Modélisation spatiale de CG (D.Chemla, 13/11/13)

On note r_p la surjection qui a tout entier associe sa classe d'équivalence dans un corps premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rccc} r_p: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & \dot{n} \end{array}$$

On note s_p la section qui associe à une classe son plus petit représentant positif ou nul :

$$\begin{array}{rlcl} s_p: & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & \dot{n} & \mapsto & \min\{n \mid n \geqslant 0 \wedge \dot{n} = n\} \end{array}$$

On utilise une base de nombres premiers constituée de l'ensemble des nombres premiers successifs inférieurs ou égaux à un nombre premier donné. Par exemple, la base associée au nombre premier 7 est $\{p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7\}$. On dit que l'ensemble $\mathbb{Z}/\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} p_i\mathbb{Z}$ est de dimension k.

Poursuivons l'étude d'un exemple, généralisable : on munit l'ensemble $\mathcal{M} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ de l'addition modulaire composante par composante.

On définit sur $\mathcal{M}$ le produit suivant, pour $u = (u_i)$ et $v = (v_i)$ deux vecteurs :

$$< u \mid v >= \sum_i s(u_i v_i)$$

A tout nombre $n \leqslant 210$ (*note* : $210 = 2.3.5.7$), on associe l'élément de $\mathcal{M}$ dont la i-ème composante est $r_{p_i}(n)$.

Par exemple, à 105 est associé $(1, 0, 0, 0)$, à 70 est associé $(0, 1, 0, 0)$, à 126 est associé $(0, 0, 1, 0)$ et à 120 est associé $(0, 0, 0, 1)$.

L'espace ainsi défini $\mathcal{M}$ contient 210 points. Aux nombres premiers supérieurs à 7 sont associés des points n'ayant aucune coordonnée nulle. Les points associés aux décomposants de Goldbach d'un nombre pair doivent être associés à des nombres premiers et doivent en outre ne partager aucune de leurs coordonnées avec le point associé à ce nombre.

Tester la nullité d'une des coordonnées (par comparaison au vecteur $(0, 0, \ldots, 0)$) ou l'égalité d'une des coordonnées d'un point à la coordonnée correspondante de n se fait en utilisant la fonction suivante, pour $u = (u_i)$ et $v = (v_i)$ deux vecteurs : :

$$u \; partage \; l'une \; de \; ses \; coordonn\acute{e}es \; avec \; v \iff min(|u_i - v_i|) = 0$$

On peut aussi définir la notion de *"ligne"* passant par différents points.

Quand l'espace courant (de dimension i) est "emboîté" dans un espace plus grand (de dimension $i + 1$, à l'ajout d'un nouveau nombre premier à la base, lorsqu'on étudie l'existence de décomposants de Goldbach pour des nombres pairs supérieurs à p_{i+1}^2), les lignes de points associés à des impairs successifs sont "prolongées", on ajoute un point à leur extrémité. De l'existence d'un dg dans la ligne courte l_i associée à un certain nombre pair n_i doit découler l'existence d'un dg pour les nombres pairs n_j qui ont toutes leurs coordonnées dans l'espace de dimension i communes avec celles du petit nombre pair n_i.

Pour illustrer cette modélisation spatiale, cherchons des dg du nombre pair 98 (de n-uplet associé $(1, 2, 3, 0)$: on cherche tous les points de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) qui, multipliés par le point $(105, 70, 126, 120)$, permettent d'obtenir un entier $105x_1 + 70x_2 + 126x_3 + 120x_4$ dont l'image par s est un impair compris entre 3 et 49.

Les points $(1, 1, 4, 5)$ ou bien $(1, 1, 1, 3)$ ou encore $(1, 1, 2, 2)$ satisfont les contraintes souhaitées.

En effet,

$$\begin{array}{l} s(105 \times 1 + 70 \times 1 + 126 \times 4 + 120 \times 5) = s(1279) = 19 \text{ et } 3 \leqslant 19 \leqslant 49 \\ s(105 \times 1 + 70 \times 1 + 126 \times 1 + 120 \times 3) = s(661) = 31 \text{ et } 3 \leqslant 31 \leqslant 49 \\ s(105 \times 1 + 70 \times 1 + 126 \times 2 + 120 \times 2) = s(667) = 37 \text{ et } 3 \leqslant 37 \leqslant 49. \end{array}$$

19, 31 et 37 sont des décomposants de Goldbach de 98.

Démontrer la conjecture de Goldbach consiste à vérifier que, pour n un nombre pair fixé, l'intersection de l'ensemble de points dont les coordonnées vérifient certaines contraintes (non-nullité et non-égalité aux coordonnées du point associé à n) et de l'ensemble des points de la ligne des impairs compris entre 3 et $n/2$ n'est jamais vide.