La Conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

17 Juin 2009

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*[1].

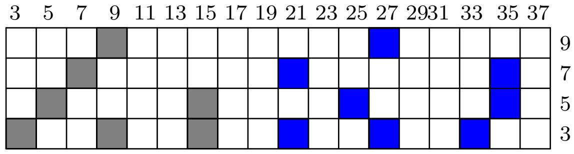
Les deux éléments essentiels qui nous ont permis d'aboutir aux idées qui sont présentées ici sont à rechercher tout d'abord dans l'article d'Euler *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs* dans lequel celui-ci présente une fonction récursive qui permet de calculer la somme des diviseurs d'un entier. D'autre part, nous nous sommes appuyés sur un domaine habituellement appelé l'arithmétique des tissus, dont Edouard Lucas est à l'origine et qui consiste à représenter les caractères de divisibilités des nombres comme les mailles colorées de pièces de tissus (penser au Jacquard), ce qui en facilite la visualisation, l'appréhension. Il s'agissait de mettre au point une méthode qui permettrait de borner inférieurement le nombre des décomposants de Goldbach d'un nombre pair donné[2].

2 Fondations

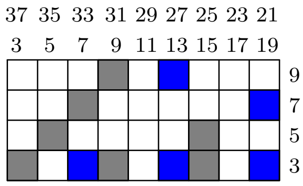
Présentons tout d'abord un exemple qui va montrer précisément ce que nous avions l'intention de compter. Considérons pour cela le nombre pair 40. Lorsque l'on cherche ses décomposants de Goldbach (i.e. les nombres premiers dont il est la somme), il suffit de s'intéresser aux nombres impairs dont il est la somme et étudier les caractères de divisibilité de chacun d'eux. On représente cela sur une "trame de tissu". On décide par convention de représenter la divisibilité des nombres inférieurs ou égaux à $x = 20$ par des cases grises et la divisibilité des nombres supérieurs à x par des cases bleues.

[1]La conjecture ayant été vérifiée par ordinateur jusqu'à des nombres très grands, notre analyse considèrera les nombres pairs supérieurs ou égaux à 24. En référence à cet article d'Euler qui nous a été très utile, on aurait pu appeler cette note *"Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport au nombre de leurs décomposants de Goldbach"*.

[2]Ici, on dira que le couple (p, q) est un décomposant de Goldbach de $2x$ si $2x = p + q$ avec p et q deux nombres premiers.



Choisissons maintenant de “plier le tissu” et d’en ramener toutes les cases sur un nombre de colonnes à peu près égal à x (ceci sera précisé car dans le cas d’un double de pair, la dernière colonne représente un seul nombre, alors qu’elle en représente deux dans le cas d’un double d’impair) en quelque sorte, on obtiendra par symétrie au tour de l’axe central le tissu suivant.



Il faut être attentif aux éléments suivants : notons la diagonale de cases grises à l’extrêmité gauche de la grille initiale (cette diagonale grise représente le fait qu’un nombre est divisible par lui-même) ; si, par pliage, des cases bleues se retrouvaient en-deçà de cette diagonale, on décide de les oublier (de ne pas colorer en bleu les cases qui, par symétrie, se seraient retrouvées à gauche de la diagonale de cases grises - ici par exemple, la dernière case bleue de la troisième ligne de la grille initiale). D’autre part, le pliage peut être amené à faire coïncider des cases bleues et des cases grises, le comptage que nous allons présenter maintenant les oubliera aussi.

On comprend immédiatement que les colonnes ne contenant aucune case colorée vont correspondre à certaines décompositions de Goldbach puisqu’elles sont indicées par des entêtes de colonne correspondant à deux nombres impairs dont ni l’un ni l’autre ne sont divisibles par l’un des nombres impairs compris entre 3 et $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

