De l'importance d'une phrase (d'un livre) (Denise Vella-Chemla, 9 avril 2024)

J'ai trouvé très récemment une formule, de façon totalement hasardeuse. La voici :

$$\sum_{n=1}^{N} n^{-\frac{1}{k}} \simeq \frac{k}{k-1} N^{\frac{k-1}{k}} - \frac{k}{k-1}.$$

Je l'ai utilisée dans un programme, dans lequel je l'appliquais pour calculer les valeurs d'une fonction que je croyais être la fonction ζ de Riemann, uniquement pour les complexes dits "zéros non triviaux de ζ", c'est-à-dire que la formule était appliquée seulement aux complexes de la forme $0.5 + b\,i$ avec b prenant les valeurs bien connues des dits zéros tronqués à la dixième décimale, dont voici les premiers

$$\begin{array}{l} 14.134725142, \\ 21.022039639, \\ 25.010857580, \\ 30.424876126, \\ 32.935061588, \\ 37.586178159, \\ 40.918719012, \\ 43.327073281, \\ 48.005150881, \\ \ldots . \end{array}$$

Le programme en question était satisfaisant, dans le sens où les deux calculs qu'il effectuait donnaient le même résultat ; mais par ailleurs, il n'était pas satisfaisant parce que la fonction, qu'on pensait être la fonction ζ de Riemann, ainsi calculée, ne semblait pas s'annuler en les zéros non triviaux : en effet, les premières valeurs trouvées par les deux calculs étaient :

```
somme = (47.0681146614588 + 6.79233817958577j)
z = (47230573.132808 - 4542248.21847271j)
je le divise (47.230573132808 - 4.54224821847271j)

somme = (-0.696474171821543 + 39.9685904584189j)
z = (897012.922192707 - 39900840.876562j)
je le divise (0.897012922192707 - 39.900840876562j)

somme = (-19.1421254242806 + 26.712972229514j)
z = (-18235723.8351254 - 27297140.8614905j)
je le divise (-18.2357238351254 - 27.2971408614905j)

somme = (14.5829047512835 - 26.6275286136424j)
z = (13756410.0563313 + 27032410.7387761j)
je le divise (13.7564100563313 + 27.0324107387761j)

somme = (-21.2101595879565 - 16.0579637189287j)
z = (-21613929.77586 + 15477933.0403448j)
je le divise (-21.61392977586 + 15.4779330403448j)
```

```
somme = (-3.92806915960099 + 24.1191025784809j)
z = (-3336400.6682091 - 24193317.6027189j)
je le divise (-3.3364006682091 - 24.1933176027189j)

somme = (22.9020972754169 - 2.84983368903822j)
z = (22818190.5809835 + 3375017.62841979j)
je le divise (22.8181905809835 + 3.37501762841979j)

somme = (-7.14368903401133 - 19.5666935382541j)
z = (-7545774.20271016 + 19405480.5169969j)
je le divise (-7.54577420271016 + 19.4054805169969j)

somme = (6.84748368383507 - 18.8868955441334j)
z = (6464703.07811775 + 19012752.0800898j)
je le divise (6.46470307811775 + 19.0127520800898j)

somme = (3.18608609463471 - 18.6068506563752j)
z = (2833889.71322124 + 18656932.0938899j)
je le divise (2.83388971322124 + 18.6569320938899j)
```

Et c'est là qu'intervient LA phrase (il y a 3 phrases en fait, mais c'est la dernière des trois qui importe), trouvée dans le livre de Piergiorgio Odifreddi, *Les mathématiques à l'aube du* XXIième *siècle*, à la page 151 :

> *La relation entre la fonction ζ de Riemann et les nombres premiers transparaît déjà dans la démonstration précédente d'Euler, montrant que pour z inférieur ou égal à un, la fonction ζ est infinie. C'est la raison pour laquelle Riemann étendit la définition de ζ des nombres réels aux nombres complexes à l'aide d'une technique dite de prolongement analytique.* GROSSO MODO, ON DÉFINIT LA VALEUR DE ζ NON PAS COMME LIMITE DES SOMMES PARTIELLES MAIS DE LEURS MOYENNES.

