenté l'amplitude du vide ou l'action pour le cas plus général comme une fonction du paramètre géométrique a et comme une fonctionnelle de la source externe J . Pour approcher les conditions de l'effet Casimir en électrodynamique quantique, on choisit maintenant $J = 0$ ainsi qu'un champ libre ϕ ($V = 0$), sans masse ($m = 0$). Selon l'intégration partielle

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle_a = e^{iW(a)} = \int_{\mathcal{F}_a} [d\phi] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x \phi \{-\partial^2 - i\epsilon\} \phi}. \quad (163)$$

L'intégrale de Gauß donne

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle_a = e^{iW(a)} = \int_{\mathcal{F}_a} [d\phi] e^{-\frac{1}{2} \int d^3x d\tau \phi \{-\square_E\} \phi}. \quad (164)$$

Ici, N est une constante (divergente) qu'on posera $= 1$, puisqu'elle contribue seulement comme constante non physique additionnelle à $W(a)$. En écrivant \square_E/\mathcal{F}_a , on veut dire que les seules valeurs propres avec fonctions propres dans \mathcal{F}_a peuvent être utilisées pour évaluer le déterminant. De plus (en accord avec la contrainte), une rotation de Wick $t \rightarrow i\tau$ a été faite, i.e. $\square_E = \partial_\tau^2 + \Delta$.

De la définition originale du déterminant, il découle que

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | 0_- \rangle_a &= e^{iW(a)} = \left[\exp \left\{ -\zeta'_{-\square_E/\mathcal{F}_a}(0) \right\} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \exp \left[\frac{1}{2} \zeta'_{-\square_E/\mathcal{F}_a}(0) \right]. \end{aligned} \quad (165)$$

L'opérateur $-\square_E/\mathcal{F}_a$ a pour spectre

$$\left\{ k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \mid k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (166)$$

et ainsi, la fonction zeta

$$\zeta_{-\square_E/\mathcal{F}_a}(s) = 2 \frac{A}{(2\pi)^2} \frac{T_E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 dk_1 dk_2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right]^{-s}. \quad (167)$$

Ici, le facteur 2 permet les deux possibilités de polarisation du photon, qui, dans notre modèle simple, n'a pas d'analogue. De plus, AT_E est un volume de normalisation dans un espace trois-dimensionnel $(0, 1, 2)$, où le temps euclidien T_E est lié à un intervalle de temps de normalisation (de Minkowski) T par $T_E = iT$. Éliminer le terme indépendant d'un $(n = 0)$ dans la dernière équation amène simplement à soustraire une constante (infinie) de $W(a)$.

Une évaluation plus avancée de $\zeta_{-\square_E/\mathcal{F}_a}(s)$ prend maintenant la forme

$$\begin{aligned} \zeta_{-\square_E/\mathcal{F}_a}(s) &= 2AT_E \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk k^2 \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right]^{-s} \\ &= \frac{8\pi}{(2\pi)^3} AT_E \left(\frac{\pi}{a}\right)^{3-2s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{3-2s} \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} AT_E \left(\frac{\pi}{a}\right)^{3-2s} \zeta(2s-3) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)}. \end{aligned} \quad (168)$$

La dérivée est

$$\begin{aligned} \zeta'_{-\square_E/\mathcal{F}_a}(0) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} AT_E \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \zeta(-3) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \left. \frac{d}{ds} \frac{1}{\Gamma(s)} \right|_{s=0} \\ &= \frac{\pi^2}{360a^3} AT_E. \end{aligned} \quad (169)$$

Finalement, on obtient

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle = e^{iW(a)} = e^{-\epsilon(a)T_E} = e^{-i\epsilon(a)T}, \quad (170)$$

avec

$$\epsilon(a) = -\frac{\pi^2}{720a^3} A. \quad (171)$$

L'apparence du facteur de phase $e^{-i\epsilon(a)T}$ dans l'amplitude du vide nous permet d'identifier $\epsilon(a)$ comme le déplacement de l'énergie du vide et d'écrire, pour la force par unité de surface

$$F = -\frac{1}{A} \frac{\partial \epsilon}{\partial a}, \quad (172)$$

ce qui amène à

$$F = -\frac{\pi^2}{240} \cdot \frac{1}{a^4} \quad (173)$$

ou, après avoir remis \hbar et c

$$F = -\frac{\pi^2}{240} \cdot \frac{\hbar c}{a^4}. \quad (174)$$

Ceci est précisément le résultat de Casimir que nous avons maintenant complètement dérivé à l'aide de la régularisation de la fonction de Riemann, qui a complètement éliminé l'énergie divergente au point zéro. La même procédure trouve des applications en électrodynamique quantique et en chromodynamique quantique, et peut être étudiée dans la liste de références (i.e. voir [9,10,11]).

Remerciements

Je souhaite exprimer ma gratitude aux bibliothécaires du "Handschriftenabteilung" (le Département des documents manuscrits) à l'Université de Göttingen pour m'avoir permis d'accéder aux manuscrits originaux de Riemann, et en particulier aux originaux concernant les nombres premiers.

Appendice : Suppléments

La fonction ζ de Riemann peut être étendue méromorphiquement à la région $\{s : \Re(s) > 0\}$ dans et à droite de la bande critique $\{s : 0 \leq \Re(s) < 1\}$. C'est une région suffisante de prolongement méromorphe pour de nombreuses applications en théorie analytique des nombres. Les zéros de la fonction ζ dans la bande critique sont connus sous le nom de zéros non triviaux de ζ .

Il est remarquable que ζ vérifie une équation fonctionnelle en établissant une symétrie autour de la droite critique $\{s : \Re(s) = \frac{1}{2}\}$ plutôt qu'autour de l'axe réel. Une conséquence de cette symétrie est que la fonction ζ peut être étendue méromorphiquement à tout le plan complexe avec un pôle simple en $s = 1$ et aucun autre pôle. Pour toute la région

$\mathbb{C} \setminus \Re(s) = 1$ incluant la bande critique on a l'équation fonctionnelle :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \quad \Re(s) < 0 \quad (175)$$

ou, de façon équivalente, l'identité entre les fonctions méromorphes $\zeta(s)$:

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s). \quad (176)$$

Le prolongement analytique donné ici permet de relier $\zeta(s)$ pour les valeurs positives de $\Re(s)$ avec les valeurs aux nombres négatifs, par exemple :

$$\zeta(-1) = 2^{-1} \pi^{-2} (-1) \Gamma(2) \zeta(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}, \quad (177)$$

i.e.

$$\zeta_R(-1) = -\frac{1}{12}, \quad (178)$$

où l'indice R est ajouté pour distinguer la fonction ζ de Riemann de celle d'Euler, dont elle est une extension, i.e.

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-x}} \quad \text{convergeant pour } x > 1$$

$$\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots = \prod_{p \text{ premier}} \frac{p^x}{p^x - 1} = \left(\frac{2^x}{2^x - 1}\right) \left(\frac{3^x}{3^x - 1}\right) \left(\frac{5^x}{5^x - 1}\right) \dots$$

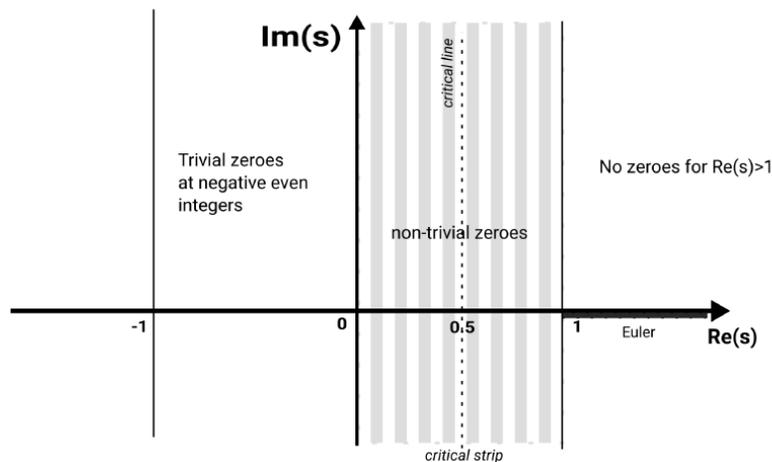


Figure 2: Les différents domaines de définition de la fonction ζ de Riemann de (179)

Quand on étend cette fonction au plan complexe complet s , alors la fonction ζ de Riemann vient en trois représentations différentes :

$$\zeta(s) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{p^s}{p^s-1}, & \Re(s) > 1 \\ (1 - 2^{1-s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, & 0 < \Re(s) < 1 \\ 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), & \Re(s) < 0 \end{cases} \quad (179)$$

Où $\zeta(s)$ est-elle égale à 0 ?

1. Il n'y a aucun zéro pour $\Re(s) > 1$ puisque là, $\zeta(s) > 0$.
2. il n'y a pas de zéros non triviaux dans la bande $0 < \Re(s) < 1$, symétrique autour de $\Re(s) = \frac{1}{2}$.
3. il y a des zéros triviaux pour $s = -2, -4, \dots$, donc pour $\Re(s) < 0$.

Il y a un pôle en $s = 1$.

L'origine de l'équation fonctionnelle pour la fonction η de Dirichlet

Euler dans son article "Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques" écrit les équations fonctionnelles suivantes

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \dots}{1 - 2^{-n} + 3^{-n} - 4^{-n} + 5^{-n} - 6^{-n} + \dots} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (n-1)(2^n - 1)}{(2^{n-1} - 1)\pi^n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\frac{1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \dots}{1 - 3^{-n} + 5^{-n} - 7^{-n} + \dots} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (n-1)(2^n)}{\pi^n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) .$$

Il finit alors son travail en démontrant que les assertions ci-dessus sont vraies pour des nombres entiers positifs et négatifs ainsi que pour les valeurs fractionnaires de n .

De nos jours, on écrit avec $s \in \mathbb{C}$:

$$\eta(1-s) = -\frac{(2^s - 1)}{\pi^s(2^{s-1} - 1)} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \eta(s) \quad (180)$$

qui est l'équation fonctionnelle de la fonction η de Dirichlet.

Hardy a donné une démonstration pour le cas où s est remplacé par $s + 1$ dans la dernière équation :

$$\eta(-s) = 2 \frac{(1 - 2^{-s-1})}{1 - 2^{-s}} \pi^{-s-1} s \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \eta(s+1) \quad . \quad (181)$$

De la relation $\eta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$ on peut montrer que η a des zéros en les points $s_k = 1 + \frac{2\pi i k}{\ln 2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, par exemple $s_1 = 1 + 9.0647i$. Pour $k = 0$ on trouve plutôt $\eta(1) = \ln 2 = 0.69315$. Rappelons que $\zeta(1) = \infty$.

Quand on écrit

$$\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}}$$

on réalise que $\eta(s)$ ainsi que $(1 - 2^{1-s})$ ont les mêmes zéros s_k avec $k = 1, 2, 3, \dots$. $\eta(s)$ est également nulle aux points où $\zeta(s)$ est nulle. Ce sont les zéros triviaux $s = -2, -4, -6, \dots$ tels que

$$\eta(-2) = \eta(-4) = \eta(-6) = \dots = 0 \quad .$$

Finalement, η , comme ζ , présente les zéros non triviaux dans la bande critique $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(s) < 1\}$. La célèbre hypothèse de Riemann non démontrée stipule que tous les zéros non triviaux de ζ sont sur l'axe $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

$\zeta(s)$ est une fonction méromorphe. Plus tard on rencontrera la fonction ξ de Riemann, $\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$. $\xi(s)$ est une fonction entière, elle a des zéros non triviaux, pourtant elle n'a ni zéros triviaux, ni pôles. On a également : $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Les tables (1) indiquent que la fonction Γ et les facteurs trigonométriques dans l'équation fonctionnelle ((175), (176), resp.) sont liés aux zéros triviaux et aux pôles de la fonction ζ , mais n'ont pas d'incidence directe sur la distribution des zéros non triviaux, ce qui est la caractéristique la plus importante de la fonction ζ pour les buts de la théorie analytique des nombres, au-delà du fait qu'ils sont symétriques autour de l'axe réel et de la droite critique $x = \frac{1}{2}$. Les fonctions exponentielles telles que 2^{s-1} ou π^{-s} n'ont ni zéros ni pôles. En particulier, l'hypothèse de Riemann ne va pas être résolue juste par une analyse plus poussée de la fonction Γ .

Un remarquable fait historique : Euler, en 1749 (110 ans avant Riemann !) a découvert que la série suivante est convergente :

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \quad (182)$$

On appelle aussi cela la fonction η de Dirichlet. Cette série est reliée à ζ par

$$\phi(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s) \quad (183)$$

s	$\zeta(s)$
$-2\mathbb{N}$	0
$-\mathbb{N}$	$\frac{-B_{n+1}}{n+1}$
-7	$\frac{1}{240}$
-5	$\frac{-1}{252}$
-3	$\frac{1}{20}$
-1	$\frac{-1}{12}$
0	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	-1.46035450
1	∞
$\frac{3}{2}$	2.6123753486
2	$\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449340$ (Euler, Bâle)
$\frac{5}{2}$	1.3414872572
3	1.2020569
$\frac{7}{2}$	1.1267338673
4	$\frac{\pi^4}{90} \approx 1.082323233$

(a) Quelques valeurs de $\zeta(s)$

Fonction	zéros non triviaux	zéros triviaux	Pôles
$\zeta(s)$	Oui	$-2, -4, -6, \dots$	1
$\zeta(1-s)$	Oui	$3, 5, \dots$	0
$\sin \frac{\pi s}{2}$	Non	$2\mathbb{N}$	Non
$\cos \frac{\pi s}{2}$	Non	$2\mathbb{N} + 1$	Non
$\sin \pi s$	Non	\mathbb{N}	Non
$\Gamma(s)$	Non	Non	$0, -1, -2, \dots$
$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$	Non	Non	$0, -2, -4, \dots$
$\Gamma(1-s)$	Non	Non	$1, 2, 3, \dots$
$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$	Non	Non	$1, 3, 5, \dots$
$\xi(s)$	Oui	Non	Non

(b) Propriétés de quelques fonctions

Table 1: Propriétés et valeurs particulières de la fonction ζ de Riemann.

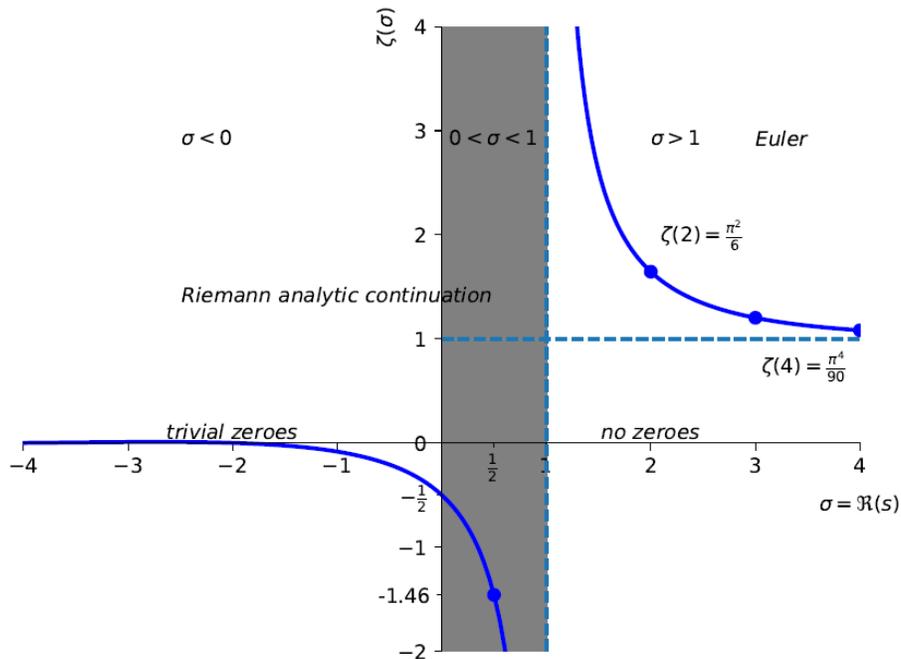


Figure 3: Comportement de la fonction ζ de Riemann pour les arguments réels.

