Conjecture de Goldbach :
écrire, réécrire, compter

Denise Vella-Chemla

16/2/14

1 Introduction

On souhaite trouver une démonstration de la conjecture de Goldbach, qui stipule que tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers *.

On se propose dans ce but d'utiliser une modélisation qui associe à chaque nombre pair n un mot d'un langage à 4 lettres $m_{abcd}(n)$ qui code la primalité des nombres impairs x (compris entre 3 et et $n/2$) et de leur complémentaire.

On identifiera le processus permettant de passer du mot d'un nombre pair n au mot du nombre pair suivant $n+2$.

On caractérisera l'existence d'un décomposant de Goldbach d'un nombre pair par une simple condition que vérifie son mot.

On essaiera de trouver une formule récurrente qui permet de passer du nombre de décompositions de Goldbach $dg(n)$ d'un nombre pair n au nombre de décompositions de Goldbach $dg(n+2)$ du nombre pair suivant $n+2$.

2 Mot d'un nombre pair

On choisit de représenter le fait qu'un entier est premier par le booléen 0 et le fait qu'il est composé par le booléen 1.

On rappelle :
- que la lettre a est utilisée pour symboliser une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p et q premiers et $p \leqslant n/2$;
- que la lettre b est utilisée pour symboliser une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p composé et q premier et $p \leqslant n/2$;
- que la lettre c est utilisée pour symboliser une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p premier et q composé et $p \leqslant n/2$;

*. Dans l'égalité $n = p + q$ avec n pair supérieur à 2, p et q premiers, on appellera p et q décomposants de Goldbach de n ou sommants.

– que la lettre d est utilisée pour symboliser une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p et q composés et $p \leqslant n/2$;

Exemples : Ci-dessous les mot $m_{abcd}(40)$, $m_{abcd}(42)$ et $m_{abcd}(44)$.

40	37	35	33	31	29	27	25	23	21
	0	1	1	0	0	1	1	0	1
	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$m_{abcd}(40)$	a	c	c	b	a	c	d	a	c

42	39	37	35	33	31	29	27	25	23	21
	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
$m_{abcd}(42)$	c	a	c	d	a	a	d	c	a	d

44	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23
	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
$m_{abcd}(44)$	a	c	a	d	c	a	b	c	c	b

3 Identifier ce que fait le processus

Le mot m_{abcd} du nombre pair $n+2$ s'obtient de la façon suivante à partir de celui de n :

– la première lettre du mot de $n+2$ est a si $n-3$ est premier et c sinon (cette première lettre est la seule qui introduit de l'indéterminisme car elle n'appartient pas au mot du langage à 4 lettres $m_{abcd}(n)$ ou ne se déduit pas des lettres de ce dernier) ;

– les lettres suivantes du mot de $n+2$ sont obtenues par réécriture du mot de n selon les règles ci-dessous :

$$\begin{aligned} aa &\to a \\ ab &\to b \\ ac &\to a \\ ad &\to b \\ ba &\to a \\ bb &\to b \\ bc &\to a \\ bd &\to b \\ ca &\to c \\ cb &\to d \\ cc &\to c \\ cd &\to d \\ da &\to c \\ db &\to d \\ dc &\to c \\ dd &\to d \end{aligned}$$

On note que 4 règles de réécriture ($aa \to a,\ ac \to a,\ ba \to a,\ bc \to a$) assurent d'obtenir une lettre a au moins dans le mot de $n+2$.

- enfin, la concaténation d'une lettre en fin de mot, dans le cas où n est un double de pair obéit à la règle suivante :
  - si n a a ou b comme dernière lettre, après avoir obtenu le mot de $n+2$ en appliquant les règles de réécriture, on lui concatène la lettre a ;
  - si n a c ou d comme dernière lettre, après avoir obtenu le mot de $n+2$ en appliquant les règles de réécriture, on lui concatène la lettre d.

En annexe 2, on montre qu'on a toujours $x^2 = x$ par application réitérée de chacune des 16 règles de réécriture.