Si l’on s’intéresse maintenant à la suite des nombres pairs de 12 à 100 et que l’on associe à chacun d’eux un tissu plié, on va découvrir les régularités suivantes : intéressons-nous seulement aux cases colorées des premières lignes des grilles, correspondant à la divisibilité par 3, à partir du nombre 12, et comptons-les : on obtiendra la séquence de nombres suivante : 1,2,2,2,3,3,2,4,4,3,5,5,3,6,6,4,7,7,etc. On reconnaît un *motif* qui va pouvoir être défini très aisément par une fonction récursive. Intéressons-nous ensuite seulement aux cases colorées des deuxièmes lignes des grilles, correspondant à la divisibilité par 5, à partir du nombre 20 (au lieu du nombre 12). On obtient des valeurs identiques pour la séquence de nombres obtenue à celles de la première séquence (pour la divisibilité par 3) mais on n’a pas les mêmes occurences pour les nombres obtenus. On obtient : 1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,2,4,4,4,4,3,5,5,5,5,3,6,6,6,6,4,7,7,7,7,etc. Les nombres pour lesquels on trouve le nombre 1 qui initie la séquence sont identifiés comme étant de la forme $4(2k+1)$ (il s’agit des nombres 12, 20, 28, 36, etc).

Les valeurs successives apparaissent dans le même ordre pour tout k. Seul change le nombre d'éléments intermédiaires, qui font reconnaître des motifs de longueur $2(2k+1)$ pour les nombres pairs compris entre $4i(2k+1)$ et $4(i+1)(2k+1)$. Ces motifs sont de la forme suivante :

$$n \underbrace{2n \ldots 2n}_{2k \text{ fois}} n+1 \underbrace{2n+1 \ldots 2n+1}_{2k \text{ fois}}$$

En annexe 2 sont fournies toutes les grilles associées aux nombres pairs de 24 à 100.

Les nombres de lignes et de colonnes de chaque grille sont définis de la façon suivante :

- nombre de lignes de la grille associée à 2x $= \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ (il augmente de 1 à chaque fois que 2x est le double d'un carré)
- nombre de colonnes de la grille associée à 2x$= \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$ (il augmente de 1 une fois sur deux)

Ces analyses nous ont permis de découvrir la fonction récursive binaire f.

Soit la fonction récursive $f(x,i)$ définie pour i et k variant de 1 à l'infini.

Définition 2.1 (Définition de la fonction binaire f)

$$f((8i+4)x+2a,k) = \begin{cases} x & \text{si } a \ = \ 0 \\ f((8i+4)x,k)+1 & \text{si } a \ = \ 2k+1 \\ 2.f((8i+4)x,k) & \text{si } 1 \ \leq \ a \ < \ 2k+1 \\ 2.f((8i+4)x,k)+1 & \text{si } 2k+1 \ < \ a \ < \ 4k+2 \end{cases}$$

Définition 2.2 (Calcul du nombre de divisibles par $2k+1$)

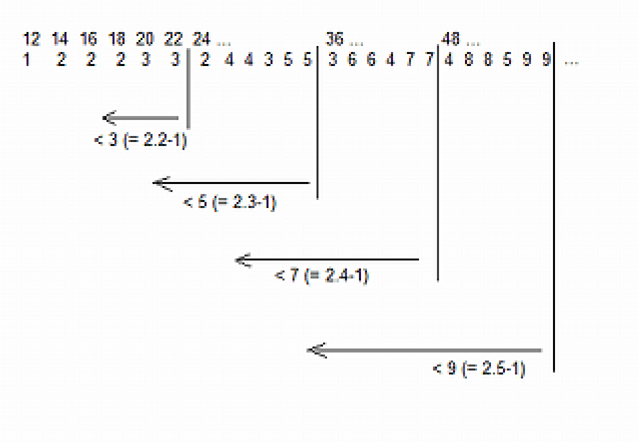
$$\sum_{\substack{i \ impair \\ 3 \ \leq \ i \ \leq \ \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor \\ 2x-i \geq i}} (2k+1 \mid i) \vee (2k+1 \mid 2x-i)$$

C'est par définition même que l'on a :

$$f(2x,k) = \sum_{\substack{i \ impair \\ 3 \ \leq \ i \ \leq \ \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor \\ 2x-i \geq i}} (2k+1 \mid i) \vee (2k+1 \mid 2x-i)$$

Il est important de bien noter deux choses : sous le signe Sigma de la somme, le $2x - i \geq i$ correspond à l'élimination des cases bleues qui par symétrie se retrouvent en-deçà de la diagonale de cases grises à l'extrême gauche. C'est d'autre part à cause du $\vee$ booléen que lorsque les cases bleues et les cases grises "coïncident" par pliage, sous prétexte que 2k+1 divise 2x, on ne compte qu'une case au lieu de deux (car $1 \vee 1 = 1$ dans l'algèbre de Boole). Ces remarques sont importantes car elles expriment toute la distinction qu'il y a entre la méthode présentée ici et les méthodes habituelles telles que le crible d'Erathosthène.