Dans la bande critique $0 < s < 1$, on a :

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{2^{s-1}}{2^{s-1} - 1} \phi(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \phi(s) \\ &= \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad \Re(s) > 0, 1 - 2^{1-s} \neq 0.\end{aligned}\quad (184)$$

D'Euler, on a

$$\frac{\phi(1-n)}{\phi(n)} = \frac{-(n-1)!(2^n - 1)}{(2^{n-1} - 1)\pi^n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad (185)$$

et il dit de plus : “je hasarderais que la conjecture suivante :

$$\frac{\phi(1-s)}{\phi(s)} = -\frac{\Gamma(s)(2^s - 1) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{(2^{s-1} - 1)\pi^s} \quad (186)$$

est vraie pour tout s ". On sait que $(\eta(s) =)\phi(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$, ce qui amène directement de (186) à

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \Gamma(s) \zeta(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus 1 \quad (187)$$

et ceci est la célèbre équation fonctionnelle qui a été démontrée par Riemann en 1859 (mais elle avait été conjecturée par Euler en 1749 !). Il est probablement correct de supposer que Riemann était très familier de la contribution d'Euler.

Avec la série alternée de Dirichlet en main, on peut déjà énoncer une assertion importante par rapport aux zéros de la fonction ζ dans la bande critique $0 < \Re(s) = \sigma < 1$, qui est importante pour l'hypothèse de Riemann, et qui énonce que tous les zéros non triviaux de ζ sont sur la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Pour montrer cela, on commence par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s := \sigma + it \quad (188)$$

qui est convergente pour $\Re(s) > 1$, est une fonction méromorphe et a un pôle en $s = 1$. Ensuite soit

$$n^s = n^{\sigma+it} = n^{\sigma} n^{it} = n^{\sigma} e^{it \ln n} = |n|^{\sigma} (\cos(t \ln n) + i \sin(t \ln n)) \quad (189)$$

d'où il suit immédiatement que

$$\zeta(s) = \Re(\zeta(s)) + i \Im(\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} [\cos(t \ln n) - i \sin(t \ln n)] \quad (190)$$

$$\Rightarrow \Re(\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \cos(t \ln n) \quad (191)$$

$$\Im(\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \sin(t \ln n) \quad (192)$$

qui sont convergentes pour $\sigma > 1, t \in \mathbb{R}$. Ensuite considérons la fonction ϕ d'Euler comme donnée dans (182), qui est également connue sous le nom de fonction η de Dirichlet. Une extension du domaine de ζ à la région $0 < \sigma < 1$, i.e. dans la bande critique, est obtenue en réécrivant (183) comme

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \eta(s). \quad (193)$$

Notons que seule la bande critique est importante pour l'hypothèse de Riemann. Notons de plus que η est convergente pour $\sigma = \Re(s) > 0$ et que la série harmonique alternée suivante,

$$\eta(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2 \approx 0.69315, \quad (194)$$

s'obtient à partir de

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad -1 < x \leq 1, \quad (195)$$

où x est supposée être réelle. On peut réécrire la fonction η de Dirichlet de la façon suivante :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s} \right). \quad (196)$$

De là, on obtient d'une façon simple (c.f. (191), (192)):

$$\Re(\eta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} [(2n-1)^{-\sigma} \cos(t \ln(2n-1)) - (2n)^{-\sigma} \cos(t \ln(2n))] \quad (197)$$

$$\Im(\eta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} [(2n)^{-\sigma} \sin(t \ln(2n)) - (2n-1)^{-\sigma} \sin(t \ln(2n-1))] \quad . \quad (198)$$

En utilisant $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \Re(\eta(s)) + \Im(\eta(s)) &= \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(2n-1)^{-\sigma} \sin\left(t \ln(2n-1) + \frac{3}{4}\pi\right) \right. \\ &\quad \left. - (2n)^{-\sigma} \sin\left(t \ln(2n) + \frac{3}{4}\pi\right) \right] \neq 0 \quad \forall \sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \forall t \quad , \quad (199) \end{aligned}$$

i.e. η ne possède pas de racine sur la moitié gauche de la bande critique, et à cause de la formule de réflexion (176), cela est aussi vrai du côté droit, i.e. les zéros peuvent seulement être sur la droite critique $\sigma = \frac{1}{2}$, ce qui est l'**hypothèse de Riemann**.

Théorème. Si $\Re(s) = \sigma > 0$, on a

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \quad , \quad (200)$$

qui implique que $\zeta(s) < 0$ si s est réel et $0 < s < 1$.

Preuve. D'abord supposons que $\sigma > 1$ (Euler : $\Re(s) > 1$). Alors on a

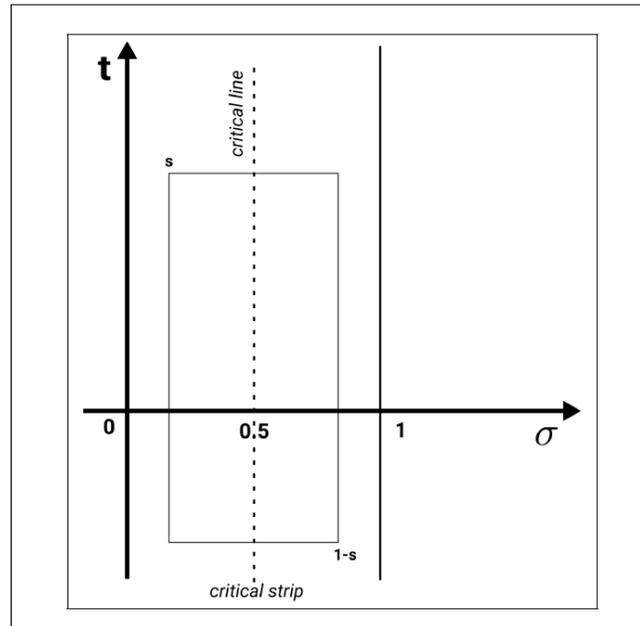
$$\begin{aligned} (1 - 2^{1-s})\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\ &= (1 + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots) - 2(2^{-s} + 4^{-s} + 6^{-s} + \dots) \\ &= 1 - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + \dots = \text{fonction } \zeta \text{ alternée,} \end{aligned}$$

ce qui prouve (200) pour $\Re(s) = \sigma > 1$. Pourtant, si $\sigma > 0$ la série du côté droit converge, ainsi (200) est aussi vérifiée pour $\sigma > 0$ par prolongement analytique, i.e. quand s est réel alors la somme dans (200) est une série alternée avec une limite positive.

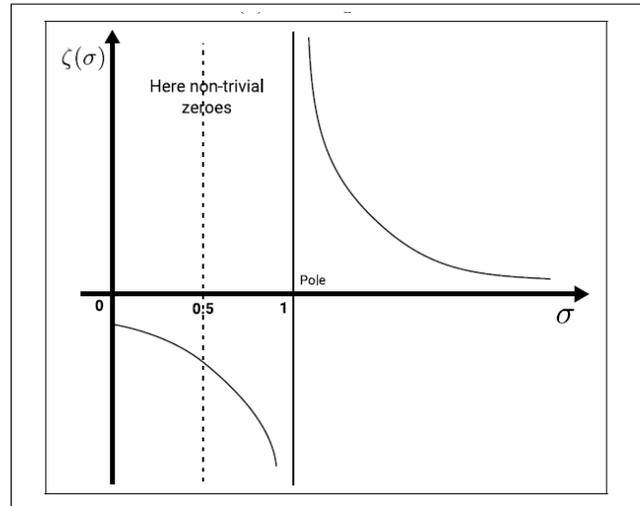
Si $0 < s < 1$, alors le facteur $1 - 2^{1-s}$ devient négatif. Par conséquent $\zeta(s)$ est aussi négative (n'a pas de zéros !) dans $0 < s < 1$. □

Notons que $\eta(1) = \dots = \ln 2 \approx 0.69315$ (c.f. (194)) alors que $\zeta(1) = \infty$, c'est-à-dire que $s = 1$ est un pôle de la fonction méromorphe ζ . De plus on a

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \quad . \quad (201)$$



(a) L'argument



(b) La fonction

Figure 4: Un regard plus attentif au comportement de ζ . En se référant à 4b, on a $|\zeta(\frac{1}{2} - \sigma)| > |\zeta(\frac{1}{2} + \sigma)|$ or $|\zeta(\frac{1}{2} - \sigma)| > |\zeta(\frac{1}{2})|$. Aucun zéro de ζ sur la moitié gauche et sur la moitié droite de la bande critique ce qui est équivalent à l'hypothèse de Riemann.

Preuve. En commençant par l'équation fonctionnelle

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s) \quad (202)$$

on résout $\zeta(s)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \pi^{\frac{s}{2}}\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\frac{\zeta(1-s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \\ s \rightarrow 0 : \zeta(0) &= \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\lim_{s \rightarrow 0}\frac{\zeta(1-s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Puisque les résidus de ζ en $s = 1$ et de Γ en $s = 0$ sont tous les deux égaux à 1, i.e.

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \dots, \quad \Gamma(s) = \frac{1}{s} + \dots, \quad (203)$$

on a

$$\zeta(1-s) = -\frac{1}{s} + \dots, \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{2}{s} + \dots \quad (204)$$

et donc

$$\lim_{s \rightarrow 0}\frac{\zeta(1-s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \lim_{s \rightarrow 0}-\frac{\frac{1}{s} + \dots}{\frac{2}{s} + \dots} = -\frac{1}{2} \quad (205)$$

d'où il découle, en utilisant $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\zeta(0) = \pi^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \implies \zeta(0) = -\frac{1}{2}. \quad (206)$$

□

Des équations eqs. (98), (99), on a

$$t, x, \psi(x), \ln(x) \in \mathbb{R}.$$

Donc $\Im\mathfrak{m}\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0$, i.e. $\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) \equiv \Xi(t) \in \mathbb{R}$ et par conséquent

$$\begin{aligned} \Xi(t) &= \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = -\frac{t^2 + \frac{1}{4}}{2(\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}+it}}\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \\ \xi\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{8\pi^{\frac{1}{4}}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.4971207781 =: a_0 \\ \zeta\left(\frac{1}{2}\right) &\approx -1.4603545088 \\ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) &= \sqrt{2\bar{\omega}2\pi} \approx 3.6256099082 \end{aligned}$$

où dans la dernière équation $\bar{\omega}$ est ce qu'on appelle la constante de la lemniscate de Gauss.

Quelques valeurs particulières :

$$\xi(0) = \xi(1) = -\zeta(0) = \frac{1}{2} . \quad (207)$$

Preuve. En utilisant $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ ainsi que $\Gamma(1 + \frac{s}{2}) = \frac{s}{2}\Gamma(\frac{s}{2})$ on obtient

$$\xi(s)|_{s=0} = (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(1 + \frac{s}{2})\zeta(s)|_{s=0} \Leftrightarrow \xi(s) = -1 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) \cdot \zeta(0) = \frac{1}{2} \quad (208)$$

Donc

$$\xi(0) = \frac{1}{2} .$$

De façon similaire, utiliser la propriété de réflexion $\xi(s) = \xi(1-s)$ amène :

$$\begin{aligned} \xi(s) &= (-s)\pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{s}{2})\zeta(1-s) \\ &\Rightarrow \xi(1) = -1 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) \cdot \zeta(0) = \frac{1}{2} \\ &\implies \xi(1) = \frac{1}{2} \quad (209) \end{aligned}$$

□

Équation fonctionnelle de Riemann

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s), \quad (210)$$

dont la symétrie est évidente quand $s \rightarrow 1-s$ est remplacé des deux côtés de l'équation.

Preuve. En commençant avec la fonction Γ d'Euler

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t} dt . \quad (211)$$

En utilisant $s \rightarrow \frac{s}{2}$, le résultat ci-dessus devient

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t} dt . \quad (212)$$

Ensuite, on peut utiliser la substitution $t = \pi n^2 x$ ($dt = \pi n^2 dx$) pour obtenir

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{s}{2}) &= \int_0^\infty (\pi n^2 x)^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} \pi n^2 dx \\ \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\frac{1}{n^s} &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx . \end{aligned}$$

La sommation sur n amène

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx \\
\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} dx \\
\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}}_{\text{fortement relié à la fonction } \vartheta \text{ de Jacobi.}} dx \\
\vartheta(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = 1 + 2\psi(x), \quad x > 0. \\
\Rightarrow \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} dx &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx.
\end{aligned}$$

On sépare l'intégrale du côté droit en deux parties :

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx = \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx + \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx. \quad (213)$$

Regardons $\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right)$ or $2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}(1 + \psi\left(\frac{1}{x}\right))$. Les équations (72) dans le corps de l'article sont

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \left(x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1} \right) \right) dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{s-3}{2}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{s}{2}} x^{\frac{s}{2}} \right]_0^1 \\
&= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{s(s-1)} \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_{\infty}^1 \left(\frac{1}{y} \right)^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi(y) \left(-\frac{1}{y^2} \right) dy + \frac{1}{s(s-1)} \\
&\stackrel{y \rightarrow x}{=} \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi(x) \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{s(s-1)} \\
\Rightarrow \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx &= \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \psi(x) dx + \frac{1}{s(s-1)} \\
\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx &= \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx + \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx + \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \psi(x) dx + \frac{1}{s(s-1)} \\
&= \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \right) \psi(x) dx + \frac{1}{s(s-1)},
\end{aligned}$$

où dans (*) la substitution $x = \frac{1}{y}$, $dx = -\frac{1}{y^2} dy$, $\int_0^1 \rightarrow \int_\infty^1$ a été utilisée. Rappelons qu'on a commencé avec $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx$ et que l'on est parvenu à

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}} \right) \frac{\psi(x)}{x} dx - \frac{1}{s(s-1)}. \quad (214)$$

Notons que le dernier terme amène le pôle de Γ en $s = 0$ et de ζ en $s = 1$. Notons également que le côté droit ne change pas selon $s \rightarrow 1 - s$, ce qui implique l'équation fonctionnelle de Riemann

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Riemann a utilisé 4-5 lignes pour dériver cette relation ! □

Dans (214) on a utilisé

$$\begin{aligned}
x^{\frac{s}{2}} &= x^{\frac{\sigma+it}{2}} = e^{\frac{\sigma \ln(x)}{2} + i \frac{t}{2} \ln(x)} = e^{\frac{\sigma \ln(x)}{2}} \left[\cos\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right) + i \sin\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right) \right] \\
x^{\frac{1-s}{2}} &= e^{\frac{(1-\sigma) \ln(x)}{2}} \left[\cos\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right) - i \sin\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right) \right] \\
x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}} &= \left(e^{\frac{\sigma \ln(x)}{2}} + e^{\frac{(1-\sigma) \ln(x)}{2}} \right) \cos\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right) \\
&\stackrel{y=\frac{t}{2} \ln(x)}{=} \left(e^{\sigma \frac{y}{2}} + e^{(1-\sigma) \frac{y}{2}} \right) \cos(y) \\
&\stackrel{R.H.: \sigma=\frac{1}{2}}{=} \left(e^{\frac{y}{2t}} + e^{\frac{y}{2t}} \right) \cos(y) = 2e^{\frac{y}{2t}} \cos(y) \\
&= 2e^{\frac{1}{4} \ln(x)} \cos(y) = 2x^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right)
\end{aligned}$$

et dont la partie imaginaire s'évanouit pour $\sigma = \frac{1}{2}$. Donc

$$\Xi(t) := \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} s(s-1) \int_1^\infty \psi(x) \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{4} \ln(x)} \cos\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right) \frac{dx}{x} \quad (215)$$

est une fonction réelle, qui est mentionnée dans l'article de Berlin de Riemann à la page 147 comme

$$\Xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \ln(x)\right) dx; \quad (216)$$

de plus,

$$\Im \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0, \Rightarrow \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \Xi(t) \in \mathbb{R}. \quad (217)$$

Qu'est-ce qu'une fonction ?

Pourquoi $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$ est-elle une valeur régularisée ? Une réaction normale à cette assertion est : ce n'est pas un résultat vrai. C'est de la foutaise que de dire que $1 + 2 + 3 + \dots$ a une valeur finie, tant qu'on ne spécifie pas ce qu'est une fonction (le concept de fonction) et comment on la calcule, i.e. quelle représentation est choisie, quel est son domaine de définition, etc.

Les deux assertions suivantes sont, pourtant, vraies :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots \rightarrow \infty, \quad \text{i.e. diverge,}$$

$$\zeta_{\text{Riemann}}(-1) = -\frac{1}{12} \quad .$$

Question: Dans quelle représentation cette dernière assertion est-elle vraie ? On a besoin d'une compréhension plus générale d'une fonction ainsi que d'une représentation dans laquelle la valeur de la fonction est calculée.

Il est bien connu qu'une fonction peut avoir différentes représentations, par exemple, en prenant la fonction sinus :

$$f(z) = \begin{cases} \sin(z) & \\ \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} & \text{Euler} \\ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots & \text{développement de Taylor} \\ z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) & \text{développement en produit} \end{cases} \quad (218)$$

Le développement de Taylor est un développement en somme infinie de la fonction sinus, on a seulement besoin des puissances de z . Le développement en produit de la fonction sinus nécessite toute l'infinité des zéros de la fonction sinus. On voit qu'il y a de nombreuses manières différentes d'écrire une seule fonction (par exemple sinus), i.e. de nombreuses expressions différentes pour effectuer différents calculs !