4 Caractériser l'existence d'une décomposition de Goldbach dans le mot d'un nombre pair

n admet une décomposition de Goldbach si son mot contient une lettre a.

Le double d'un nombre impair dont le mot m_{abcd} se termine par une lettre a est un double de nombre premier, qui vérifie donc trivialement la conjecture de Goldbach (ex : 46 dont le mot m_{abcd} est *aacbccbacda* se terminant par une lettre a est le double de 23, premier).

Le double d'un nombre pair dont le mot m_{abcd} se termine par une lettre a est le double d'un "père de jumeau" (ex : 36 dont le mot m_{abcd} est *acabca* se terminant par une lettre a est le double de 18, un père de jumeau, i.e. un nombre pair compris entre deux nombres premiers, en l'occurrence 17 et 19).

5 Formule récurrente

On cherche une formule récurrente [†] qui permettrait de "compter les lettres a". Dans ce but, on observe attentivement les règles de réécriture.

Par abus de langage (!), on dira que les règles $aa \to a$, $ad \to b$ ainsi même que $ab \to b$ [‡], éliminent un a à gauche. On dira également que les règles $ca \to c$ et $da \to c$ éliminent quant à elles un a à droite.

Si l'on note $X_{\alpha\beta}$ le nombre d'occurrences du sous-mot $\alpha\beta$ dans le mot de $m_{abcd}(n)$, alors il semblerait que l'inégalité suivante soit toujours vérifiée :

$$\begin{aligned} dg(n+2) \geqslant dg(n) \quad & -X_{aa} - X_{ab} - X_{ad} - X_{ca} - X_{da} \\ & +X_{bc} + X_{dac} \\ & +X_{caa} + X_{daa} + X_{cad} + X_{dad} + X_{cab} + X_{dab} \end{aligned}$$

Cette formule garantit peut-être qu'au-delà d'un certain entier, le nombre de a du mot d'un nombre pair (i.e. le nombre de décompositions de Goldbach du nombre pair en question) ne peut jamais devenir nul.

†. On est conforté dans l'idée qu'une telle formule récurrente existe par l'article d'Euler *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs* dans lequel il trouve une telle formule pour la somme des diviseurs d'un entier.

‡. bien que cette dernière ne le fasse que par combinaison avec une autre règle.