$2x$ étant fixé, pour tout i compris entre 1 et $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$, la valeur de $f(2x,i)$ est majorable. Cela se comprend aisément sur le dessin suivant (qui ne se préoccupe que d'une portion de la suite numérique proche de son début (démarrant à 12) et de la divisibilité par 3 (premières lignes (lignes en bas) des grilles).



Théorème 2.1 (Majoration du nombre de divisibles par $2k+1$)

$$f(2x,i) \leq 2\left\lceil \frac{2x}{8i+4} \right\rceil - 1$$

Définition 2.3 (Définition de la fonction binaire *majorant*)

$$majorant(2x,i) = 2\left\lceil \frac{2x}{8i+4} \right\rceil - 1.$$

Selon i, la fonction *majorant* est une fonction croissante de $2x$.

Théorème 2.2 (Croissance de la fonction binaire *majorant*)

$$\forall\, x \geq 12,\ \forall\, y \geq 12,\ \forall\, 1 \leq i \leq \lfloor\sqrt{x}\rfloor,$$
$$2x \geq 2y \Rightarrow majorant(2x,i) \geq majorant(2y,i)$$

En annexes 3 et 4 sont fournies les valeurs de $f(2x,i)$ pour $2x$ compris entre 24 et 100, ainsi que les valeurs de $majorant(2x,i)$ pour ces mêmes nombres. Pour un nombre pair $2x$ fixé, on rappelle que $f(2x,i)$ et $majorant(2x,i)$ sont calculés pour i prenant toutes les valeurs de 1 à $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$; les parenthèses délimitant les n-uplets ainsi que les virgules en séparant les coordonnées ont été omises.

3 Ordre lexicographique sur les numérateurs des rationnels associés à $2x$

On a besoin de définir maintenant un ordre lexicographique sur des n-uplets d'entiers dont on ne connaît pas la taille.

Cet ordre doit être tel que par exemple, $(3,3,1) < (5,3,1)$ ou bien $(5,3,1) < (5,3,3)$ ou encore $(7,5,3,3) < (9,5,3,3,3)$.

$(\mathbb{N}, \leq)$ est un ensemble ordonné.
On pose $\mathbb{N}uplets = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{N}^k$, la réunion de tous les produits cartésiens finis construit sur $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_0$ contient uniquement le singleton vide).

On définit l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}uplets$ de la façon suivante.

Soient $a = (a_1, \ldots, a_p)$ et $b = (b_1, \ldots, b_q)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{N}uplets$ tels que $p \leq q$.

$$a \ < \ b \textit{ si et seulement si } \forall\ i \ \leq \ p,\ a_i \ \leq \ b_i.$$

Définition 3.1 (Définition du n-uplet des numérateurs associé à $2x$)

$Numérateurs(2x) \ = \ (n_1, \ldots, n_k)$ *avec* $1 \ \leq \ k \leq \ \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ *et* $n_i \ = \ majorant(2x, i)$.

Théorème 3.1 (Ordre lexicographique sur les n-uplets des numérateurs)

$$\forall\ x \ \geq \ 12,\ \forall\ y \ \geq \ 12,\ 2x \ \geq \ 2y \ \Rightarrow \ Numérateurs(2x) \ \geq \ Numérateurs(2y)$$

Définition 3.2 (Définition de l'ensemble de probabilités majorantes associé à $2x$)

$$Probas(2x) = \left\{ \frac{majorant(2x, k)}{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor}, 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Rapporter ainsi les nombres $majorant(2x, k)$ au nombre de colonnes de la grille associée à $2x$ représente la probabilité qu'a chaque colonne de contenir une case colorée dans la ligne k (lorsque la deuxième coordonnée de la fonction $majorant$ vaut k, on considère la divisibilité par $2k+1$).