Qu'est-ce que tout cela signifie-t-il pour la fonction zeta ? Commençons par la définition d'Euler (1737):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1$$

$$= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots, \quad s > 1 \text{ pour avoir la convergence,}$$

qui est la somme des inverses des puissances des entiers. Substituer de façon évidente des nombres négatifs pour s n'est pas autorisé, même $s = 1$ n'est pas permis.

Si on ignore la condition de convergence $s > 1$, alors on peut écrire

$$\zeta_{\text{Euler}}(-1) = 1 + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \dots = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \quad , \quad (219)$$

qui est un pur non-sens, parce que ça n'est pas correctement défini. $s = -1$ est simplement non autorisé dans la définition (représentation) d'Euler de la fonction zeta, qui est seulement définie sur l'axe réel $1 < x \equiv s$. Mais il y a une autre représentation attribuée à Riemann, qui peut être étendue à tout le plan complexe, $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, i.e. incluant la valeur $\Re(s) = -1$.

$$\zeta(s) = \begin{cases} \zeta_E(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} & \Re(s) > 1, \text{ Euler (1797)} \\ \zeta_R(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) & s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \text{ Riemann (1859)} \end{cases} \quad (220)$$

Notons que cette dernière fonction n'est pas donnée comme une série mais comme une fonction méromorphe.

Dans la représentation de Riemann on obtient

$$\begin{aligned} \zeta_R(-1) &= 2^{-1} \pi^{-2} \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \Gamma(1 - (-1)) \zeta(1 - (-1)) \\ &= 2^{-1} \pi^{-2} (-1) \Gamma(2) \zeta(2) \\ &= 2^{-1} \pi^{-2} (-1) \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12} \quad , \end{aligned}$$

où dans la troisième égalité, on a utilisé $\Gamma(2) = (2-1)! \cdot 1 = 1$, $\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$.

Ceci est une assertion vraie dans la représentation de la fonction zeta de Riemann

$$-\frac{1}{12} = \zeta_R(-1) \neq \zeta_E(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \Big|_{s=-1} \equiv 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \quad (221)$$

alors que la représentation d'Euler n'est pas définie pour $s = -1$.

La fonction de comptage des nombres premiers $\pi(x)$.

Assertion:

$$\begin{aligned} \frac{\ln \zeta(s)}{s} &= \int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx, \quad s > 1 \\ \zeta(s) &= \prod_{p \in \text{Premiers}} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad s > 1 \\ \ln \zeta(s) &= \ln \prod_{p \in \text{Premiers}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{p \in \text{Premiers}} \ln \frac{1}{1 - p^{-s}} \end{aligned} \quad (222)$$

où $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs à x . Remplacer la sommation sur les nombres premiers par une sommation sur tous les entiers amène

$$\ln \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \{\pi(n) - \pi(n-1)\} \ln \frac{1}{1-n^{-s}} \quad (223)$$

où

$$\pi(n) - \pi(n-1) = \begin{cases} 1, & n \text{ un nombre premier} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

projections en dehors des nombres premiers, par exemple

$$\pi(2) - \pi(1) = 1 - 0 = 1$$

$$\pi(3) - \pi(2) = 2 - 1 = 1$$

$$\pi(4) - \pi(3) = 2 - 2 = 0$$

⋮

$$\begin{aligned} (223) \Rightarrow \ln \zeta(s) &= \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \ln \frac{1}{1-n^{-s}} - \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n-1) \ln \frac{1}{1-n^{-s}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \ln \frac{1}{1-n^{-s}} - \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \ln \frac{1}{1-(n+1)^{-s}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) (\ln(1-(n+1)^{-s}) - \ln(1-n^{-s})). \end{aligned} \quad (224)$$

Maintenant utilisons

$$\frac{d}{dx} \ln(1-x^{-s}) = \frac{1}{1-x^{-s}} (sx^{-s-1}) = \frac{s}{x(x^s-1)}. \quad (225)$$

Intégrons des deux côtés pour obtenir

$$\ln(1-x^{-s}) = s \int \frac{1}{x(x^s-1)} dx + C \quad (226)$$

et utilisons cela dans (224), alors que convertir l'intégrale indéfinie en une intégrale sur $[n, n+1]$:

$$\begin{aligned} \ln \zeta(s) &= \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\pi(n)}_{\text{const. sous l'intégrale}} \int_n^{n+1} \frac{s}{x(x^s-1)} dx \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{s\pi(x)}{x(x^s-1)} dx \quad n : 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, \dots \\ \ln \zeta(s) &= \int_2^{\infty} \frac{s\pi(x)}{x(x^s-1)} dx \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\ln \zeta(s)}{s} = \int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx \quad .$$

Ceci conclut la démonstration.

Pour $s > 1$, il n'y a pas de zéros non triviaux de ζ . De tels zéros sont localisés dans la bande critique $0 < \Re(s) = \sigma < 1$. L'hypothèse de Riemann énonce que $\sigma = \frac{1}{2}$ pour tous les zéros de la fonction ζ .

Donc la formule (222) n'est pas applicable et on doit faire un prolongement analytique dans le plan complexe complet s .

Références

- [1] B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859, 671-680.
- [2] M. Edwards, Riemann's Zeta Function, Dover Publications, New York 2001.
- [3] D. Laugwitz, Bernhard Riemann 1826-1866, Birkhäuser Verlag, 1996.
- [3a] R. Ayoub, Am. Mathem. Monthly **81**, No. 10, 1067 (1974).
- [4] J. Havil, Gamma, Princeton University Press, 2003.
- [5] J. Derbyshire, Prime Obsession, New York: Penguin, 2014.
- [6] J. Stillwell, Mathematics and its history, Springer Verlag, 2002.
- [7] G.W. Gibbons, Phys. Letters **60A**, 385 (1977).
- [8] G.W. Hawking, Com. Math. Phys. **55**, 133 (1977).
- [9] W. Dittrich, M. Reuter, Effective Lagrangians in QED, Lecture Notes in Physics, **220**, Springer Verlag 1985.
- [10] W. Dittrich, M. Reuter, Effective QCD-Lagrangian with ζ -Function Regularization, Phys. Letters **128 B**, No. 5, 321 (1983).

- [11] W. Dittrich, M. Reuter Regularization schemes for the Casimir Effect, *Eur. J. Phys.* **6**, 33 (1985).
- [12] E.C. Titchmarsh and D.R. Heath-Brown, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford, England, 1986.

Werner Heisenberg (1901 - 1976)

L'interview de Werner Heisenberg a été menée par David Peat et Paul Buckley au début des années 1970 pour être l'un des enregistrements de la série documentaire de la radio CBC intitulée *La physique et au-delà*. L'interview a été plus tard publiée dans le livre *Glimpsing Reality : Ideas in Physics and the Link to Biology*, une compilation d'interviews de grands scientifiques du vingtième siècle.

Alors qu'il était étudiant avec Arnold Sommerfeld à Munich au début des années 1920, Werner Heisenberg (1901-1975) rencontra pour la première fois le physicien danois Niels Bohr. Il fit avec Bohr de longues randonnées en montagne pendant lesquelles ils discutèrent de l'échec des théories existantes à rendre compte des nouveaux résultats expérimentaux de la structure quantique de la matière. À la suite de ces discussions, Heisenberg se plongea dans plusieurs mois d'intenses recherches théoriques mais il ressentait une frustration continuelle. Finalement, souffrant d'un rhume des foies, il se retira dans l'île sans pollens d'Helgoland. Après des jours passés à se détendre et nager, Heisenberg éprouva soudain la sensation étourdissante de regarder au cœur de la nature et il conçut les fondements de la théorie quantique. Il envoya sa théorie à Bohr à Copenhague, et pendant les quelques semaines qui suivirent, ils discutèrent et démontrèrent ses implications tard dans la nuit. Les résultats de ces discussions furent appelés l'"interprétation de Copenhague de la théorie quantique" et sont acceptés par la plupart des physiciens. Les aspects de cette interprétation incluent le principe d'incertitude d'Heisenberg et le principe de complémentarité de Bohr.

Heisenberg a fait d'autres découvertes importantes en physique et est devenu l'un des plus éminents physiciens du siècle.

Werner Heisenberg a reçu le prix Nobel de physique en 1932. Son attitude reflète une dette envers la philosophie et en particulier son respect pour Platon. Certaines de ses réflexions sur la science et la société sont consignées dans une autobiographie intitulée *Physics and Beyond*.

Ces dernières années, Heisenberg a adopté la position impopulaire de critiquer la recherche en physique des particules élémentaires, en proposant que les symétries, et non les particules élémentaires, forment le point de départ fondamental d'une description du monde. Vers la fin de l'interview, il aborde cette théorie et sa réception.

Le professeur Heisenberg a été interviewé un matin ensoleillé dans son bureau de l'Institut Max Planck à Munich. Nous avons commencé par lui demander de rappeler les débuts de la théorie quantique, mais il est vite devenu évident que les grands hommes n'ont aucun désir de vivre dans le passé et il était tout aussi désireux de parler de l'avenir de la physique.

DP : Pourriez-vous vous souvenir de l'époque où vous êtes arrivé à l'idée de la mécanique quantique ?

WH : À ce moment-là, il y avait une discussion générale parmi les jeunes physiciens sur les voies possibles pour établir une théorie quantique cohérente, une mécanique quantique. Parmi les nombreuses tentatives, la plus intéressante pour moi était la tentative de H. A. Kramers d'étudier la

dispersion des atomes et, ce faisant, d'obtenir des informations sur les amplitudes pour le rayonnement des atomes. À cet égard, il m'est venu à l'esprit que dans le modèle, ces amplitudes se comportaient comme les éléments d'une quantité mathématique appelée matrice. Donc j'ai essayé d'appliquer un calcul mathématique aux expériences de Kramers, et le modèle mécanique plus général de l'atome, qui se sont ensuite avérés être de la mécanique matricielle. Ce qui est arrivé alors, c'est que je suis tombé un peu malade et j'ai dû passer des vacances sur une île pour ne plus avoir le rhume des foins. C'est là, ayant le temps nécessaire pour réfléchir à ces questions, que je suis vraiment arrivé à ce schéma de mécanique quantique et j'ai essayé de le développer sous une forme mathématique fermée.

Ma première étape a été de le présenter à W. Pauli, un de mes bons amis, et d'en discuter avec lui, puis à Max Born à Göttingen. En fait, Max Born et Pascual Jordan ont réussi à donner une forme bien meilleure et plus élégante au schéma mathématique. Des relations mathématiques que j'avais écrites, ils dérivèrent les soi-disant relations de commutation. Donc, à travers l'œuvre de Born et Jordan, puis de Paul Dirac, le tout s'est très vite développé en un schéma mathématique.

Je suis aussi allé en discuter avec Niels Bohr, mais je ne sais pas si c'était en juillet, août ou septembre de cette année [1925].

Six mois plus tard, les premiers articles d'E. Schrödinger sont devenus connus. Schrödinger a essayé de développer une ancienne idée de Louis de Broglie en un nouveau schéma mathématique, qu'il appela mécanique ondulatoire. Il était en fait capable de traiter l'atome d'hydrogène sur la base de son onde mécanique et, à l'été 1926, il a également pu démontrer que son schéma mathématique et la mécanique matricielle étaient en fait deux schémas mathématiques équivalents, qu'ils pouvaient être simplement traduits l'un dans l'autre. Passé ce délai, nous avons tous senti que ce devait être la forme aboutie de la théorie quantique.

DP : Et Bohr et vous aviez commencé l'interprétation de ce travail avant la publication de l'article de Schrödinger ?

WH : Bien sûr, il y avait une discussion continue, mais ce n'est qu'après l'article de Schrödinger que nous avons eu une nouvelle base de discussion, une nouvelle base pour interpréter la théorie quantique. Au début, il y avait un fort désaccord entre Schrödinger et nous-mêmes, non pas sur le schéma mathématique, mais sur son interprétation en termes physiques. Schrödinger pensait que par son travail, la physique pourrait reprendre une forme qui pourrait être correcte par rapport à la théorie de Maxwell ou à la mécanique de Newton, alors que nous avons estimé que ce n'était pas possible. Au cours de longues discussions entre Bohr et Schrödinger à l'automne 1926, il est devenu évident que les espoirs de Schrödinger ne pouvaient être exaucés, qu'il fallait une nouvelle interprétation. Enfin, à partir de ces discussions, nous en sommes venus à l'idée des relations d'incertitude et à l'interprétation plutôt abstraite de la théorie.

PB : Schrödinger a-t-il aimé alors cette interprétation ?

WH : Il l'a toujours détestée. Je dirais même qu'il n'était pas convaincu. Il pensait probablement que l'interprétation que Bohr et moi avons trouvée à Copenhague était correcte dans la mesure

où elle donnerait toujours les bons résultats dans les expériences; il n'a jamais aimé le langage que nous avons utilisé dans le cadre de l'interprétation. Outre Schrödinger, il y avait également Einstein, M. von Laue, M. Planck et d'autres qui n'aimaient pas ce genre d'interprétation. Ils ont estimé que c'était trop abstrait et trop éloigné des anciennes idées de la physique. Mais, comme vous le savez, cette interprétation a, du moins jusqu'à présent, résisté à l'épreuve de toutes les expériences, que les gens l'apprécient ou pas.

PB : Einstein ne l'a jamais vraiment aimée, même jusqu'au jour il est mort, n'est-ce pas ?

WH : J'ai vu Einstein à Princeton quelques mois avant sa mort. Nous avons discuté de la théorie quantique pendant un après-midi entier, mais nous n'avons pas pu nous mettre d'accord sur l'interprétation. Il était d'accord sur les tests expérimentaux de mécanique quantique, mais il n'a pas aimé l'interprétation.

DP : J'ai senti qu'à un moment donné il y avait une légère divergence entre vos points de vue et ceux de Bohr, bien que vous soyez crédités ensemble de l'interprétation de Copenhague de la mécanique quantique.

WH : C'est bien vrai, mais la divergence concernait plus la méthode par laquelle l'interprétation a été trouvée que l'interprétation elle-même. Mon point de vue était que, du schéma mathématique de la mécanique quantique, nous avons au moins une interprétation partielle, dans la mesure où nous pouvions dire, par exemple, que ces valeurs propres que nous déterminons sont les valeurs d'énergie des états stationnaires discrets, ou les amplitudes que nous déterminons sont responsables des intensités des lignes émises, et ainsi de suite. Je croyais que ça devait être possible, en étendant simplement cette interprétation partielle, pour arriver à une interprétation complète. Suivant cette façon de penser, je suis arrivé aux relations d'incertitude.

Maintenant, Bohr avait pris un point de départ différent. Il avait commencé avec le dualisme entre ondes et particules - les ondes de Schrödinger et les particules en mécanique quantique - et a tenté, à partir de ce dualisme, d'introduire le terme de complémentarité, qui était suffisamment abstrait pour faire face à la situation. Au début, nous avons tous les deux senti qu'il y avait un réel écart entre les deux interprétations, mais plus tard nous avons vu qu'elles étaient identiques. Pendant trois ou quatre semaines, il y avait une vraie divergence d'opinion entre Bohr et moi, mais cela s'est avéré sans importance.

DP : Cela a-t-il son origine dans votre approche philosophique ?

WH : C'est possible. L'esprit de Bohr a été formé par pragmatisme dans une certaine mesure, je dirais. Il avait vécu en Angleterre pendant une période plus longue et discuté de ces choses avec les physiciens britanniques, il avait donc une attitude pragmatique que tous les physiciens anglo-saxons avaient. Mon esprit s'est formé en étudiant la philosophie, Platon et ce genre de choses. Cela donne un attitude différente. Bohr était peut-être un peu surpris par le fait qu'on puisse enfin avoir un schéma mathématique très simple qui pourrait couvrir toute l'étendue de la théorie quantique. Il s'attendait probablement à ce que l'on n'obtienne jamais un schéma mathématique aussi cohérent, à ce que l'on soit obligé d'utiliser des concepts différents pour différentes expériences, et que la

physique allait toujours rester dans cet état quelque peu vague dans lequel elle se trouvait au début des années 1920.

DP : Dans l'interprétation que vous avez donnée à l'époque, ce que vous dites semble impliquer qu'il existait bel et bien un chemin idéal et qu'en quelque sorte il était possible de mesurer le chemin. Ce n'est pas tout à fait la même interprétation que celle que vous avez maintenant, n'est-ce pas ?