Pour faire calculer ce que propose cette phrase, on modifie notre programme pour lui faire imprimer également les moyennes des sommes calculées au fur et à mesure des zéros, et pour obtenir la concordance avec notre "somme-éclair", on divise la somme-éclair (qui consiste à soustraire la valeur en 0 à la valeur en $nmax$ [1]) par le carré de $nmax$. Et là, joie, non seulement la somme-éclair se comporte bien, au sens où elle trouve un résultat très proche de la moyenne des sommes partielles, mais d'autre part, elle est rassurante car elle permet effectivement de trouver des valeurs "informatiquement nulles" pour les zéros non triviaux, ce qu'on espérait bien trouver.

[1] le plus grand entier qu'on considère ; on a pris $nmax = 1\ 000\ 000$.

```
import mpmath
from mpmath import sqrt, fadd, fsub, fmul, fdiv, fmul, power

liste2 = [ 14.134725142,  21.022039639,  25.010857580,  30.424876126,  32.935061588,
           37.586178159,  40.918719012,  43.327073281,  48.005150881,  49.773832478,
           52.970321478,  56.446247697,  59.347044003,  60.831778525,  65.112544048,
           67.079810529,  69.546401711,  72.067157674,  75.704690699,  77.144840069,
           79.337375020,  82.910380854,  84.735492981,  87.425274613,  88.809111208,
           92.491899271,  94.651344041,  95.870634228,  98.831194218,
           101.317851006,  103.725538040,...]
nmax = 1000
for b in range(1,len(liste2)):
     somme = 1
     unzero = 0.5+liste2[b]*1j
     for m in range(2,nmax+1):
          somme = fadd(somme,fdiv(1,m ** unzero))
     print('= ',somme)
     moinsinv = -1/unzero
     z = fsub((fdiv(moinsinv,fsub(moinsinv,1))*(nmax ** fdiv(fsub(moinsinv,1),moinsinv))),
                    fdiv(moinsinv,fsub(moinsinv,1)))
     print('z = ',z)
     print('je le divise par le carre de nmax ',fdiv(z,nmax))
```