Par exemple, majorant(88,2) = 9. Le nombre de colonnes de la grille associée à 88 est 21. Le rationnel $\frac{9}{21}$ représente la probabilité que l'une des colonnes (chaque colonne, on le rappelle représente un couple d'impairs (p, q) supérieurs ou égaux à 3 dont la somme vaut 88) contienne au moins une case colorée, c'est à dire que p ou q soit un multiple de 5.

On a $Card(Probas(2x)) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

Et, de fait, $Card(Probas(2x + 2)) = Card(Probas(2x)) + 1$ lorsque $2x + 2$ est le double d'un carré, sinon $Card(Probas(2x + 2)) = Card(Probas(2x))$.

Définition 3.3 (Définition récursive de la formule du crible de Poincaré)

$$\begin{cases} crible(\emptyset) = 0. \\ crible(\left\{ \dfrac{p}{q} \right\} \cup E) = \dfrac{p}{q} + crible(E) - \dfrac{p}{q}.crible(E). \end{cases}$$

Définition 3.4 (Définition de la fonction *poincaré*)

$$poincaré(2x) = crible(Probas(2x))$$

La fonction *crible* qui a été définie ci-dessus correspond à ce que l'on a coutume d'appeler le principe d'inclusion / exclusion (ou formule de De Moivre, de Da Silva ou de Poincaré). La formulation mathématique de cette formule du crible est :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

L'application de la formule du crible est nécessitée par le fait qu'on ne sait pas quelle case colorée d'une ligne se trouve partager une colonne avec une case colorée d'une autre ligne.

On va appliquer la formule du crible aux ensembles de probabilités que l'on a identifiés pour trouver quelle est la probabilité que l'un de ces événements (qui représentent les caractères de divisibilité par les impairs successifs, et donc la nature d'être composé pour un nombre) advienne et nous multiplierons le complémentaire à 1 de cette probabilité par $moitié = \left\lfloor \dfrac{x-1}{2} \right\rfloor$, pour obtenir un nombre minorant le nombre de décomposants de Goldbach de $2x$.

Si les dénominateurs des rationnels intervenant dans la formule du crible étaient tous identiques, l'ordre lexicographique existant sur les n-uplets des numérateurs des nombres rationnels représentant des probabilités d'événements intervenant dans le calcul nous permettrait d'obtenir des résultats croissants.
Mais ce n'est pas le cas ici : une fois sur deux, le dénominateur des rationnels est augmenté de 1, ce qui nous fait appliquer la formule sur des nombres de plus en plus petits. Du fait de ce changement des dénominateurs, on ne peut être sûr pour l'instant qu'on va bien avoir un résultat croissant, qui nous permettra au-delà d'un certain nombre pair, d'obtenir toujours au moins un décomposant de Goldbach.

Il faut expliquer maintenant pourquoi l'application de la formule du crible aux ensembles $Probas(2x)$ pour les nombres pairs successifs permet cependant d'obtenir une borne inférieure au nombre de décomposants de Goldbach.
Dans un premier temps, on ne fait que constater qu'à partir du nombre pair 66, cette borne est supérieure ou égale à 1 et ne décroîtra plus jamais à 0.
Il faut expliquer précisément ce constat, en analysant la méthode proposée ici et en trouvant quel est l'écart maximum séparant $Probas(2x)$ de $Probas(2x+2)$.

En analysant les calculs effectués, on comprend que les ensembles de rationnels varient de la manière suivante entre $2x$ et $2x + 2$:

- Tout d'abord, on a vu qu'on peut ajouter un rationnel de plus à l'ensemble, sous prétexte que $2x + 2$ est le double d'un carré d'entier. L'analyse des numérateurs des rationnels obtenus dans un tel cas montre que le dernier rationnel ajouté à l'ensemble est majorable par $2\left\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4} \right\rceil - 1$.