WH : Je dirai que pour nous, c'est-à-dire pour Bohr et moi-même, l'étape la plus importante a été de voir que notre langage n'était pas suffisant pour décrire les situations. Un mot tel que chemin est tout à fait compréhensible dans le domaine ordinaire de la physique lorsque nous parlons de pierres, d'herbe, etc., mais ce n'est pas un mot vraiment compréhensible quand il s'agit d'électrons. Dans une chambre à brouillard, par exemple, ce que nous voyons n'est pas le chemin d'un électron, mais, si nous sommes tout à fait honnêtes, seulement une séquence de gouttelettes d'eau dans la chambre. Bien sûr, nous aimons interpréter cette séquence comme un chemin de l'électron, mais cette interprétation n'est possible qu'avec une utilisation restreinte de mots tels que les mots position et vitesse. L'étape décisive a donc été de voir que tous ces mots que nous avons utilisés dans le cadre de la physique classique - position, vitesse, énergie, température, etc. - n'avaient qu'une gamme limitée d'applicabilité.

Le fait est que nous sommes liés à une langue, nous nous accrochons à la langue. Si nous voulons faire de la physique, nous devons décrire nos expériences et leurs résultats à d'autres physiciens, afin qu'ils puissent être vérifiés ou réfutés par d'autres. En même temps, nous savons que les mots que nous utilisons pour décrire les expériences n'ont qu'une portée limitée d'applicabilité. C'est un paradoxe fondamental auquel nous devons faire face. Nous ne pouvons pas l'éviter ; il faut simplement y faire face, trouver quelle est la meilleure chose que nous pouvons faire à ce sujet.

DP : Iriez-vous jusqu'à dire que le langage a en fait fixé une limite à notre domaine de compréhension en mécanique quantique ?

WH : Je dirais que les concepts de la physique classique que nous devons nécessairement utiliser pour décrire nos expériences ne s'appliquent pas aux plus petites particules, les électrons ou les atomes - du moins pas avec précision. Ils s'appliquent peut-être qualitativement, mais nous ne savons pas ce que nous entendons par ces mots.

Niels Bohr aimait raconter l'histoire du petit garçon qui entre dans un magasin avec deux centimes dans ses mains et demande au commerçant des bonbons mélangés pour les deux centimes. Le commerçant lui donne deux bonbons et dit : "Vous pouvez faire le mélange vous-même." Cette histoire, bien sûr, est simplement destinée à expliquer que le mot mélange perd son sens lorsque nous n'avons que deux objets. Dans le même ordre d'idées, des mots tels que position et vitesse et température perdent leur sens lorsque nous descendons jusqu'aux plus petites particules.

DP : Le philosophe Ludwig Wittgenstein a commencé par penser que les mots étaient liés à des faits dans le monde, puis a inversé sa position pour conclure que le sens des mots réside dans leur utilisation. Cela se reflète-t-il dans la mécanique quantique ?

WH : Je devrais d'abord donner ma propre opinion sur la philosophie de Wittgenstein. Je n'ai jamais trop été en accord avec les premiers livres de Wittgenstein et la philosophie de son *Tractatus Logico-philosophicus*, mais j'aime beaucoup les idées postérieures de Wittgenstein et sa philosophie du langage. Dans le *Tractatus*, que je trouvais trop étroit, il pensait toujours que les mots ont un sens bien défini, mais je pense que c'est une illusion. Les mots n'ont pas de sens. On peut parfois par axiomes donner un sens précis aux mots, mais on ne sait toujours jamais comment ces mots précis correspondent à la réalité, s'ils correspondent ou non à la réalité. Nous ne pouvons pas revenir sur la situation fondamentale - qui est que les mots sont censés être un lien entre la réalité et nous-mêmes - mais nous ne pouvons jamais savoir à quel point ces mots ou concepts correspondent à la réalité. On peut trouver cela dans le travail ultérieur de Wittgenstein. J'ai toujours trouvé étrange, en discutant de telles questions avec Bertrand Russell, qu'il ait un point de vue opposé ; il aimait les premiers travaux de Wittgenstein et ne pouvait rien faire du tout avec le travail tardif. Sur ces questions, nous étions toujours en désaccord, Russell et moi.

Je dirais que Wittgenstein, au vu de ses travaux ultérieurs, se serait rendu compte que lorsque nous utilisons des mots tels que position ou vitesse, pour les atomes, par exemple, nous ne pouvons pas savoir où cela nous mène, et dans quelle mesure les acceptions des mots sont applicables. En utilisant ces mots, nous apprenons leurs limites.

DP : Serait-il vrai de dire que la mécanique quantique a modifié la langue, et qu'à son tour, le langage modifiera l'interprétation de la mécanique quantique ?

WH : Là, je ne serais pas tout à fait d'accord. Dans le cas de la théorie de la relativité, je conviens que les physiciens ont simplement modifié leur langage ; par exemple, ils utiliseraient maintenant le mot simultané pour certains systèmes de coordonnées. De cette façon ils peuvent adapter leur langage au schéma mathématique. Mais en théorie quantique, cela n'est pas arrivé. Les physiciens n'ont jamais vraiment essayé d'adapter leur langage, bien qu'il y ait eut des tentatives théoriques. Mais il a été constaté que si nous voulions adapter le langage au schéma mathématique théorique quantique, nous aurions à changer même notre logique aristotélicienne. Et c'est à ce point désagréable que personne ne souhaite le faire ; il vaut mieux utiliser les mots dans leur sens limité, et quand il faut entrer dans les détails, on se retire simplement dans le schéma mathématique.

J'espère que les philosophes et tous les scientifiques apprendront de ce changement qui a eu lieu dans la théorie quantique. Nous avons appris que la langue est un instrument dangereux à utiliser, et ce fait aura certainement des répercussions dans d'autres domaines, mais c'est un processus très long qui durera plusieurs décennies, devrais-je dire.

Même dans les temps anciens, les philosophes se rendaient compte que le langage était limité ; ils ont toujours été sceptiques quant à l'utilisation illimitée de la langue. Cependant, ces doutes ou difficultés ont, peut-être, été renforcés par les développements actuels de la physique. Je pourrais mentionner que la plupart des biologistes utilisent encore aujourd'hui le langage et la manière de penser de la mécanique classique ; c'est-à-dire qu'ils décrivent leurs molécules comme si les parties des molécules n'étaient que des pierres ou quelque chose comme ça. Ils n'ont pas pris note des changements survenus dans la théorie quantique. Dans la mesure où ils se comprennent, il n'y a

rien à dire contre, mais je sens que tôt ou tard, aussi en biologie, on se rendra compte que cette simple utilisation d'images, de modèles, etc. ne sera pas tout à fait correcte.

PB : À quel point la transition se produit-elle du non-chemin vers le chemin dans un système biologique? Une molécule d'ADN est-elle un objet classique ou la cellule est-elle un objet classique?

WH : Il n'y a, bien sûr, pas de frontière très bien définie; c'est un changement continu. Quand nous arrivons à ces très petites dimensions, nous devons être préparés pour les limitations. Je ne pourrais suggérer aucun point bien défini où je dois abandonner l'utilisation d'un mot. C'est comme le mot *se mélanger* dans l'histoire; on ne peut pas dire "quand j'ai deux choses, alors je peux les mélanger." Mais que faire si vous en avez cinq ou dix? Pouvez-vous alors les mélanger?

PB : Il me semble qu'il y a quelque chose de très important ici sur la langue. Nous sommes des êtres vivants formés de structures cohérentes comme l'ADN et nous avons apparemment des chemins classiques et notre existence est compréhensible dans ce langage. Mais alors nous pouvons analyser en réduisant ces ensembles complexes et cohérents en parties de plus en plus petites, et n'est-ce pas non plus ce processus de réduction qui est à l'origine du paradoxe?

WH : Je dirais que la racine de la difficulté est le fait que notre langue est formée à partir de notre échange continu avec le monde extérieur. Nous sommes séparés de ce monde, et le fait que nous ayons une langue est un fait primordial de notre vie. Cette langue est faite pour que dans la vie quotidienne, on comprenne le monde, on ne peut pas faire en sorte que, dans des situations aussi extrêmes que la physique atomique ou les étoiles lointaines, notre langue convienne également. Ce serait trop demander.

PB : Y a-t-il un niveau fondamental de réalité?

WH : C'est exactement ça le point crucial; je ne sais pas ce que les mots "réalité fondamentale" signifient. Ils sont tirés de notre situation de vie quotidienne où ils ont un bonne signification, mais lorsque nous utilisons de tels termes, nous extrapolons généralement de notre vie quotidienne vers des zones très éloignées d'elle, où l'on ne peut pas s'attendre à ce que les mots aient un sens. C'est peut-être une des difficultés fondamentales de la philosophie : que notre pensée tienne dans la langue. Quoi qu'il en soit, nous sommes obligés d'utiliser les mots autant que possible; nous essayons d'étendre leur utilisation au maximum, puis nous nous retrouvons dans des situations dans lesquelles ils n'ont plus aucun sens.

DP : En discutant de "l'effondrement de la fonction d'onde", vous avez introduit la notion de potentialité. Souhaitez-vous développer cette idée?

WH : La question est : "Qu'est-ce qu'une vague décrit réellement?" Dans la physique ancienne, le schéma mathématique décrivait un système tel qu'il était, là dans l'espace et le temps. On pourrait appeler cela une description objective du système. Mais en théorie quantique, la fonction d'onde ne peut pas être appelée une description d'un système objectif, mais plutôt une description de situations d'observation. Lorsque nous avons une fonction d'onde, nous ne pouvons pas encore savoir ce qui se produira dans une expérience; il faut aussi connaître le dispositif expérimental. Quand

nous avons la fonction d'onde et le dispositif expérimental pour le cas particulier considéré, alors seulement nous pouvons faire des prédictions. Donc, dans ce sens, j'aime appeler la fonction d'onde une description des potentialités du système.

DP : Puis l'interaction avec l'appareil serait une potentialité qui se concrétise ?

WH : Oui.

DP : Puis-je vous interroger sur la notion kantienne de l'"a priori" une idée que vous avez introduite, en en modifiant le sens, dans vos discussions sur la théorie quantique ?

WH : Si je comprends bien, l'idée d'"a priori" souligne le fait que nos connaissances ne sont pas simplement empiriques, c'est-à-dire dérivées d'informations obtenues du monde extérieur par les sens et transformées en données dans le contenu de notre cerveau. Plutôt, "a priori" signifie que l'expérience n'est possible que lorsque nous avons déjà certains concepts qui sont la condition préalable de l'expérience. Sans ces concepts (par exemple, les concepts de l'espace et du temps dans la philosophie de Kant), nous ne pourrions même pas parler d'expérience.

Kant a fait valoir que notre expérience a deux sources : une source est le monde (c'est-à-dire l'information reçue par les sens), et l'autre source est l'existence de concepts par lesquels nous pouvons parler de ces expériences. Cette idée est également confirmée dans la théorie quantique.

PB : Mais ces concepts font partie du monde également.

WH : Qu'ils appartiennent au monde, c'est assez difficile à dire ; nous pouvons dire qu'ils appartiennent à notre manière de traiter le monde.

PB : Mais nous appartenons au monde, donc, en un sens, ces activités appartiennent également au monde.

WH : En ce sens, oui.

DP : Vous avez modifié le "a priori" en l'introduisant en tant que concept limité, est-ce vrai ?

WH : Bien sûr, Kant aurait pris le "a priori" comme quelque chose de plus absolu que ce que nous ferions en théorie quantique. Par exemple, Kant aurait peut-être dit que la géométrie euclidienne serait une base nécessaire pour décrire le monde, tandis que nous, après la relativité, nous dirions que nous n'avons pas nécessairement besoin d'utiliser la géométrie euclidienne ; nous pouvons utiliser la géométrie riemannienne, etc. De la même manière, la causalité a été prise par Kant comme une condition pour la science. Il dit que si nous ne pouvons pas conclure d'un fait que quelque chose doit avoir été avant ce fait, alors nous ne savons rien, et nous ne pouvons pas faire d'observations, car chaque observation suppose qu'il y a un chaînon causal reliant ce que nous expérimentons à ce qui est arrivé immédiatement avant. Si cette chaîne causale n'existe pas, alors nous ne savons pas ce que nous avons observé, dit Kant. La théorie quantique n'est pas d'accord avec cette idée et prouve en fait que nous pouvons procéder même dans les cas où cette chaîne causale n'existe pas.

DP : Dans l'une de vos théories récente, la causalité n'est-elle pas conservée, peut-être sous une nouvelle forme ?

WH : Nous avons la causalité dans le sens où pour qu'un point en influence un autre, il doit y avoir une action du premier au second point ; aucune action ne peut se produire s'il n'y a pas cette connexion. Mais à partir de là, il faut entrer dans des détails assez compliqués.

DP : Mais même ainsi, vous avez une causalité fondée sur l'idée de séparation et d'action, donc on revient à nouveau à un niveau philosophique, à ce que vous entendez par séparation et par interaction.

WH : Il faut parler d'"interaction et séparation", c'est tout à fait vrai, et nous utilisons ces termes comme nous l'avons fait dans la théorie classique. Mais, nous voyons une limitation. La séparation complète de deux événements peut être possible dans la théorie classique ; elle n'est pas possible en théorie quantique. Nous utilisons donc le terme ainsi que le fait de sa limitation.

DP : Quels sont exactement les critères pour que quelque chose soit dans le domaine classique ?

WH : Je dirais que les critères sont simplement que nous pouvons nous entendre par rapport à ces concepts (par exemple, "position", "vitesse", "température", "énergie"), et tant qu'on se comprend par rapport à ces termes, alors on est dans le domaine classique. Mais quand les concepts ne sont pas suffisants, alors il faut dire qu'on est parti au-delà de ce domaine classique.

Chaque système physique (oubliez pour le moment les systèmes biologiques) est toujours théoriquement quantique, dans le sens où nous pensons que la théorie quantique donne les bonnes réponses pour son comportement. Quand on dit qu'on est dans le domaine classique, cela signifie que nous obtenons les bonnes réponses ou les réponses nécessaires en utilisant des concepts classiques (au moins en cette approximation dans laquelle nous pouvons décrire le système par des concepts classiques). Donc, un système est classique uniquement dans certaines limites et ces limites peuvent être définies.

DP : Comment incluriez-vous des choses comme l'irréversibilité ?

WH : La thermodynamique est un domaine qui va au-delà de la mécanique newtonienne, en tant qu'elle introduit l'idée d'équilibre thermodynamique, ou de distribution canonique comme W. Gibbs l'a dit. La thermodynamique quitte la physique classique et entre dans le domaine de la théorie quantique, car elle parle de situations d'observation ; elle ne parle pas du système tel qu'il est, mais du système tel qu'il est lors d'un certain état d'observation, à savoir dans l'état d'équilibre de température. Si cet équilibre n'est pas respecté, alors on ne peut pas utiliser la thermodynamique. Donc tout le concept de l'irréversibilité est lié au concept d'équilibre thermodynamique.

DP : Et est-ce finalement lié à l'idée d'une limite classique à quelque chose ? Je suis en train de penser au problème de mesure qui semble toujours à associer à un processus irréversible : au fait que nous ayons un résultat défini pour un système en mécanique quantique alors que la mécanique

quantique elle-même ne semble pas prédire un résultat. Autrement dit, l'idée de mesure en mécanique quantique semble liée à l'idée d'une tendance irréversible.

WH : Oui, dans une certaine mesure, car du côté de l'observateur, nous utilisons des concepts classiques. L'idée que nous observons quelque chose indique déjà quelque chose d'irréversible. Si nous dessinons un trait de crayon sur un papier, par exemple, nous avons établi quelque chose qui ne peut être défait, pour ainsi dire. Chaque observation est irréversible, car nous avons obtenu des informations qui ne peuvent être oubliées.

DP : Dans quelle mesure cela est-il lié à la rupture de symétrie de la mécanique quantique pour un système pour lequel on obtient des observables classiques ?

WH : Je ne voudrais pas lier cela à la rupture de symétrie; cela va un peu loin. Nous essayons de décrire la situation d'observation en écrivant une fonction d'onde pour l'objet et l'équipement qui est en interaction avec cette fonction d'onde. Simplement en utilisant des mots classiques pour l'équipement, nous avons déjà fait l'hypothèse d'irréversibilité. Ou bien nous faisons l'hypothèse d'un comportement statistique, parce que la simple utilisation des mots classiques pour cette observation du côté du système rend impossible de connaître la fonction d'onde globale de l'objet et de l'équipement. Mais on ne peut pas utiliser la théorie quantique pour l'équipement au sens strict, car si nous écrivions la fonction d'onde globale de l'objet et de l'équipement, nous ne pourrions pas utiliser des mots classiques pour l'équipement, donc nous n'observerions rien. Nous ne faisons qu'observer lorsque nous utilisons des concepts classiques, jusqu'à quel point cette hypothèse de désordre, de comportement statistique, entre en jeu.