Voyons ci-dessous le début du résultat de ce programme, dont l'entièreté est stockée ici : resultat-calcul-eclair :

```
somme = (47.0681146614588 + 6.79233817958577j)
moyenne = (4.70681617296206e-5 + 6.79234497193074e-6j)
z = (47230573.132808 - 4542248.21847271j)
je le divise par le carre de nmax (4.7230573132808e-5 - 4.54224821847271e-6j)

somme = (-0.696474171821543 + 39.9685904584189j)
moyenne = (-6.96474868296411e-7 + 3.99686304270493e-5j)
z = (897012.922192707 - 39900840.876562j)
je le divise par le carre de nmax (8.97012922192707e-7 - 3.9900840876562e-5j)

somme = (-19.1421254242806 + 26.712972229514j)
moyenne = (-1.91421445664252e-5 + 2.67129989425129e-5j)
z = (-18235723.8351254 - 27297140.8614905j)
je le divise par le carre de nmax (-1.82357238351254e-5 - 2.72971408614905e-5j)

somme = (14.5829047512835 - 26.6275286136424j)
moyenne = (1.45829193342028e-5 - 2.66275552411977e-5j)
z = (13756410.0563313 + 27032410.7387761j)
je le divise par le carre de nmax (1.37564100563313e-5 + 2.70324107387761e-5j)

somme = (-21.2101595879565 - 16.0579637189287j)
moyenne = (-2.12101807981373e-5 - 1.60579797769085e-5j)
z = (-21613929.77586 + 15477933.0403448j)
je le divise par le carre de nmax (-2.161392977586e-5 + 1.54779330403448e-5j)
```

```
somme = (-3.92806915960099 + 24.1191025784809j)
moyenne = (-3.92807308767408e-6 + 2.41191266976076e-5j)
z = (-3336400.6682091 - 24193317.6027189j)
je le divise par le carre de nmax (-3.3364006682091e-6 - 2.41933176027189e-5j)

somme = (22.9020972754169 - 2.84983368903822j)
moyenne = (2.29021201775371e-5 - 2.84983653887476e-6j)
z = (22818190.5809835 + 3375017.62841979j)
je le divise par le carre de nmax (2.28181905809835e-5 + 3.37501762841979e-6j)

somme = (-7.14368903401133 - 19.5666935382541j)
moyenne = (-7.14369617770751e-6 - 1.95667131049672e-5j)
z = (-7545774.20271016 + 19405480.5169969j)
je le divise par le carre de nmax (-7.54577420271016e-6 + 1.94054805169969e-5j)

somme = (6.84748368383507 - 18.8868955441334j)
moyenne = (6.84749053132561e-6 - 1.88869144310478e-5j)
z = (6464703.07811775 + 19012752.0800898j)
je le divise par le carre de nmax (6.46470307811775e-6 + 1.90127520800898e-5j)

somme = (3.18608609463471 - 18.6068506563752j)
moyenne = (3.18608928072399e-6 - 1.86068692632445e-5j)
z = (2833889.71322124 + 18656932.0938899j)
je le divise par le carre de nmax (2.83388971322124e-6 + 1.86569320938899e-5j)

somme = (11.7825798704793 + 13.2288290445883j)
moyenne = (1.17825916530709e-5 + 1.32288422734306e-5j)
z = (12010862.584625 - 13014348.7210121j)
je le divise par le carre de nmax (1.2010862584625e-5 - 1.30143487210121e-5j)

somme = (0.631960122209203 - 16.8375897198238j)
moyenne = (6.31960754169957e-7 - 1.68376065574304e-5j)
z = (348657.883980638 + 16841050.6294031j)
je le divise par le carre de nmax (3.48657883980638e-7 + 1.68410506294031e-5j)

somme = (-16.4140031666246 + 0.892046353471715j)
moyenne = (-1.64140195806441e-5 + 8.92047245518961e-7j)
z = (-16392729.7678544 - 1160848.24120904j)
je le divise par le carre de nmax (-1.63927297678544e-5 - 1.16084824120904e-6j)

somme = (13.510214029535 + 7.30268592082983j)
moyenne = (1.35102275397625e-5 + 7.30269322352306e-6j)
z = (13617297.6138118 - 7093164.98835927j)
je le divise par le carre de nmax (1.36172976138118e-5 - 7.09316498835927e-6j)

somme = (0.305800002544884 - 14.9040679191871j)
moyenne = (3.05800308345192e-7 - 1.49040828232699e-5j)
z = (84124.8942214654 + 14903651.9920264j)
je le divise par le carre de nmax (8.41248942214654e-8 + 1.49036519920264e-5j)

somme = (-6.90706408638652 + 12.6108816440201j)
moyenne = (-6.90707099345751e-6 + 1.26108942549144e-5j)
z = (-6724116.99967722 - 12706005.1911874j)
je le divise par le carre de nmax (-6.72411699967722e-6 - 1.27060051911874e-5j)
```

```
somme = (3.20815904609181 - 13.499645409885j)
moyenne = (3.20816225425406e-6 - 1.34996589095439e-5j)