- D'autre part, à cause de l'ordre lexicographique croissant existant sur les n-uplets des numérateurs des rationnels, on voit que l'on peut majorer l'augmentation associée à l'augmentation de certaines coordonnées des n-uplets lorsqu'on passe de l'ensemble $Probas(2x)$ à l'ensemble $Probas(2x+2)$ par le nombre

$$\frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8i+4)}{\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor}.$$

On obtient une majoration du résultat de l'application de la formule du crible à l'ensemble $Probas(2x)$, et ce pas à pas de 2x à 2x+2 selon la formule de récurrence :

Théorème 3.2 (Majoration de la formule du crible : formule de récurrence)

$$poincare(2x+2) < poincare(2x) + 2\left\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor + 4} \right\rceil - 1 + \frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8i+4)}{\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor}$$

On en déduit une majoration pour tout $2x$ du résultat de l'application de la formule du crible de Poincaré à l'ensemble des probabilités majorées.

Théorème 3.3 (Majoration globale de la formule du crible)

$$poincare(2x) \begin{cases} = 0.872 & \text{si } x = 12 \\ < 0.872 + 2\left\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4} \right\rceil - 1 + \frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8i+4)}{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor} & \text{si } x > 12 \end{cases}$$

En annexe 5, sont fournis les ensembles de probabilités $Probas(2x)$ pour $2x$ compris entre 24 et 100 et les valeurs de $poincaré(2x)$ pour ces mêmes nombres pairs.

Définissons $moitie = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$.

Théorème 3.4 (minoration du nombre de décomposants de Goldbach)

$$\forall\ 2x \geq 24,\ nombre\_de\_décomposants\_de\_Goldbach(2x) \geq (1 - poincare(2x))moitie$$

Théorème 3.5 (Conclusion)

$$\forall\ 2x \geq 68,\ nombre\_de\_décomposants\_de\_Goldbach(2x) \geq 1.$$

Annexe 1 : nouvelle caractérisation des nombres premiers

Dans la note ci-dessus, on n'a pas eu besoin d'utiliser les nombres exacts de divisibles (fournis par la fonction f) pour étudier la conjecture de Goldbach mais on va les utiliser maintenant pour obtenir une nouvelle caractérisation des nombres premiers.

Définition 3.5 (Définition de l'ensemble des nombres exacts de divisibles associé à $2x$)

$$Exact(2x) = \left\{ f(2x,k), 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Définissons la fonction booléenne *double* qui renvoie *vrai* si l'un des n-uplets est "un peu" le double de l'autre (i.e. les coordonnées de même position des deux n-uplets sont soit identiques, soit la seconde coordonnée est le double de la première).

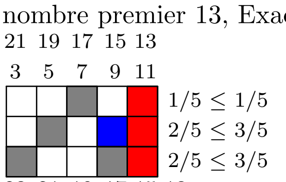
Définition 3.6 (Définition de la fonction *double*)

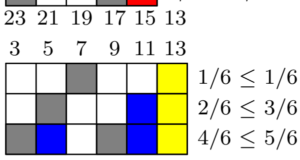
$$double(2x, 2y) \iff \begin{cases} Exact(2x) = (a_1, \ldots, a_m), \\ Exact(2y) = (b_1, \ldots, b_n), \\ \forall\ 1\ \leq i \leq\ min(m,n),\ a_i\ =\ b_i\ ou\ a_i\ =\ 2.b_i. \end{cases}$$

$$Premier(x) \iff \exists\ k\ \geq\ 6, (\ x = 2k+1) \wedge (double(Exact(2x), Exact(2x-2))).$$

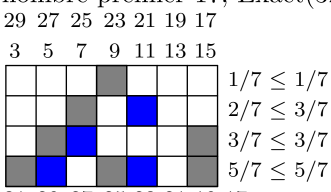
Observons tout d'abord les grilles associées aux doubles de nombres premiers conjointement à celles du double de leur prédécesseur.

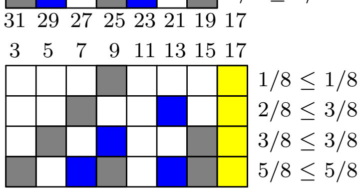
- nombre premier 13, Exact(24) = (2,2,1), Exact(26) = (4,2,1).