DP : En ce qui concerne quelque chose comme le ferromagnétisme, le système de mécanique quantique a donné lieu à un ordre macroscopique. Est-on alors dans le vrai si on dit qu'un système de mécanique quantique a en fait brisé sa propre symétrie et si on passe alors à une variable classique, sans aucune discussion sur un appareil de mesure, ou quoi que ce soit d'extérieur au système ?

WH : Considérons un ferromagnétisme comme isolé du reste du monde pendant un certain temps, puis demandons-nous quel est l'état le plus bas du système. Nous trouvons, par des calculs de mécanique quantique, que l'état le plus bas est celui dans lequel tout le système a une très grande composante d'impulsion magnétique. Si nous demandons ensuite "qu'observons-nous quand on considère ce système?", on voit qu'il est pratique d'attribuer la variable classique "moment magnétique" au système. Afin que nous puissions utiliser des termes classiques pour décrire ce comportement de mécanique quantique. Mais ce n'est pas vraiment un problème d'observation, seulement un problème sur la manière dont l'état le plus bas du système est défini.

PB : Comment la mécanique quantique gère-t-elle l'écoulement du temps ou est-ce qu'elle dit quoi que ce soit à ce propos ?

WH : Il faudrait que je répète ce que C. von Weizsäcker dit dans ses papiers : le temps est la condition préalable de la mécanique quantique, parce que nous voulons passer d'une expérience à l'autre, c'est-à-dire d'un moment à un autre. Mais c'est trop compliqué pour entrer dans les détails. Je dirais simplement que le concept de temps est vraiment une condition préalable de la théorie

quantique.

PB : Dans le domaine où la mécanique quantique fonctionne, toutes les équations sont réversibles par rapport au temps, à l'exception d'une expérience je crois. Le temps a donc plus à voir avec les systèmes classiques macroscopiques qu'avec les systèmes quantiques microscopiques.

WH : Je dirais que l'irréversibilité du temps intervient dans ces autres systèmes, avec ces problèmes que I. Prigogine décrit dans ses papiers, et est certainement extrêmement importante pour l'application macroscopique de la théorie quantique, et aussi pour la biologie, bien sûr.

DP : Pouvons-nous parler d'une théorie nouvelle parmi les vôtres, la théorie non linéaire des particules élémentaires ? Allez-vous finalement introduire des choses comme la gravitation dans cette théorie, et passer à un modèle dans lequel espace et temps émergent ?

WH : Encore une fois, nous avons une situation similaire à celle du ferromagnétisme. Nous essayons de résoudre les équations de la mécanique quantique, ou de la théorie quantique, mais on voit que le système acquiert des propriétés qui peuvent alors être décrites par le formalisme classique (par exemple, comme parler du moment, etc.). Nous espérons que de tels phénomènes que le rayonnement électromagnétique et la gravitation peuvent également sortir de la théorie des particules élémentaires, et nous avons des raisons de penser qu'il en est ainsi.

DP : L'idée de symétrie est une partie très importante de votre théorie.

WH : Commençons plus simplement en parlant de la mécanique quantique, sans tenir compte pour l'instant des difficultés de la physique élémentaire des particules. Dans la mécanique quantique, nous voyons que les corps macroscopiques ont des propriétés très compliquées, des formes complexes et un comportement chimique et bientôt, en considérant des particules de plus en plus petites, nous arrivons enfin à des objets qui sont vraiment beaucoup plus simples, par exemple les états stationnaires d'un atome d'hydrogène. Nous décrivons ses propriétés en disant que ces états sont des représentations des symétries fondamentales, comme la rotation dans l'espace. Alors, quand nous décrivons un système en écrivant quelques nombres quantiques (dans les atomes d'hydrogène, nous avons le principal nombre quantique et le nombre de moment cinétique), cela signifie que nous ne savons rien sauf dire que cet objet est une représentation de symétries. Les nombres quantiques nous disent quel genre de symétries nous entendons par là ; les nombres eux-mêmes disent que cet objet a ces propriétés. Ainsi, quand nous arrivons aux plus petits objets dans le monde, nous les caractérisons en mécanique quantique simplement par leur symétrie, ou comme représentations de symétries, et non en spécifiant des propriétés telles que la forme ou la taille.

DP : Il y a des symétries qui ne sont liées à aucune opération dans le monde, par exemple, des symétries telles que l'isospin. Quel sens ont-elles ? Pensez-vous qu'elles sont liées finalement aux propriétés de l'espace et du temps ?

WH : Je soupçonne que l'isospin est une symétrie similaire à l'espace et au temps. Je ne peux pas dire qu'il est lié à eux. Je dirais qu'il y a un certain nombre de symétries fondamentales dans ce monde qui peuvent à l'avenir être réduites à quelque chose d'encore plus simple, mais jusqu'ici

nous devons les prendre comme données, en conséquence de nos expériences. L'une des symétries les plus fondamentales est la symétrie du groupe de Lorentz, c'est-à-dire de l'espace et du temps, puis il y a les groupes d'isospin, les groupes d'échelle, etc. Il y a donc un certain nombre de groupes qui sont fondamentaux dans le sens où en décrivant les plus petites particules, nous nous référons à leur comportement et à leurs transformations.

L'idée est que l'on peut distinguer d'une part une loi naturelle, une loi fondamentale, qui détermine par exemple un spectre de particules élémentaires, et d'autre part, le comportement général du cosmos, qui est peut-être quelque chose qui ne passe pas par cette loi. Je pourrais vous rappeler, par exemple, les équations de la gravitation d'Einstein. Einstein a écrit ses équations de terrain et a pensé que les champs gravitationnels sont toujours déterminés par eux. Mais le cosmos n'est pas déterminé sans ambiguïté par ces équations de champ, bien qu'il existe plusieurs modèles du cosmos qui soient compatibles avec elles. Dans le même sens, je voudrais dire qu'il existe une loi naturelle sous-jacente qui détermine le spectre des particules élémentaires, mais la forme du cosmos n'est pas déterminée sans ambiguïté par cette loi. Logiquement, il serait possible d'avoir divers types de cosmos qui sont en accord avec elle. Cependant, si un certain modèle cosmologique a été "choisi", alors ce modèle, bien sûr, a quelques conséquences sur le spectre des particules élémentaires.

DP : Êtes-vous en train de dire qu'il existe des lois qui existent indépendantes ou hors de l'univers, à l'extérieur du monde, et que la réalité casse, ou que la réalité brise la symétrie représentée par les lois ?

WH : "Lois" signifie simplement que certaines de ces symétries sont inhérentes soit à la nature, soit à notre observation de la nature. Vous connaissez peut-être les tentatives de Weizsäcker, qui a essayé de dériver ces lois simplement de la logique. Nous devons utiliser la langue pour arriver à des conclusions, étudier des alternatives, et il se demande si à partir des seules alternatives nous pouvons arriver à ces symétries. Je ne sais pas si ses tentatives réussissent ou non. En physique, on ne peut travailler qu'avec l'hypothèse que nous avons des lois naturelles. Si nous n'avons pas de lois naturelles, alors tout peut arriver, et nous ne pouvons décrire ce que nous voyons, et c'est tout.

DP : Une autre caractéristique de votre théorie qui semble aller à contre-courant de la tendance actuelle - partons et quarks, etc. - c'est que vous semblez ressentir qu'aucune particule n'est plus élémentaire qu'une autre.

WH : Même si des quarks doivent être trouvés (et je ne crois pas qu'ils le seront), ils ne seront pas plus élémentaires que les autres particules, puisqu'un quark pourrait être considéré comme composé de deux quarks et un anti-quark, et ainsi de suite. Je pense que nous avons appris d'expériences qu'en arrivant à des unités de plus en plus petites, nous n'aboutissons pas à des unités fondamentales, ou à des unités indivisibles, mais nous aboutissons à un point où la division n'a aucun sens. Ceci est le résultat des expériences des vingt dernières années, et je crains que certains physiciens ignorent tout simplement ce fait expérimental.

DP : Il semblerait donc que les particules élémentaires ne soient que des représentations de symétries. Diriez-vous que ce ne sont pas des choses fondamentales elles-mêmes, ou "éléments constitutifs de l'univers", pour utiliser la manière ancienne de parler ?

WH : Encore une fois, la difficulté réside dans le sens des mots. Des mots comme des blocs de construction ou vraiment existant sont trop indéfinis dans leur sens, donc j'hésiterais à répondre à vos questions, car la réponse dépendrait des définitions du mot.

DP : Pour être plus précis, pourrait-on finalement avoir une description de la nature qui ne nécessiterait que des particules élémentaires ou, en variante, une description dans laquelle les particules élémentaires seraient définies en fonction du reste de l'univers ? Ou n'y a-t-il pas de point de départ, car il n'y a aucun axiome sur lequel on puisse construire toute la physique ?

WH : Non. Même si, par exemple, cette formule que Pauli et moi avons écrite il y a cinquante ans s'est avérée être la formulation correcte pour le spectre de particules élémentaires, ce n'est certainement pas la base pour toute la physique. La physique ne peut jamais être fermée, ou terminée, de sorte que nous devons nous tourner vers la biologie ou de telles choses. Ce que nous pouvons espérer, je pense, c'est que nous pouvons obtenir une explication du spectre de particules élémentaires, et avec lui également une explication de l'électromagnétisme et de la gravitation, dans le même sens que nous obtenons une explication du spectre d'une grosse molécule par l'équation de Schrödinger.

Cela ne signifie pas que la physique est arrivée à une fin. Cela signifie que, par exemple, à la frontière entre physique et biologie peuvent se trouver de nouvelles fonctionnalités auxquelles on n'a pas pensé en physique et en chimie. Quelque chose de tout nouveau peut arriver lorsqu'on essaiera d'utiliser la théorie quantique dans le domaine de la biologie. Par conséquent, je critique ces formulations qui impliquent la fin de la physique.

DP : Est-il possible de réduire la physique ou tout élément de physique à des axiomes purement logiques ?

WH : Je dirais que certaines parties de la physique peuvent toujours être réduites aux mathématiques logiques ou aux schémas mathématiques. Cela a été possible pour la physique newtonienne, pour la mécanique quantique, et ainsi de suite, donc je ne doute pas que ce sera aussi possible pour le monde des particules élémentaires. En astrophysique aujourd'hui, on tombe sur les pulsars et les trous noirs, deux régions dans lesquelles la gravitation devient énorme, et peut-être une force plus forte que toutes les autres forces. Je pourrais bien imaginer que dans de tels trous noirs, par exemple (s'ils existent), le spectre des particules élémentaires soit assez différent du spectre que nous avons actuellement. Dans les trous noirs, alors, nous aurions une nouvelle zone de la physique, dans une certaine mesure séparée de cette partie que nous appelons maintenant la physique des particules élémentaires. Il y aurait des connexions, et on aurait à étudier comment passer de l'une à l'autre ; mais je ne crois pas à la fin de la physique.

DÉTERMINANTS DE COHOMOLOGIE ET LOIS DE RÉCIPROCITÉ :
LE CAS DES CORPS DE NOMBRES

M. KAPRANOV, A. SMIRNOV

Les analogies entre les corps de nombres et les corps de fonctions ont été depuis longtemps une source d'inspiration en arithmétique. Pourtant, l'un des problèmes les plus intrigants de cette approche, notamment le problème du point absolu, est toujours loin d'être compris d'une façon satisfaisante. Le schéma $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, l'objet final dans la catégorie des schémas, a pour dimension 1 par rapport à la topologie de Zariski et au moins 3 par rapport à la topologie étale. Ceci a engendré de longue date un désir d'introduire un objet plus mythique P , le "point absolu", avec un morphisme naturel $\pi_X : X \rightarrow P$ donné pour tout schéma arithmétique X de telle façon que les invariants globaux de X aient une interprétation en fonction d'une version de l'image directe en ce qui concerne π_X . Ce problème fait intervenir également la question de la compactification, puisque même un schéma propre sur \mathbb{Z} est encore non-compact à l'infini arithmétique.

Une théorie qui a traité ces problèmes avec succès est la géométrie d'Arakelov [...]. Les compactifications qu'elle fournit font intervenir des métriques riemaniennes dans les ensembles des points réels des schémas arithmétiques, et les invariants cohomologiques ont la forme de volumes de domaines fondamentaux de certains réseaux (donnés par l'image directe vers $\text{Spec}(\mathbb{Z})$) en ce qui concerne les formes venant des métriques. Le volume d'un corps convexe est le terme dominant de l'asymptote du nombre de points entiers de ses dilatations. Donc l'analogue des invariants de type Arakelov dans la situation plus géométrique est le terme dominant du polynôme de Hilbert d'un faisceau cohérent, qui décrit l'asymptote de la dimension de l'espace des sections d'ordre croissant des pôles à l'infini.

Par conséquent, la sortie de la théorie d'Arakelov est essentiellement archimédienne, ayant à voir avec l'asymptote de certains entiers parmi les nombres réels.

Dans le présent article, nous aimerions initier une approche différente du problème des invariants cohomologiques "absolus" qui pourrait être appelée géométrie d'Arakelov modulo n . Décrivons-en les idées principales.

D'abord, c'est une ancienne idée d'interpréter la combinatoire des ensembles finis comme la limite lorsque $q \rightarrow 1$ de l'algèbre linéaire sur les corps finis \mathbb{F}_q . Cela a amené à de fréquentes considérations sur l'objet folklorique \mathbb{F}_1 , le "corps à un élément", dont les espaces vectoriels sont juste les ensembles. On peut postuler, bien sûr, que $\text{Spec}(\mathbb{F}_1)$ est le point absolu, mais le problème réel est de développer les conséquences non triviales de ce point de vue.

Dans [...], la droite affine sur \mathbb{F}_1 a été considérée ; elle est constituée formellement de 0 et de toutes les racines de l'unité. Mis un peu différemment, cela amène à la considération des "extensions algébriques" de \mathbb{F}_1 . Par analogie avec les corps finis authentiques, on aimerait penser qu'il y a exactement une telle extension de n'importe quel degré donné n , dénotons-la \mathbb{F}_{1^n} . Bien sûr, \mathbb{F}_{1^n} n'existe pas dans un sens rigoureux, mais on peut penser que si un schéma X contient les racines n -ièmes de l'unité, alors il est défini sur \mathbb{F}_{1^n} , de telle façon qu'on a un morphisme

$$(1) \quad p_X : X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{F}_{1^n}).$$

Le point de vue qu'adjoindre les racines de l'unité est analogue à l'extension d'un corps de base remonte au moins à Weil (Lettre à Artin, Œuvres, vol.1) et Iwasawa [...].

L'objectif de la "géométrie d'Arakelov modulo n " que nous proposons, est de donner du sens aux invariants cohomologiques obtenus via l'image directe du morphisme (1). L'un des plus intéressants parmi de tels invariants est le déterminant de la cohomologie, $\det(Rp_{X*}(\mathcal{F}))$ pour un faisceau cohérent \mathcal{F} sur X . Dans le cas géométrique, le problème du calcul de ce déterminant, comme foncteur de \mathcal{F} , contient le problème de Riemann-Roch. Dans notre cas, les espaces vectoriels sur \mathbb{F}_{1^n} sont les ensembles avec une action libre du groupe μ_n des racines n -ièmes de l'unité, et il est possible de développer le formalisme du déterminant (voir section 1 ci-dessous). Le problème correspondant de Riemann-Roch fait intervenir non pas des volumes, mais plutôt des résidus modulo n des nombres de points entiers dans certains polyèdres. Les analogues des images directes des classes de Chern (i.e. les torseurs de Deligne $\langle L, M \rangle$) font intervenir des symboles résiduels puissance n , et la bonne définition de notre formalisme de détermination entraîne une démonstration très naturelle de la loi de réciprocité pour ces symboles. En fait, certaines approches modernes de la loi de réciprocité, comme celle de Kubota [...], peuvent être vues comme traitant implicitement l'algèbre linéaire sur \mathbb{F}_{1^n} , en construisant des bases spéciales, etc. On utilise certaines idées de Kubota pour développer une théorie de "compactification d'Arakelov" des gerbes de vecteurs sur les courbes arithmétiques ; de façon similaire à la procédure standard, notre compactification fait intervenir certains domaines dans $M \otimes \mathbb{R}$, où M est un module sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres, mais dans notre cas, les domaines sont de nature polyédrale et ils se comportent bien par rapport au comptage de points modulo n dans leurs dilatations.

On ne sait pas encore clairement comment formuler l'analogie correcte du théorème de Riemann-Roch ; ce qui est certain, c'est que cela devrait être une assertion reliant les résidus modulo n du nombre de points entiers dans un polyèdre avec des symboles résiduels de puissance n . Plusieurs assertions de cette sorte sont connues, à commencer par la démonstration géométrique de Gauss de la loi de réciprocité quadratique.

