Perseverare (Denise Vella-Chemla, 24.6.2018)

On cherche à démontrer la conjecture de Goldbach. On définit 4 variables ainsi :

$$X_a(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ et } q \textit{ premiers}\}$$

$$X_b(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ composé et } q \textit{ premier}\}$$

$$X_c(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ premier et } q \textit{ composé}\}$$

$$X_d(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ et } q \textit{ composés}\}$$

Dans la suite de ce document, on note $E(x)$ la partie entière de x (i.e. $\lfloor x \rfloor$) et $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.

On dispose de l'égalité ci-dessous : elle découle des démonstrations par récurrence d'une note d'octobre 2014 [*].

$$X_d(n) - X_a(n) = E(n/4) - \pi(n) + \delta(n) \qquad (1)$$

$\delta(n)$ prend les valeurs 0,1 ou 2.

Alain Connes fournit une justification simple de (1) que l'on recopie ci-dessous :

[Pour n fixé, soit J l'ensemble des nombres impairs entre 1 et n/2 et considérons les deux sous-ensembles de J : $P = \{j \in J \mid j \textit{ premier}\}, Q = \{j \in J \mid n-j \textit{ premier}\}$.

Alors je prétends que (1) résulte du fait très général sur des sous-ensembles quelconques et les cardinalités d'intersection et réunion :

$$\#(P \cup Q) + \#(P \cap Q) = \#(P) + \#(Q) \qquad (2)$$

Ici (en négligeant les cas limites qui contribuent à $\delta(n)$*), on voit que*
(a) $\#(P \cap Q)$ *correspond à* $X_a(n)$.
(b) $\#(P \cup Q)$ *correspond à* $E(n/4) - X_d(n)$.
(c) $\#(P) + \#(Q)$ *correspond à* $\pi(n)$.

On a donc une preuve très simple de (1) comme conséquence de (2).]

Voyons maintenant une propriété concernant $X_d(n)$.

On décide de représenter les nombres composés par la couleur grise et les nombres premiers par la couleur blanche.

On représente les nombres impairs compris entre 3 et $n/2$ par les rectangles de la partie inférieure du dessin ci-dessous et les nombres impairs compris entre $n/2$ et n, complémentaires à n des nombres de la partie inférieure par les rectangles de la partie supérieure. Les rectangles symbolisent des ensembles de colonnes contenant dans leur partie inférieure un nombre x et dans la partie supérieure son complémentaire $n-x$. On positionne les colonnes contigument selon la nature des décompositions qu'elles représentent (selon que les colonnes sont de type a, b, c ou d).

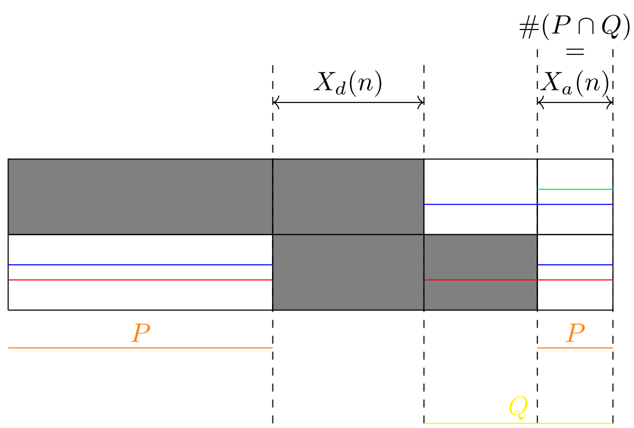

FIGURE 1 : ensembles de décompositions de n disposées contigument selon leur nature

[*]. Note http://denise.vella.chemla.free.fr/nombres-et-lettres.pdf, version en anglais sur Hal https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01109052.

On réécrit l'identité ensembliste (2) en $\#(P) + \#(Q) - \#(P \cap Q) = \#(P \cup Q)$.

En remplaçant les cardinaux par les variables associées, on obtient que

$$X_a(n) = \pi(n) - \#(P \cup Q)$$

dont on veut avoir l'assurance qu'il est toujours strictement positif puisqu'il compte les décompositions de Goldbach de n (en somme de deux nombres premiers).

On a utilisé les couleurs :
- verte pour $\#(P \cap Q)$;
- rouge pour $\#(P \cup Q)$;
- bleue pour $\#(P) + \#(Q) = \pi(n)$.

$X_a(n) = X_d(n) - E(n/4) + \pi(n) - \delta(n) = X_a(n)$ est une relation toujours vérifiée mais elle ne garantit pas qu'à partir d'un certain rang, $X_a(n)$ soit toujours strictement positif.