- nombre premier 17, Exact(32) = (5,3,2,1), Exact(34) = (5,3,2,1).

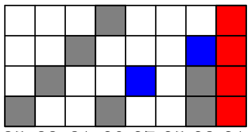




- nombre premier 19, Exact(36) = (3,3,2,1), Exact(38) = (6,3,2,2).

33 31 29 27 25 23 21 19

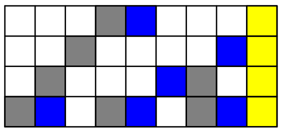
3 5 7 9 11 13 15 17



$1/8 \leq 1/8$
$2/8 \leq 3/8$
$3/8 \leq 3/8$
$3/8 \leq 5/8$

35 33 31 29 27 25 23 21 19

3 5 7 9 11 13 15 17 19

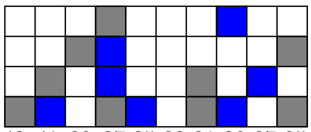


$2/9 \leq 3/9$
$2/9 \leq 3/9$
$3/9 \leq 3/9$
$6/9 \leq 7/9$

- nombre premier 23, Exact(44) = (7,4,3,2), Exact(46) = (7,4,3,2).

41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

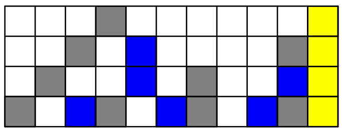
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



$2/10 \leq 3/10$
$3/10 \leq 3/10$
$4/10 \leq 5/10$
$7/10 \leq 7/10$

43 41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23

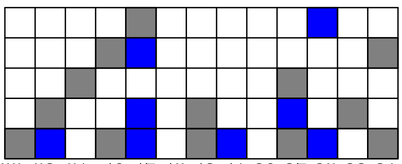


$2/11 \leq 3/11$
$3/11 \leq 3/11$
$4/11 \leq 5/11$
$7/11 \leq 7/11$

- nombre premier 29, Exact(56) = (9,5,2,3,2), Exact(58) = (9,5,4,3,2).

53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29

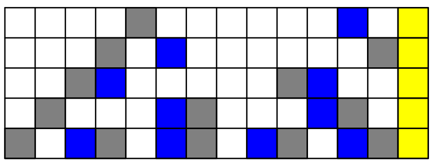
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27



$2/13 \leq 3/13$
$3/13 \leq 3/13$
$2/13 \leq 3/13$
$5/13 \leq 5/13$
$9/13 \leq 9/13$

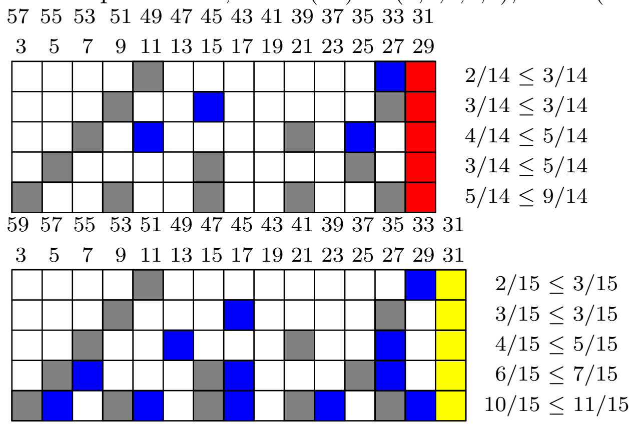
55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