Annexe 1 : mots du langage à 4 lettres associés aux nombres pairs de 6 à 100

6 : a
8 : a
10 : $a\ a$
12 : $c\ a$
14 : $a\ c\ a$
16 : $a\ a\ c$
18 : $c\ a\ a\ d$
20 : $a\ c\ a\ b$
22 : $a\ a\ c\ b\ a$
24 : $c\ a\ a\ d\ a$
26 : $a\ c\ a\ b\ c\ a$
28 : $c\ a\ c\ b\ a\ c$
30 : $c\ c\ a\ d\ a\ a\ d$
32 : $a\ c\ c\ b\ c\ a\ b$
34 : $a\ a\ c\ d\ a\ c\ b\ a$
36 : $c\ a\ a\ d\ c\ a\ d\ a$
38 : $c\ c\ a\ b\ c\ c\ b\ c\ a$
40 : $a\ c\ c\ b\ a\ c\ d\ a\ c$
42 : $c\ a\ c\ d\ a\ a\ d\ c\ a\ d$
44 : $a\ c\ a\ d\ c\ a\ b\ c\ c\ b$
46 : $a\ a\ c\ b\ c\ c\ b\ a\ c\ d\ a$
48 : $c\ a\ a\ d\ a\ c\ d\ a\ a\ d\ c$
50 : $a\ c\ a\ b\ c\ a\ d\ c\ a\ b\ c\ d$
52 : $c\ a\ c\ b\ a\ c\ b\ c\ c\ b\ a\ d$
54 : $c\ c\ a\ d\ a\ a\ d\ a\ c\ d\ a\ b\ d$
56 : $a\ c\ c\ b\ c\ a\ b\ c\ a\ d\ c\ b\ b$
58 : $c\ a\ c\ d\ a\ c\ b\ a\ c\ b\ c\ d\ b\ a$
60 : $c\ c\ a\ d\ c\ a\ d\ a\ a\ d\ a\ d\ d\ a$
62 : $a\ c\ c\ b\ c\ c\ b\ c\ a\ b\ c\ b\ d\ c\ a$
64 : $a\ a\ c\ d\ a\ c\ d\ a\ c\ b\ a\ d\ b\ c\ c$
66 : $c\ a\ a\ d\ c\ a\ d\ c\ a\ d\ a\ b\ d\ a\ c\ d$
68 : $c\ c\ a\ b\ c\ c\ b\ c\ c\ b\ c\ b\ b\ c\ a\ d$
70 : $a\ c\ c\ b\ a\ c\ d\ a\ c\ d\ a\ d\ b\ a\ c\ b\ d$
72 : $c\ a\ c\ d\ a\ a\ d\ c\ a\ d\ c\ b\ d\ a\ a\ d\ b$
74 : $a\ c\ a\ d\ c\ a\ b\ c\ c\ b\ c\ d\ b\ c\ a\ b\ d\ a$
76 : $a\ a\ c\ b\ c\ c\ b\ a\ c\ d\ a\ d\ d\ a\ c\ b\ b\ c$
78 : $c\ a\ a\ d\ a\ c\ d\ a\ a\ d\ c\ b\ d\ c\ a\ d\ b\ a\ d$
80 : $c\ c\ a\ b\ c\ a\ d\ c\ a\ b\ c\ d\ b\ c\ c\ b\ d\ a\ b$
82 : $a\ c\ c\ b\ a\ c\ b\ c\ c\ b\ a\ d\ d\ a\ c\ d\ b\ c\ b\ a$
84 : $c\ a\ c\ d\ a\ a\ d\ a\ c\ d\ a\ b\ d\ c\ a\ d\ d\ a\ d\ a$
86 : $a\ c\ a\ d\ c\ a\ b\ c\ a\ d\ c\ b\ b\ c\ c\ b\ d\ c\ b\ c\ a$
88 : $c\ a\ c\ b\ c\ c\ b\ a\ c\ b\ c\ d\ b\ a\ c\ d\ b\ c\ d\ a\ c$
90 : $c\ c\ a\ d\ a\ c\ d\ a\ a\ d\ a\ d\ d\ a\ a\ d\ d\ a\ d\ c\ a\ d$
92 : $a\ c\ c\ b\ c\ a\ d\ c\ a\ b\ c\ b\ d\ c\ a\ b\ d\ c\ b\ c\ c\ b$
94 : $c\ a\ c\ d\ a\ c\ b\ c\ c\ b\ a\ d\ b\ c\ c\ b\ b\ c\ d\ a\ c\ d\ a$
96 : $c\ c\ a\ d\ c\ a\ d\ a\ c\ d\ a\ b\ d\ a\ c\ d\ b\ a\ d\ c\ a\ d\ c$
98 : $c\ c\ c\ b\ c\ c\ b\ c\ a\ d\ c\ b\ b\ c\ a\ d\ d\ a\ b\ c\ c\ b\ c\ d$
100 : $a\ c\ c\ d\ a\ c\ d\ a\ c\ b\ c\ d\ b\ a\ c\ b\ d\ c\ b\ a\ c\ d\ a\ d$

Annexe 2 : $x^2 = x$ pour chaque règle de réécriture

$$
\begin{array}{lll}
aa/aa & \to aaa & \to aa \\
ab/ab & \to bab & \to ab \\
ac/ac & \to aca & \to ac \\
ad/ad & \to bcb & \to ad \\
ba/ba & \to aba & \to ba \\
bb/bb & \to bbb & \to bb \\
bc/bc & \to ada & \to bc \\
bd/bd & \to bdb & \to bd \\
ca/ca & \to cac & \to ca \\
cb/cb & \to dad & \to cb \\
cc/cc & \to ccc & \to cc \\
cd/cd & \to dcd & \to cd \\
da/da & \to cbc & \to da \\
db/db & \to dbd & \to db \\
dc/dc & \to cdc & \to dc \\
dd/dd & \to ddd & \to dd
\end{array}
$$