z = (3020480.79743856 + 13540132.9874013j)
je le divise par le carre de nmax (3.02048079743856e-6 + 1.35401329874013e-5j)

somme = (3.20080523043151 - 12.8152582986173j)
moyenne = (3.20080843123994e-6 - 1.28152711138884e-5j)
z = (3031240.47735094 + 12854051.1558598j)
je le divise par le carre de nmax (3.03124047735094e-6 + 1.28540511558598e-5j)

somme = (-9.316335547442 - 9.0126959478554j)
moyenne = (-9.31634486378686e-6 - 9.01270496056036e-6j)
z = (-9430427.12662873 + 8890068.18516894j)
je le divise par le carre de nmax (-9.43042712662873e-6 + 8.89006818516894e-6j)

somme = (4.00253776361222 - 11.9517512323155j)
moyenne = (4.00254176615399e-6 - 1.19517631840786e-5j)
z = (3851468.48285356 + 11999179.8670751j)
je le divise par le carre de nmax (3.85146848285356e-6 + 1.19991798670751e-5j)

somme = (11.3511595755998 - 4.07662686242621j)
moyenne = (1.13511709267707e-5 - 4.07663093905715e-6j)
z = (11299702.2645788 + 4212132.11350525j)
je le divise par le carre de nmax (1.12997022645788e-5 + 4.21213211350525e-6j)

somme = (10.7427095397872 - 4.88499390502232j)
moyenne = (1.07427202825075e-5 - 4.88499879002111e-6j)
z = (10683043.7311247 + 5010259.4645182j)
je le divise par le carre de nmax (1.06830437311247e-5 + 5.0102594645182e-6j)

somme = (11.3667356666101 + 1.27621483368795j)
moyenne = (1.13667470333571e-5 + 1.27621610990406e-6j)
z = (11379046.0917562 - 1146483.23468877j)
je le divise par le carre de nmax (1.13790460917562e-5 - 1.14648323468877e-6j)

somme = (11.1215183089566 - 1.76007408467139j)
moyenne = (1.11215294304861e-5 - 1.76007584474724e-6j)
z = (11099671.7085907 + 1884439.86564631j)
je le divise par le carre de nmax (1.10996717085907e-5 + 1.8844398656463e-6j)

somme = (7.75536984932505 - 7.53292670004491j)
moyenne = (7.75537760470265e-6 - 7.53293423297914e-6j)
z = (7672937.8611855 + 7615076.61821918j)
je le divise par le carre de nmax (7.6729378611855e-6 + 7.61507661821918e-6j)

somme = (7.27404261850562 + 7.66200880435917j)
moyenne = (7.27404989255551e-6 + 7.66201646637564e-6j)
z = (7353393.7462063 - 7584240.7447512j)
je le divise par le carre de nmax (7.3533937462063e-6 - 7.5842407447512e-6j)

somme = (-9.88215228578014 + 3.33768441989347j)
moyenne = (-9.88216216794231e-6 + 3.33768775758122e-6j)
z = (-9845896.40408981 - 3439719.77237551j)
je le divise par le carre de nmax (-9.84589640408981e-6 - 3.43971977237551e-6j)
```

```
somme = (9.37173265349585 - 3.81409241635485j)
moyenne = (9.37174202523788e-6 - 3.81409623045108e-6j)
z = (9331901.45989881 + 3907848.53547083j)
je le divise par le carre de nmax (9.33190145989881e-6 + 3.90784853547083e-6j)

somme = (-9.70447005376166 + 1.7990099078026j)
moyenne = (-9.70447975824142e-6 + 1.79901170681431e-6j)
z = (-9685393.64289666 - 1894017.39538421j)
je le divise par le carre de nmax (-9.68539364289666e-6 - 1.89401739538421e-6j)

somme = (4.27901190526987 + 8.63906796039762j)
moyenne = (4.27901618428605e-6 + 8.63907659947422e-6j)
z = (4361238.86339807 - 8596843.21405815j)
je le divise par le carre de nmax (4.36123886339807e-6 - 8.59684321405815e-6j)

somme = (-7.40056740739068 + 5.93007999052512j)
moyenne = (-7.40057480796549e-6 + 5.93008592061104e-6j)
z = (-7343657.33792884 - 5999060.34169033j)
je le divise par le carre de nmax (-7.34365733792884e-6 - 5.99906034169033e-6j)
```

C'est n'importe quoi : je n'ai pas calculé des moyennes de sommes partielles : en divisant par $nmax$, pour un zéro de partie imaginaire donnée (14.134725 au hasard), j'ai calculé la moyenne des diverses fractions $\dfrac{1}{2^s}$, $\dfrac{1}{3^s}$, $\dfrac{1}{5^s}$, etc.

Je ne sais pas pourquoi la formule que j'ai appelée “somme-éclair” calcule directement un résultat vraiment proche : c'est comme si les fractions successives étaient écartées régulièrement, ce que je ne crois pas être le cas.

Penser à acheter des éponges, à force de les jeter, on finit par en manquer...