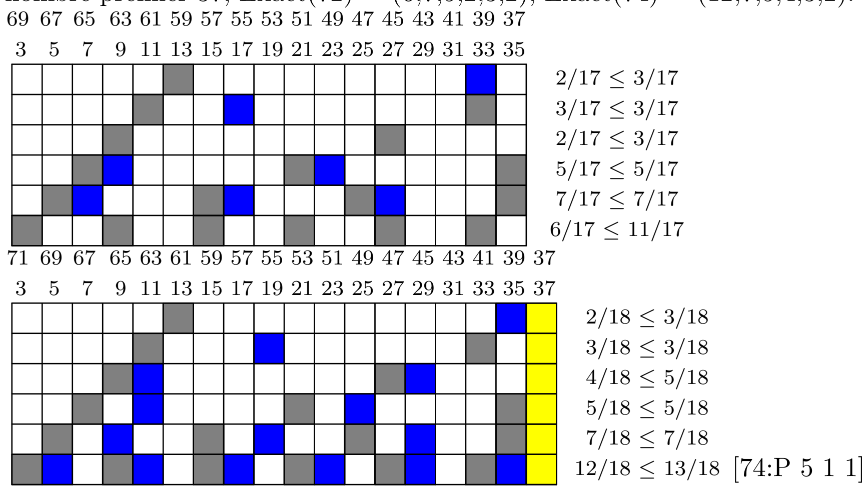


$2/14 \leq 3/14$
$3/14 \leq 3/14$
$4/14 \leq 5/14$
$5/14 \leq 5/14$
$9/14 \leq 9/14$

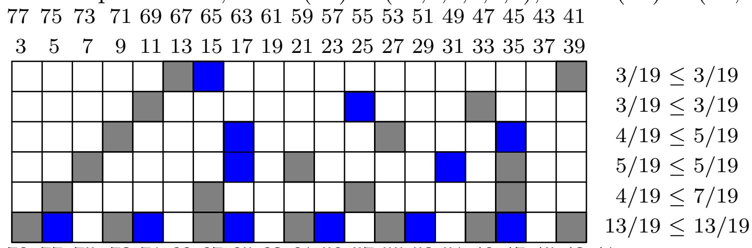
- nombre premier 31, Exact(60) = (5,3,4,3,2), Exact(62) = (10,6,4,3,2).

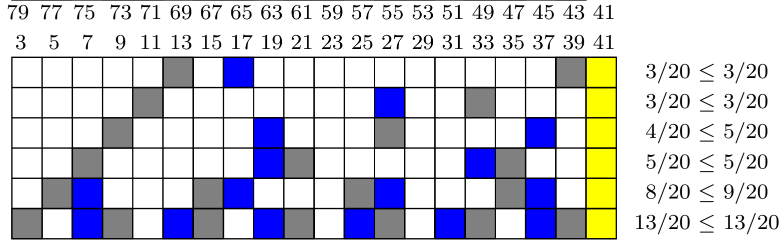


- nombre premier 37, Exact(72) = (6,7,5,2,3,2), Exact(74) = (12,7,5,4,3,2).



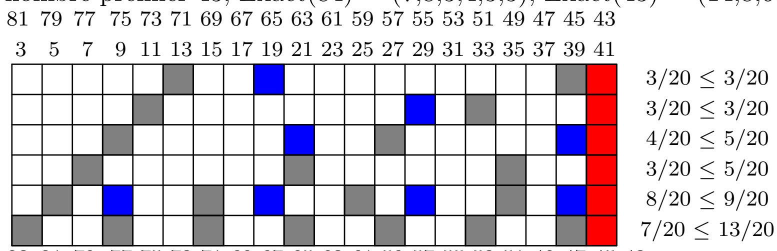
- nombre premier 41, Exact(80) = (13,4,5,4,3,3), Exact(82) = (13,8,5,4,3,3).



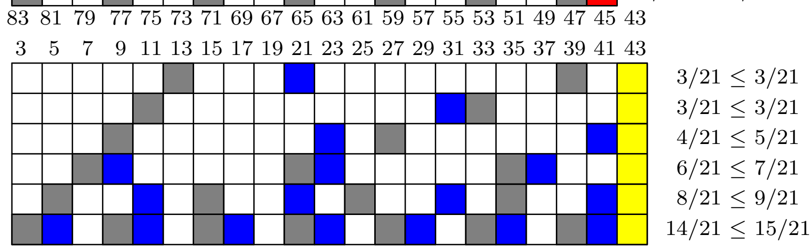


[82:P 5 1 1]

- nombre premier 43, Exact(84) = (7,8,3,4,3,3), Exact(43) = (14,8,6,4,3,3).