Détaillons maintenant le contenu de notre article plus avant. Dans la section 1 on discute avec quelques détails le formalisme des corps absolus (extensions algébriques de \mathbb{F}_1), algèbre linéaire sur de tels corps, théorie des déterminants et torseurs de détermination.

Dans la section 2 on développe les rudiments de l'algèbre homologique sur les corps absolus, qui nous sera nécessaire. En particulier, on étudie les analogues des séquences exactes. Tout ce formalisme est adapté pour considérer les invariants (comme la dimension) modulo n .

Dans la section 3 on définit les invariants cohomologiques des courbes arithmétiques qui sont, informellement, reliés aux faisceaux constructibles plutôt qu'aux faisceaux cohérents. Cela ne nécessite pas de compactification, mais cela nécessite de travailler avec des structures de niveau N . En particulier, on définit les "torseurs résultants" $\langle L, M \rangle$ pour les gerbes à deux droites avec structure de niveau. L'existence d'une bonne théorie de tels torseurs est équivalente à la loi de réciprocité dans la théorie des corps de classes. Nous traçons également avec quelques détails l'analogie entre la théorie des corps de classes et la théorie des nœuds et liens dans le 3-espace.

En section 4 on construit une théorie des “compactifications modulo n ” des courbes arithmétiques. En particulier, on construit la cohomologie d’un faisceau (cohérent) sur la courbe compactifiée. Ce sont, bien sûr, des espaces vectoriels sur le corps absolu. Notre approche utilise, de façon cruciale, la notion de ce qu’on appelle le “domaine cohomologique”, un certain concept technique dont le rôle est de nous assurer que la cohomologie, comme nous la définissons, se comporte de la façon attendue selon l’échange avec un faisceau très ample. Ceci est fait dans la section 5 dans un autre document.

1. Corps absolus.

1.1. Le “corps” \mathbb{F}_1 .

Rappelons brièvement l’imagerie folklorique associée à \mathbb{F}_1 , le corps (inexistant) à un élément.

Un espace vectoriel sur \mathbb{F}_1 est juste un ensemble ; la dimension d’un tel espace vectoriel est le cardinal de l’ensemble. Le groupe linéaire général $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_1)$ est le groupe symétrique S_n . L’analogie du déterminant $\det : \mathrm{GL}_n(F) \rightarrow F^*$ pour $F = \mathbb{F}_1$ est l’homomorphisme signe $\mathrm{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$. Le groupe linéaire spécial $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_1)$ est juste le groupe alterné A_n .

Par conséquent, l’algèbre linéaire sur \mathbb{F}_1 est la même que la combinatoire des ensembles (finis). Par exemple, si X est un tel ensemble, $|X| = n$, alors on devrait penser aux sous-ensembles à k éléments dans X comme à des sous-espaces vectoriels k -dimensionnels et à X comme à un \mathbb{F}_1 -espace vectoriel. Leur nombre, $\binom{n}{k}$ est égal à la limite pour $q \rightarrow 1$ des cardinaux des $G(k, n)(\mathbb{F}_q)$, les variétés effectives de Grassmann sur les corps effectifs \mathbb{F}_q .

1.2 Anneaux de polynômes sur \mathbb{F}_1 .

En plus du “corps” \mathbb{F}_1 , on peut souhaiter avoir l’“anneau” de polynômes $\mathbb{F}_1[t]$. Bien qu’un tel anneau n’existe pas non plus, on peut dire quelque chose à propos des objets qui lui sont reliés.

Le groupe $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_1[t])$ est le groupe de tresses complet B_d sur les d chaînes. On doit penser à l’homomorphisme canonique $f : B_d \rightarrow S_d$ comme à la limite lorsque $q \rightarrow 1$ des homomorphismes d’évaluation

$$\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q[t]) \rightarrow \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q), \quad A(t) \mapsto A(0).$$

Le sous-groupe $P_d = \mathrm{Ker}(f)$, appelé groupe de tresses pur, est ainsi l’analogie du sous-groupe de congruence $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q[t], t)$.

Ce point de vue peut être justifié comme suit. Le groupe B_d est le groupe fondamental de l’espace \mathbb{C}_0^d des polynômes complexes $x^d + a_1 x^{d-1} + \dots + a_d$ sans racine multiple, et, de façon correspondante, le sous-groupe P_n est le groupe fondamental de l’espace

$$\mathbb{C}_*^d = \mathbb{C}^d - \bigcup_{i \neq j} \{(x_1, \dots, x_d) : x_i = x_j\}.$$

Soit maintenant F un corps algébriquement clos contenant \mathbb{F}_q . Le groupe $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ agit sur l'espace

$$F_*^d = F^d - \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{F}_q^d - \{0\}} \left\{ (x_1, \dots, x_d) : \sum \alpha_i x_i = 0 \right\},$$

et le quotient est identifié à l'espace des q -polynômes

$$x^{q^d} + a_1 x^{q^{d-1}} + \dots + a_{d-1} x^q + a_d x, \quad a_d \neq 0.$$

Pour tout $N \in \mathbb{F}_q[t]$, $N = \sum b_i t^i$, Drinfeld a construit un recouvrement non ramifié de $F_*^d / \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ avec le groupe de Galois $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q[t]/N)$. C'est l'espace des modules des $\mathbb{F}_q[t]$ -modules elliptiques de rang d avec une structure de niveau N , voir [...]. Donc la complétion profinie de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q[t])$ est plongée dans le groupe fondamental de l'espace des q -polynômes.

(1.3) Extensions algébriques de \mathbb{F}_1 . Puisqu'on pense à \mathbb{F}_1 comme à un "corps", on aimerait considérer ses extensions finies. Il est naturel de penser, par analogie avec les véritables corps finis, que pour tout n on a une telle extension de degré n . Dénotons-la par \mathbb{F}_{1^n} . On pense à \mathbb{F}_{1^n} comme contenant zéro et à μ_n , comme à l'ensemble de toutes les racines de l'unité d'ordre n . On peut, si on le souhaite, dire que \mathbb{F}_{1^n} est le monoïde $\{0\} \cup \mu_n$.

De façon équivalente, on introduit la droite affine sur \mathbb{F}_1 , qui est constituée de 0 et des racines de l'unité de tous les ordres. Ainsi comme un ensemble elle est identifiée à la "clôture algébrique" de \mathbb{F}_1 . Aussi, la droite affine devrait être regardée comme le spectre de l'anneau inexistant $\mathbb{F}_1[t]$. Pour l'analogie de l'application d'évaluation à partir du groupe de tresses correspondant à un point de la droite affine, voir le §1.4 ci-dessous.

On regarde \mathbb{F}_1 comme le point absolu de la catégorie des schémas, de telle façon que tout schéma est défini sur \mathbb{F}_1 . On dit qu'un schéma X est défini sur \mathbb{F}_{1^n} , si l'anneau des fonctions régulières sur X contient les racines n -ièmes de 1. Ceci est en accord avec la théorie d'Iwasawa [...] dans laquelle l'addition des racines de l'unité à un nombre remplace l'extension du corps de base pour une courbe.

(1.4) Algèbre linéaire sur \mathbb{F}_{1^n} . Étendons le formalisme de (1.1) aux extensions algébriques de \mathbb{F}_{1^n} . Un espace vectoriel sur \mathbb{F}_{1^n} est un ensemble pointé $(V, 0 \in V)$ avec une action du groupe μ_n libre sur $V - \{0\}$. L'élément 0 est laissé fixe par l'action. Son ajout est vraiment optionnel ; il sert à ce que les constructions standards avec les espaces vectoriels sonnent d'une façon qui soit plus familière. Également, il est toujours présent dans les exemples naturels. Pour un espace vectoriel V sur \mathbb{F}_{1^n} , on dénote par \tilde{V} l'ensemble $V - \{0\}$.

Une application linéaire $V \rightarrow W$ est juste une application de μ_n -ensembles.

Une *base* d'un espace vectoriel V est, par définition, un sous-ensemble $B \in \tilde{V}$ tel que tout μ_n -orbite contient un unique élément de B . La dimension de V est la cardinalité de n'importe quelle base, i.e. la cardinalité de \tilde{V}/μ_n .

Le groupe général linéaire $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_{1^n})$ est le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel de dimension d ; c'est juste le produit en couronne de S_d et $(\mu_n)^d$. On peut le voir comme le groupe

de matrices de taille d sur d qui contient exactement un élément non nul dans chaque ligne et dans chaque colonne, et cet élément est une racine de l'unité de μ_n . Étant donnée une racine de l'unité $\epsilon \in \mu_n$, on a l'“application d'évaluation”

$$f_\epsilon : B_d = \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_1[t]) \rightarrow \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_{1^n})$$

décrite comme suit. Rappelons que B_d est engendré par les éléments $\sigma_i, i = 1, \dots, d-1$ avec les relations

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2.$$

L'application f_ϵ est définie par la condition

$$f_\epsilon(\sigma_i) = 1_{i-1} \oplus 1_{n-i-1},$$

où l'on dénote par 1_i la matrice unité de taille i par i , et où \oplus représente la somme directe de matrices (diagonales par blocs).

La catégorie des \mathbb{F}_{1^n} -espaces vectoriels est équipée des opérations de somme directe $V \vee W$ et de smash produit $V \wedge W$. Par définition, $V \vee W$ est obtenu à partir de l'union disjointe $V \amalg W$ en identifiant les éléments nuls, et $V \wedge W$ est obtenu à partir du produit cartésien $V \times W$ en identifiant $(V \times 0) \cup (0 \times W)$ avec 0 . Ainsi, après avoir ignoré les éléments nuls, les opérations \vee, \wedge correspondent à l'union disjointe et au produit cartésien de μ_n -ensembles libres.

On introduit également le produit tensoriel $V \otimes W$ comme le quotient de $V \wedge W$ par l'action anti-diagonale de μ_n , i.e. par l'identification $x \wedge y = \epsilon x \wedge \epsilon^{-1} y$. Dénotons par $x \otimes y$ l'image de $x \wedge y$ dans $V \otimes W$ et équipons $V \otimes W$ avec la μ_n -action par la règle $\epsilon(x \otimes y) = (\epsilon x) \otimes y = x \otimes (\epsilon y)$. Il est clair que

$$\dim(V \vee W) = \dim(V) + \dim(W), \quad \dim(V \otimes W) = \dim(V) \times \dim(W).$$

(1.5) Déterminants. Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{Z}_1 , et $A : V \rightarrow V$ son automorphisme. Son déterminant $\det(A)$ est défini comme suit. Choisissons n'importe quelle base e_1, \dots, e_d de V , de telle façon que $A(e_i) = \alpha_i e_{\sigma(i)}$ pour une certaine permutation $\sigma \in S_d$ et certaines racines de l'unité $\alpha_i \in \mu_n$. Alors, par définition, $\det(A) = \prod \alpha_i$. On vérifie aisément l'égalité $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ qui implique que $\det(A)$ est indépendante du choix de la base.

Notons l'absence de signe moins dans notre définition du déterminant. Nous donnerons une explication de cela ultérieurement. Maintenant fournissons deux exemples justifiant notre choix.

1.2.1. Proposition. *Proposition (1.6).* Soit $n = 2$ et soit V un \mathbb{F}_{1^2} -espace vectoriel, alors V est un ensemble avec involution libre. Soit $d = \dim(V)$ et $A : V \rightarrow V$ un automorphisme. Alors $\det(A) \in \mu_2 = \{\pm 1\}$ coïncide avec le signe de la permutation $\tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ des $2d$ éléments de \tilde{V} donnés par A .

(1.7) Symbole des résidus de puissance comme déterminant. Soit q une puissance de nombre premier et \mathbb{F}_q , un corps fini à q éléments. Supposons que $q \cong 1 \pmod{n}$. Alors \mathbb{F}_q contient

les racines n -ièmes de 1, et on identifie μ_n avec le sous-groupe dans \mathbb{F}_q^* . Alors pour tout $a \in \mathbb{F}_q^*$ on a le symbole des résidus de puissance

$$\left(\frac{a}{\mathbb{F}_q}\right)_n = a^{\frac{q-1}{n}} \in \mu_n.$$

D'un autre côté, le plongement $\mu_n \mathbb{1}_{\mathbb{F}_q^*}$ fait de \mathbb{F}_q un espace vectoriel sur \mathbb{F}_{1^n} au sens défini ci-dessus. La multiplication par a est un automorphisme de cet espace. Le fait suivant est une version d'un lemme classique de Gauss.

1.2.2. Proposition. *Proposition (1.8).* Le symbole résiduel de n -ième puissance $\left(\frac{a}{\mathbb{F}_q}\right)_n$ est égal au déterminant de la multiplication par a .

On laisse la preuve au lecteur.

(1.9) Espaces de détermination et puissances extérieures. Soit A n'importe quel groupe abélien, avec une opération écrite multiplicativement. La catégorie des A -torseurs (espaces principaux homogènes) sur A a une structure naturelle de monoïde que l'on dénote \otimes . Explicitement, si T, S sont des A -torseurs, alors $T \otimes S$ est engendré par les symboles $t \otimes s$ avec $t \in T, s \in S$ vérifiant les relations $(at) \otimes s = t \otimes (as)$. L'opération \otimes est trivialement commutative et associative au sens où nous avons des isomorphismes naturels. Quand A est le groupe multiplicatif d'un corps F , alors l'opération correspond au produit tensoriel de F -espaces vectoriels de dimension 1.

Soit maintenant V un espace vectoriel de dimension d sur \mathbb{F}_{1^n} . Alors \tilde{V} est l'union des μ_n -orbites, chacune étant un μ_n -torseur. On définit l'espace déterminant $\det(V)$ comme l'union de zéro et du \otimes -produit de tous ces toseurs:

$$\det(V) = \{0\} \cup \bigotimes_{T \in \tilde{V}/\mu_n} T.$$

Il est clair que pour un automorphisme $f : V \rightarrow V$, son déterminant $\det(f)$ est juste l'application induite $\det(V) \rightarrow \det(V)$.

Notons, en particulier, que pour tout $\epsilon \in \mu_n$, la multiplication par ϵ définit un isomorphisme de $V \rightarrow V$, et son déterminant, qui est une application de $\det(V) \rightarrow \det(V)$, est la multiplication par $\epsilon^{\dim(V)}$. Ainsi \det en tant que foncteur retrouve les dimensions des \mathbb{F}_{1^n} -espaces vectoriels pris modulo n . Ultérieurement, on considérera la dimension modulo n comme l'invariant de base d'un espace vectoriel (voir §2).

Plus généralement, pour tout $k \leq d$, on définit la k -ième puissance extérieure $\bigwedge^k V$ comme suit :

$$\bigwedge^k V = \{0\} \cup \coprod_{I \subset \tilde{V}/\mu_n, |I|=k} \bigotimes_{T \in I} T.$$

Il est pratique de faire l'algèbre tensorielle d'une façon un peu plus systématique. Fixons l'action suivante du groupe symétrique S_k sur $V^{\otimes k}$:

$$\sigma(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(k)}$$

Alors $\bigwedge^k V$ s'obtient à partir du quotient $V^{\otimes k}/S_k$ en identifiant à 0 tout élément $x_1 \otimes \dots \otimes x_k$ dans lequel certains des x_i, x_j sont proportionnels (avec un coefficient de proportionnalité étant dans μ_n). On dénote par $x_1 \wedge \dots \wedge x_k$ l'image de $x_1 \otimes \dots \otimes x_k$ dans $\bigwedge^k V$.

Une autre justification encore pour l'absence de signes dans notre théorie déterminante est donnée par le fait suivant :

1.2.3. Proposition. *Proposition (1.10).* Soit q une puissance de nombre premier, \mathbb{F}_q un corps à q éléments et $n = q - 1$. Identifions μ_n à \mathbb{F}_q^* . Soit V un espace \mathbb{F}_q -vectoriel quelconque. Alors le déterminant de V regardé comme un espace \mathbb{F}_{1^n} -vectoriel est identifié à la puissance extérieure supérieure standard de V regardé comme un espace \mathbb{F}_q -vectoriel (l'identification étant équivariante par rapport au groupe $\text{Aut}_{\mathbb{F}_q}(V)$).

En particulier, pour tout automorphisme \mathbb{F}_q -linéaire $f : V \rightarrow V$, les deux définitions possibles du déterminant de f coïncident.

Preuve. Au vu de notre définition du déterminant sur \mathbb{F}_{1^n} , notre assertion revient à une assertion d'algèbre \mathbb{F}_q -linéaire pure qui peut être énoncée comme l'existence d'un isomorphisme naturel

$$(1.11) \quad \det_{\mathbb{F}_q}(V) \rightarrow \bigotimes_{L \in P(V)} L,$$

où l'on a du côté droit le produit tensoriel (ordinaire) de tous les sous-espaces 1-dimensionnels \mathbb{F}_q -vectoriels dans V . $P(V)$ dénote la projectivisation de V .

Par définition, le côté droit de (1.11) est engendré par les éléments $x_\phi = \bigotimes_{L \in P(V)} \phi(L)$ pour toutes les sections ϕ de la projection naturelle $V - \{0\} \rightarrow P(V)$. Si ϕ, ψ sont deux tels éléments, alors on a

$$x_\psi = \left(\prod_{L \in P(V)} \frac{\psi(L)}{\phi(L)} \right) x_\phi.$$

D'un autre côté, l'espace $\det_{\mathbb{F}_q}(V)$ est étendu par les symboles $v_1 \wedge \dots \wedge v_d$, pour toutes les bases v_1, \dots, v_d de V avec les relations standards d'antisymétrie et de multi-linéarité. On définit maintenant une application $\det_{\mathbb{F}_q}(V) \rightarrow \det_{\mathbb{F}_{1^n}}(V)$ comme suit :

Soit v_1, \dots, v_d une base de V . Considérons le système suivant de représentants de la \mathbb{F}_q^* -action sur $V - \{0\}$: en d'autres termes, ceci est l'élévation naturelle vers $V - \{0\}$ de la décomposition cellulaire de $P(V)$ associée à la base v_1, \dots, v_d .

1.2.4. Lemme. *Lemme (1.12).* L'élément $x(v_1, \dots, v_d) \in \bigotimes_{L \in P(V)} L$ donné par le produit tensoriel de l'ensemble des représentants qui vient d'être construit dépend de v_1, \dots, v_d d'une façon anti-symétrique et multilinéaire.

Preuve. (a) Antisymétrie : Supposons qu'on échange v_i et v_{i+1} . Considérons d'abord pour simplifier le cas $i = 1$. Dénotons par P^l la projectivisation du \mathbb{F}_q -sous-espace dans V étendu par v_1, v_2 . Les éléments $x(v_{,1} v_1, \dots, v_d)$ et $x(v_2, v_1, \dots, v_d)$ diffèrent d'un facteur qui est le produit sur tous les

$L \in P^1$ des ratios des représentants de la première et de la seconde famille vivant dans L . Si $L = \mathbb{F}_q v_1$ ou $\mathbb{F}_q v_2$, alors les représentants correspondant sont les mêmes. Si L est étendu par $v_1 + av_2$ avec $a \in \mathbb{F}_q^*$, alors le ratio des deux représentants est égal à a^{-1} . Par conséquent

$$\frac{x(v_1, v_2, \dots, v_d)}{x(v_2, v_1, \dots, v_d)} = \prod_{a \in \mathbb{F}_q^*} a^{-1} = -1.$$

Dans le cas où on échange v_i et v_{i+1} , avec $i > 1$, on a essentiellement le même dessin mais directement multiplié par $(\mathbb{F}_q)^{i-1}$. Donc, le ratio des deux éléments de \det sera $(-1)^{q^{i-1}}$. Cette quantité est toujours égale à 1 dans le corps \mathbb{F}_q : si q est impair, alors on élève (-1) à une puissance impaire et on obtient (-1) , alors que si q est pair, alors $(-1)^q = 1$.

(b) Multilinéarité : il suffit de démontrer que, premièrement, $x(v_1, \dots, v_d)$ est inchangé par les transformations élémentaires, i.e. le remplacement de v_i par $v_i + \lambda v_j$ et, deuxièmement, la multiplication d'un des v_i par $\lambda \in \mathbb{F}_q$ multiplie $x(v_1, \dots, v_d)$ par λ . Pour prouver la première assertion, il suffit, par anti-symétrie, de considérer le cas $i = 2, j = 1$. Mais pour deux bases différant par une telle transformation, les ensembles correspondant de représentants sont les mêmes. Pour démontrer la seconde assertion, il suffit de multiplier v_1 par λ . Mais $x(\lambda v_1, v_2, \dots, v_d) = \lambda x(v_1, v_2, \dots, v_d)$ par définition. Le lemme 1.12 et la proposition 1.10 sont démontrés.

2 Algèbre homologique sur les corps absolus.

Dans cette section, on fixe un entier n , on dénote μ_n , le groupe des racines n -ièmes de 1, simplement par μ et on écrit simplement F plutôt que \mathbb{F}_{1^n} .

La catégorie des F -espaces de dimension finie sera dénotée par \mathcal{M} . Cette catégorie est non-linéaire, de telle façon que le remplacement naturel de l'algèbre homologique devrait être la théorie des catégories de modèles fermés de Quillen [...]. Pourtant, il semble que \mathcal{M} ne permet pas une structure de modèle fermé, et on définit seulement certains rudiments d'une telle structure.

(2.1) Cofibrations. Le rôle des cofibrations sera joué par les plongements des F -espaces. Si $f : V \hookrightarrow W$ est un tel plongement, on dénote par V/W le résultat de la contraction de V en 0. Occasionnellement, on traitera également les quotients des groupes abéliens (qui peuvent aussi être des F -espaces). Pour éviter la confusion, le quotient en théorie des groupes sera toujours dénoté par $\frac{W}{V}$.

Il est clair qu'on a un isomorphisme canonique

$$\det(V) \otimes \det(W/V) \rightarrow \det(W).$$

(2.2) Fibrations et équivalences. Soit $f : V \rightarrow W$ un morphisme d'espaces F -vectoriels. On dit que f est une fibration si pour chaque $w_1, w_2 \in W$ on a la congruence $|f^{-1}(w_1)| \equiv |f^{-1}(w_2)| \pmod{n}$.

On dit que f est une équivalence si $f^{-1}(0) = 0$ et pour tout $w \in W$ non nul, la cardinalité de $f^{-1}(w)$ est congrue à 1 modulo n . Par conséquent toute équivalence à notre sens est une fibration.

Clairement, si f est une équivalence, alors $\dim(V) \cong \dim(W) \pmod{n}$.

On dénote par \mathcal{M}^* la sous-catégorie de \mathcal{M} avec les mêmes objets que \mathcal{M} et des morphismes qui sont des équivalences.

2.0.5. Proposition. *Proposition (2.3).* Soit $f : V \rightarrow W$ une équivalence et $B = \{w_1, \dots, w_d\}$ une base de W . Alors $f^{-1}(B)$ est une base de V . De plus, la règle

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_d \mapsto \bigwedge_{v \in f^{-1}(B)} v$$

définit un isomorphisme de $\det(W) \rightarrow \det(V)$. Cet isomorphisme est indépendant du choix d'une base B .

On dénote par $\det(f) : \det(V) \rightarrow \det(W)$ l'isomorphisme inverse de celui construit dans la proposition 2.3.

Soit \mathcal{P} la catégorie des espaces F -vectoriels 1-dimensionnels. Alors \det est étendu vers un facteur covariant $\mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{P}$. Puisque tout morphisme dans \mathcal{P} est un isomorphisme, cela montre que la catégorie obtenue à partir de \mathcal{M}^* en inversant formellement tous les morphismes est non triviale.

2.0.6. Définition. *Définition (2.4).* Une séquence d'espaces F -vectoriels et de leurs morphismes

$$(2.4.1) \quad S = \left\{ 0 \rightarrow V' \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} V'' \rightarrow 0 \right\}$$

est dite exacte, si α est une injection en théorie des ensembles, la composition $\beta\alpha$ est égale à 0, et l'application de $V/\alpha(V')$ vers V'' induite par β , est une équivalence.

Il est clair que pour toute séquence exacte, on a

$$\dim(V) \equiv \dim(V') + \dim(V'') \pmod{n}.$$

(2.5) Exemples. (a) Pour tout V , l'application $(V \times F)/(0 \times F) \rightarrow V$ est une équivalence.

(b) Soit q une puissance de nombre premier, et n un diviseur de $q - 1$. Identifions $\mu = \mu_n$, avec le groupe des racines n -ièmes de l'unité à l'intérieur du corps fini \mathbb{F}_q . Alors tout espace \mathbb{F}_q -vectoriel devient un espace F -vectoriel, et toute séquence exacte courte d'espaces \mathbb{F}_q -vectoriels et d'opérateurs \mathbb{F}_q -linéaires est exacte au sens de la définition 2.3.

(2.6) Déterminants et séquences exactes. La catégorie \mathcal{P} des espaces vectoriels 1-dimensionnels et de leurs isomorphismes est naturellement une catégorie de Picard, i.e. une catégorie monoïdale symétrique avec tout objet fonctoriellement inversible. L'opération sur \mathcal{P} est donnée par le produit tensoriel \otimes (qui correspond au produit \odot sur les μ -torseurs).

Étant donnée une séquence exacte S comme dans (2.3.1), la functorialité de \det sur les équivalences donne un isomorphisme

$$\lambda_S : \det(V') \otimes \det(V'') \rightarrow \det(V)$$

qui est naturel selon les équivalences des séquences exactes courtes.

(2.7) Complexes exacts. Soit

$$0 \rightarrow V^0 \xrightarrow{d_0} V^1 \xrightarrow{d_1} V^2 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} V^n \rightarrow 0$$

une séquence d'espaces F -vectoriels et de leurs morphismes. Une telle séquence est appelée un complexe, si la composition $d_i \circ d_{i-1}$ est l'application zéro pour tout i . Une séquence est dite exacte si c'est un complexe et si pour tout i , la séquence

$$0 \rightarrow \text{Im}(d_{i-1}) \hookrightarrow V^i \xrightarrow{d_i} \text{Im}(d_i) \rightarrow 0$$

est exacte.

Pour tout F -espace valué $V^\bullet = (V^i, i \in \mathbb{Z})$, on définit

$$\det(V^\bullet) = \bigotimes \det(V^i)^{(-1)^i}.$$

En particulier, tout complexe donne un F -espace valué.

2.0.7. Proposition. *Proposition (2.8). Si $V^\bullet = (V^i, d_i)$ est un complexe exact, alors il y a une identification naturelle*

$$\text{Eu} : \det(V^\bullet) \rightarrow \mu.$$

Cet isomorphisme dépend des applications dans le complexe. On dénote par $\langle V^\bullet \rangle \in \det(V^\bullet)$ l'image inverse de $1 \in \mu$ par l'isomorphisme Eu .

3. Théorie des corps de classes et structures de niveaux.

(3.1) Un point de vue 3-dimensionnels sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Une partie considérable de la théorie des corps de classes peut être vue comme un analogue de la théorie des nœuds et des liens dans les 3-variétés.

Plus précisément, le spectre d'un corps fini \mathbb{F}_q peut naturellement être visualisé comme un cercle, parce que, similairement au cercle, il a une couverture non ramifiée connectée $\text{Spec}(\mathbb{F}_{q^m})$ pour tout $m \geq 1$. L'élément de Frobenius, générant $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ est représenté par la monodromie le long du cercle.

Soit maintenant K un corps de nombres, A son anneau d'entiers et $X = \text{Spec}(A)$. Alors il est naturel de voir X comme une variété 3-dimensionnelle. Les spectres des corps résiduels premiers de A peuvent ainsi être vus comme des cercles à l'intérieur de cette 3-variété qui peut être nouée, reliée, etc. Ce point de vue a été défendu par Y. Manin et B. Mazur. Il est en accord avec le fait que la dimension cohomologique étale de X est égale à 3, voir [...].

(3.2) Symboles de Legendre et nombres de liaison. Rappelons une des définitions du nombre de liaison. Soit M une 3-variété compacte et C, D deux cercles plongés dans M et ne s'intersectant pas. Supposons que C est homologue à 0. Alors il existe un recouvrement de Galois connecté

$\widetilde{M} \rightarrow M$, de groupe de Galois \mathbb{Z} ramifié le long de C . La monodromie le long de D dans ce recouvrement est par conséquent un entier (C, D) appelé nombre de liaison de C et D . Dans le cas où D est également homologue à 0, le nombre (D, C) est défini et on a

$$(3.2.1) \quad (D, C) = (C, D)$$

Si C est homologue à 0 modulo n , on peut, en utilisant des \mathbb{Z}/n -recouvrements, définir l'indice d'intersection modulo n .

Une autre définition, plus standard de (C, D) est le nombre d'intersections $(\sigma \cdot D)$ où σ est une 2-chaîne bornant C .

Maintenant le symbole de Legendre de la réciprocity quadratique est l'analogue arithmétique du nombre de liaison mod 2. Notamment, prenons $X = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ et soit $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier de la forme $4k + 1$. Alors le schéma \widetilde{X} , le spectre de l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, est un double recouvrement de X ramifié seulement en p . Si q est un autre nombre premier, alors le symbole de Legendre $\left(\frac{p}{q}\right)$ est l'élément de $\text{Gal}(X/X) = \{\pm 1\}$ correspondant au Frobenius en q , i.e. correspondant dans notre visualisation à la monodromie le long du cercle $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)1X$. Ainsi $\left(\frac{p}{q}\right)$ peut être vu comme le nombre de liaison des "cercles" $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)$ dans la "3-variété" $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Si à la fois p, q sont de la forme $4k + 1$, alors la loi de réciprocity de Gauss montre que $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ qui est l'analogue de (3.2.1).

Si, cependant, $p = 4k + 3$, alors il n'y a pas de recouvrement de X ramifié seulement en p (en prenant \sqrt{p} on obtient une ramification en p et en 2, alors qu'en prenant $\sqrt{-p}$ on obtient une ramification en p et en $l'\infty$). Cela signifie que dans ce cas, $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)1\text{Spec}(\mathbb{Z})$ devrait être regardé comme un cercle non homologue à 0. Donc avant d'aller plus loin, discutons de la manière dont la notion de nombre de liaison se généralise à de tels cercles.

(3.3) Torseurs de liaison. Soit M n'importe quelle 3-variété. Il est possible d'associer à n'importe quelles deux classes d'homologie $c, d \in H_1(M, \mathbb{Z})$ un certain \mathbb{Z} -torseur $\langle c, d \rangle$ ayant les propriétés suivantes :

1. Il y a des isomorphismes naturels

$$\langle c + c', d \rangle \simeq \langle c, d \rangle \otimes \langle c', d \rangle, \quad \langle c, d + d' \rangle \simeq \langle c, d \rangle \otimes \langle c, d' \rangle, \quad \langle d, c \rangle = \langle c, d \rangle.$$

où \otimes est la structure monoïdale naturelle sur la catégorie des \mathbb{Z} -torseurs.

2. Si $c = 0$, alors $\langle c, d \rangle$ est identifié canoniquement à \mathbb{Z} .
3. Pour n'importe quelles sous-variétés 1-dimensionnelles orientées ne s'intersectant pas C, D dans M de classes d'homologie c et d , il y a un élément défini naturellement $(C, D) \in \langle c, d \rangle$, et ces éléments satisfont les propriétés :

$$(C + C', D) = (C, D) + (C', D), \quad (C, D + D') = (C, D) + (C, D'), \quad (C, D) = -(D, C).$$

4. Si C, C' sont deux cercles de la même classe d'homologie c , et si D est un cercle de classe d'homologie d , alors on a égalité entre les entiers

$$(C, D) - (C', D) = (\sigma \cdot D),$$

où l'entier sur la gauche est la différence de deux éléments du \mathbb{Z} -torseur $\langle c, d \rangle$ et où σ est une 2-chaîne telle que $\partial\sigma = C - C'$.

En fait, on peut définir $\langle c, d \rangle$ comme étant engendrés par les symboles (C, D) avec $C \in c, D \in d$ qui vérifient les relations de (4).

(3.4) Théorie des corps de classes. Soit K un corps de nombres contenant μ_n , le groupe des racines n -ièmes de l'unité, A son anneau d'entiers, $X = \text{Spec}(A)$. Ainsi, on peut voir X comme un schéma sur le corps absolu \mathbb{F}_{1^n} , voir §1.

La partie de la théorie des corps de classes pour F reliée aux extensions cycliques de degré n de F peut être reformulée d'une façon très similaire à (3.3).

Si N est un idéal de A , et L est un faisceau de droites sur X , on appelle structure de niveau N sur L une trivialisations de L modulo N plus le choix d'une direction (dite positive) dans la complétion L_v pour toute valuation réelle archimédienne v de K . (Puisqu'on suppose que K contient μ_n , les valuations réelles ne seront pas présentes si $n > 2$). Si f est une section rationnelle de L , on dit que $f \equiv 1 \pmod{N}$, si le diviseur de f est premier à N , l'image de f par l'application composée $L \rightarrow L/NL \rightarrow A/N$ est égale à 1, et l'image de f dans chaque L_v , où v est une valuation réelle, est positive (elle est dans la demi-droite distinguée).

3.0.8. Théorème. *Théorème (3.5). Il existe :*

1. un idéal $N \mid A$ s'étendant au-dessus de n .
2. une règle qui associe à deux fibrés en droites L, M sur X à structure de niveau N un toseur $\langle L, M \rangle$.
3. une règle qui associe à toutes les sections $l \in L, m \in M$ qui sont premières à 1 et congrues à 1 modulo N un élément $(l, m)_n \in \mu_n$ avec les propriétés suivantes :
4. Il y a des isomorphismes naturels

$$\langle L \otimes L', M \simeq \langle L, M \rangle \otimes \langle L', M \rangle, \quad \langle L, M \otimes M' \rangle \simeq \langle L, M \rangle \otimes \langle L, M' \rangle, \quad \langle M, L \rangle = \langle L, M \rangle,$$

5. Si $L = \mathcal{O}_X$ de structure de niveau N triviale, alors $\langle L, M \rangle$ est identifié canoniquement à μ_n .
6. On a les égalités $(l \otimes l', m)_n = (l, m)_n (l', m)_n$, and $(L, m \otimes m')_n = (l, m)_n (l, m')_n$.
7. (loi de réciprocité) : on a $(l, m)_n = (m, l)_n$.

8. Si f est un élément de A congru à 1 modulo N , alors pour tout M et toute section $m \in M, m \equiv 1 \pmod{N}$ première à f , alors l'élément $(f, m) \in (\mathcal{O}_X, M) \simeq \mu_n$ est égal au produit de symboles résiduels de puissances

$$\prod_{v \in X} \left(\frac{f}{\mathbb{F}_v} \right)_n^{\text{ord}_v(m)},$$

3.0.9. Corollaire. *Corollaire (3.6).* Si $f, g \in A$ sont deux éléments premiers l'un à l'autre congrus à 1 modulo N , alors

$$\prod_v \left(\frac{f}{\mathbb{F}_v} \right)_n^{\text{ord}_v(g)} = \prod_v \left(\frac{g}{\mathbb{F}_v} \right)_n^{\text{ord}_v(f)}$$

Ceci est la loi de réciprocité dans sa forme classique. Elle peut être utilisée pour retrouver la structure complète donnée par le théorème 3.5.

(3.7) Fibrés en droites avec structure de niveau. On conserve la notation de §3.4. On dénote par $\widetilde{\text{Pic}}(X)$ le groupe de fibrés en droites L sur X avec structure de niveau N . On dénote par $K^*(N)$ les groupes multiplicatifs de $f \in K$ qui sont totalement positifs, premiers à N et congrus à 1 modulo N . Dans le théorème 3.5, on est libre de faire grandir N . Dans la suite, on fera toujours les suppositions suivantes sur N :

3.0.10. Remarque. *Supposition (3.8).* Pour tout $f \in K^*(N)$ on a la congruence

$$\text{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(f) \equiv 1 \pmod{n^2}.$$

Cela sera vrai, par exemple, si N est divisible par (la remontée dans A de) n^2 .

Soit $\text{Div}(X, N)$ le groupe des diviseurs sur X premiers à N . Alors, clairement,

$$\widetilde{\text{Pic}}(X) = \text{Div}(X, N) / \{\text{div}(f), f \in K^*(N)\}$$

Aussi loin que modulo n les phénomènes soient concernés, les fibrés en droites (et en vecteurs) sur X à structure de niveau N se comportent comme des fibrés sur une courbe compacte, même si X lui-même n'est en aucun sens compactifié. Par exemple, le μ_n -torseur $\langle L, M \rangle$ a la signification de l'image directe

$$\int_{X/\text{Spec}(\mathbb{F}_{1^n})} c_1(L)c_1(M),$$

cf. [Deligne].

De plus, de tels fibrés en droites ont une notion de degré qui prend des valeurs dans \mathbb{Z}/n . Il est défini comme suit. Utilisons le langage des sections 1 et 2, en particulier, utilisons l'algèbre linéaire sur le corps absolu $F = \mathbb{F}_{1^n}$. Pour un idéal $D_1 A$ premier à N on pose

$$\deg_n(D) = \dim_F(A/D) \pmod{n}.$$

3.0.11. Proposition. *Proposition (3.9).* (a) Pour deux idéaux $D_1, D_2 A$ premiers à N on a $\deg_n(D_1 D_2) \equiv \deg_n(D_1) + \deg_n(D_2) \pmod{n}$.

(b) Si $f \in A \cap K^*(N)$, alors $\deg_n(\operatorname{div}(f)) \equiv 0 \pmod{n}$.

Preuve. (a) Soit $\Delta_i = \operatorname{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(D_i)$. Alors Δ_i est un idéal dans \mathbb{Z} ; soit d_i son générateur positif. Clairement $|A/D_i| = |\mathbb{Z}/\Delta_i| = d_i$. Donc $\deg_n(D_i) \equiv (d_i - 1)/n \pmod{n}$, et $\deg_n(D_1 + D_2) \equiv (d_1 d_2 - 1)/n \pmod{n}$. Notre assertion revient à la congruence

$$\frac{d_1 d_2 - 1}{n} \equiv \frac{d_1 - 1}{n} + \frac{d_2 - 1}{n} \pmod{n}.$$

On peut réécrire cela en

$$(d_1 - 1)(d_2 - 1) \equiv 1 \pmod{n^2},$$

qui est vrai du fait de la supposition 3.8.

(b) Appelons, comme précédemment, d le générateur positif de $\operatorname{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(f)$. Alors $d \equiv 1 \pmod{n^2}$ par la supposition 3.8 et, d'un autre côté, $\deg_n(\operatorname{div}(f)) \equiv (d - 1)/n \pmod{n}$.

3.0.12. Corollaire. *Corollaire (3.10).* L'application \deg_n s'étend à un homomorphisme bien défini

$$\deg_n : \widetilde{\operatorname{Pic}}(X) \rightarrow \mathbb{Z}/n.$$

Preuve. Tout élément de $K^*(N)$ est le ratio de deux éléments de $A \cap K^*(N)$.

4. Courbes arithmétiques compactifiées.

Comme dans les sections précédentes, dénotons par K un corps de nombres contenant le groupe $\mu = \mu_n$ des racines n -ièmes de l'unité, par A son anneau d'entiers et par X le spectre de A . On choisit également un idéal N dans A comme dans la section 3.

Bien que les fibrés en droites sur X avec structure de niveau N aient un degré modulo n et aient également les toseurs $\langle L, M \rangle$, ils n'ont pas d'espaces de dimension finie de sections globales ou bien de cohomologie. Dans la situation géométrique, pourtant, une étape importante est la comparaison de $\langle L, M \rangle$ avec le déterminant de la cohomologie. De ce fait, on introduit des objets pour lesquels de tels déterminants ont du sens.

(4.1) Domaines fondamentaux. Nous allons faire quelques constructions polyédrales dans l'espace vectoriel réel $K_{\mathbb{R}} = K \otimes \mathbb{R}$. En fait, tensoriser par \mathbb{R} n'est pas vraiment nécessaire, mais cela aide à la visualisation.

Fixons quelques éléments de terminologie reliés aux sous-ensembles de tout espace vectoriel réel V . On appellera polytope (convexe) toute fermeture convexe d'un ensemble fini de points (donc, en particulier, c'est un sous-ensemble fermé de V). Un polytope P a des *faces*, qui sont des sous-polytopes (fermés) dans P . Par *domaine polyédral* on désigne un sous-ensemble dans V de la forme $P - Q$ où P est un polytope et où Q est l'union des intérieurs de certaines faces de P .

L'anneau A est un réseau dans $K_{\mathbb{R}}$, comme l'est également tout A -sous-module projectif de rang 1 dans K , par exemple, tout idéal fractionnaire.

Si Λ est un tel sous-module, on appellera *polytope fondamental* pour Λ un polytope convexe $P \in K_{\mathbb{R}}$ avec la propriété suivante : pour n'importe quels deux $\alpha, \beta \in \Lambda$, leur intersection translatée $(P + \alpha) \cap (P + \beta)$ est une face qui leur est commune. Bien sûr, un choix évident d'un polytope fondamental pourrait être le "cube" du réseau, mais on aura besoin d'autres choix (voir ci-dessous).

Un *ensemble de représentants* pour Λ est un domaine polyédral $B \in K_{\mathbb{R}}$ tel que la projection composée $B \hookrightarrow K_{\mathbb{R}} \rightarrow K_{\mathbb{R}}/\Lambda$ est une bijection.

Par exemple, quand $K = \mathbb{Q}$, alors $[0, 1]$ est un polytope fondamental pour $\Lambda = \mathbb{Z}$, alors que $[0, 1)$ est un ensemble de représentants.

(4.2) Définition. Soit $B1K_{\mathbb{R}}$ un sous-ensemble μ -invariant contenant 0. On dit que B est un domaine contrôlé, s'il existe des sous-ensembles B_f, B_c1B et un idéal fractionnaire $\Lambda1K$ avec les propriétés suivantes :

1. On a $B = B_f \cup B_c$ et $B_f \cap B_c = \emptyset$.
2. L'ensemble B_f est un ensemble de représentants pour Λ .
3. Pour tout $x \in B_c \cap K$ l'idéal $(x : \Lambda) = \{\alpha \in A \mid \alpha x \in \Lambda\}$ est divisible par tout idéal premier dans A qui divise n .

(4.3) Exemple. Dans le cas où $K = \mathbb{Q}$ l'intervalle $[-1, 1]$ est un domaine contrôlé. En effet, on peut prendre $B_f = [-1, 1)$ le demi-intervalle ouvert, $B_c = \{1\}$ et $\Lambda = 2\mathbb{Z}$.

En général, un domaine contrôlé peut être vu comme un remplacement de cet intervalle. Le fait suivant sera prouvé dans la prochaine section.

4.0.13. Théorème. *Théorème (4.4).* Si n est une puissance de nombre premier, $n = p^t$ et K est un corps de nombres contenant μ_n , alors il existe un domaine contrôlé dans $K_{\mathbb{R}}$.

4.0.14. Définition. *Définition (4.5).* Une courbe compacte sur \mathbb{F}_{1^n} est une paire $\overline{X} = (X, B)$, où $X = \text{Spec}A$ avec A l'anneau des entiers d'un corps de nombres K contenant μ_n et $B1K_{\mathbb{R}}$ est un domaine contrôlé tel que μ_n1B .

Dans la suite de cette section, on suppose que X et B sont choisis.

4.0.15. Définition. *Définition (4.6).* Un fibré en droites sur \overline{X} est une paire $L = (M_L, B_L)$ où M_L est un A -module projectif de rang 1 et $B_L1M_L \otimes \mathbb{R}$ est un sous-ensemble qui est K -linéairement isomorphe à $B1K_{\mathbb{R}}$.

On dénote par $H^0(\overline{X}, L) = M_L \cap B_L$. C'est un espace vectoriel sur $F = \mathbb{F}_{1^n}$. Pour tout diviseur D sur X , on dénote par $\mathcal{O}(D)1K$ l'idéal fractionnaire correspondant et on dénote par $L(D)$ la paire formée par $M_L(D) = M_L \otimes \mathcal{O}(D)$ et le même ensemble B_L . On dénotera par $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ ou simplement \mathcal{O} la paire (A, B) .

Supposons que D est positif, i.e. $\mathcal{O}(D)$ est un idéal dans A . Alors $M_L 1 M_L(D)$ et le quotient peuvent être vu comme un faisceau gratte-ciel sur X avec support sur le support de D . On dénote ce faisceau par $L(D)|_D$, et on pense au groupe quotient $M_L(D)/M_L$ comme à l'espace des sections globales (sur X ou \overline{X}) de ce faisceau. Ainsi on a une séquence

$$(4.7) \quad 0 \rightarrow H^0(\overline{X}, L) \rightarrow H^0(\overline{X}, L(D)) \rightarrow H^0(X, L(D)|_D) \rightarrow 0$$

Quand D est premier à n , les ensembles dans cette séquence sont des espaces F -vectoriels où $F = \mathbb{F}_{1^n}$.

4.0.16. Définition. *Définition (4.8).* Un fibré en droites L sur \overline{X} est dit *acyclique* (ou est dit ne pas avoir de cohomologie plus haute) si pour tout diviseur positif D dans A , la séquence (4.7) est exacte au sens de la section 2.

4.0.17. Théorème. *Théorème (4.9).* Pour tout fibré en droites L sur \overline{X} , il y a un diviseur positif D premier à n tel que pour tout diviseur $D' \geq D$ premier à n , le fibré en droites $L(D)$ est acyclique.

Preuve.

4.0.18. Corollaire. *Corollaire (4.10).* (Riemann-Roch modulo n). Il existe un nombre $g = g(\overline{X}) \in \mathbb{Z}/n$ tel que pour $D \gg 0$ on ait

$$\dim H^0(\overline{X}, \mathcal{O}(D)) = \deg_n(D) + 1 - g \pmod{n}.$$

Ici le nombre $\deg_n(D)$ a été défini dans la section 3.

(2.7) Colimites d'homotopie. Puisqu'on a défini seulement les rudiments d'une structure de modèle fermé, on peut définir les limites et les colimites seulement dans des cas particuliers. Voici la situation que nous utiliserons.

Soit I une catégorie finie et $\Phi : I \rightarrow \mathcal{M}$ un foncteur, i.e. un diagramme de F -espaces de type I . Supposons que tous les morphismes $\Phi(\alpha), \alpha \in \text{Mor}(I)$ soient des plongements. Un système constitué d'un objet $C \in \mathcal{M}$ et de morphismes $\beta_i : \Phi(i) \rightarrow C$ est appelé une colimite d'homotopie de Φ , si :

1. $\beta(i)\Phi(\alpha) = \beta_j$ pour tout $\alpha : j \rightarrow i$ dans I .
2. Le morphisme naturel $\text{colim}_I \Phi \rightarrow C$ existant par la propriété (1) est une équivalence.

(2.8) Exemples. (a) Une séquence (2.4.1) est exacte si et seulement si V'' est une colimite homotopique du diagramme ;

(b) Carrés exacts (cocartésiens homotopiques). Un carré commutatif sera dit exact, ou cocartésien homotopique, si les applications dans le diagramme sont des plongements et si V_{11} est une limite homotopique de ce diagramme.

De façon similaire, on définit les cubes exacts de dimension arbitraire d . Par définition, un tel foncteur est un diagramme commutatif constitué de f -espaces V_S où S parcourt les sous-ensembles

dans $\{1, \dots, d\}$, et il y a une application $V_S \rightarrow V_T$ quand $S1T$. Un cube est dit exact si dans le sous-diagramme formé par les $V_S, S \neq \{1, \dots, d\}$ toutes les applications sont des plongements et si $V_{\{1, \dots, d\}}$ est une limite homotopique de ce diagramme.

4.0.19. Proposition. *Proposition (2.9).* Si (V_s) est un cube d -dimensionnel exact, alors on a l'isomorphisme naturel

$$\bigotimes \det(V_S)^{(-1)^{|S|}} \simeq \mu.$$

(4.2) Exemple : le corps cyclotomique. Soit $n = p^t$ où p est un nombre premier, et soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$ le n -ième corps cyclotomique. Soit $A = \mathbb{Z}[\sqrt[p]{1}]$ son anneau d'entiers. Le seul idéal dans A étendu sous p est $\Lambda = (1 - \zeta)$ où ζ est n'importe quelle racine primitive de 1. Considérons l'ensemble

$$P = \left\{ \sum_{\epsilon \in \mu_n} a_\epsilon \epsilon \right\}, \quad a_\epsilon \in [0, 1].$$

Ceci est clairement un polytope, puisque c'est l'image du cube $[0, 1]^{\mu_n}$ sous la projection naturelle sur $K_{\mathbb{R}}$.

4.0.20. Proposition. *Proposition (4.2.1).* P est un polytope fondamental pour Λ .

Preuve. Fixons une racine primitive $\zeta \in \mu_n$. Une \mathbb{R} -base de $K_{\mathbb{R}}$ et une \mathbb{Z} -base de A est fournie par les puissances ζ^i , où $1 \leq i \leq n$ et $(i, n) = 1$. Par conséquent le cube

$$Q = \left\{ \sum_{(i, n)=1} a_i \zeta^i \right\}, \quad a_i \in [0, 1]$$

est un polytope fondamental pour A . Maintenant P est l'union de n cubes ayant subi une rotation de $\zeta^j Q$ où $0 \leq j \leq n - 1$, et l'intersection de n'importe quelle paire de deux tels cubes est leur face commune. Cela peut être vérifié d'une façon triviale.