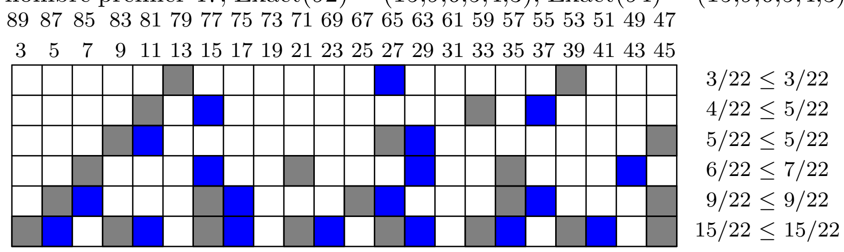


[84:J 3 1 1]

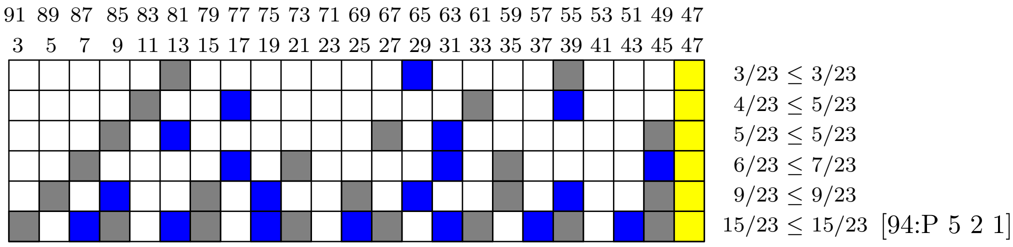


[86:P 5 1 1]

- nombre premier 47, Exact(92) = (15,9,6,5,4,3), Exact(94) = (15,9,6,5,4,3).

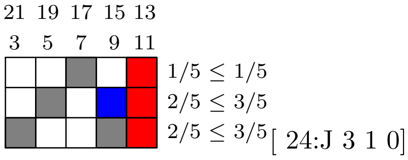


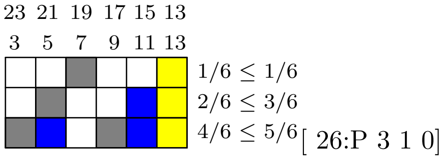
[92 4 1 1]

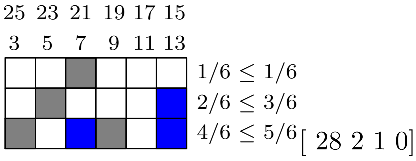


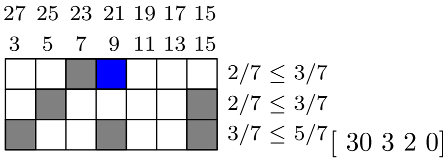
Annexe 2 : Représentation graphique de certains décomposants de Goldbach

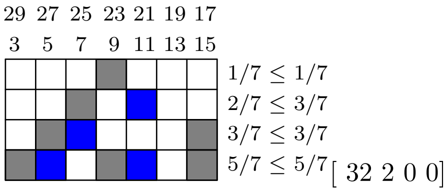
Les grilles ci-dessous sont à lire de la manière suivante : pour chaque nombre pair $2x$ compris entre 24 et 100, la colonne i pour i compris entre 1 et $\left\lfloor \dfrac{x-1}{2} \right\rfloor$ correspond à l'un des deux nombres impairs $2i+1$ et $2x-2i-1$. Les lignes quant à elles correspondent aux nombres impairs de 3 (en bas de la grille) à $2\lfloor\sqrt{x}\rfloor+1$ (en haut de la grille). Le fait de colorier une case en noir (resp. en bleu) signifie que le nombre correspondant à la ligne divise celui correspondant à la colonne, celui-ci étant compris entre 3 et x (resp. celui-ci étant compris entre x et $2x$). A droite de chaque grille, on fournit le nombre pair considéré, la lettre P pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre premier ou la lettre J pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre pair entre deux nombres premiers jumeaux (cela est représenté également par la coloration en jaune ou rouge de la dernière colonne qui ne présente ni case noire, ni case bleue). Puis sont fournis à droite des grilles d'une part les fractions rationnelles représentant pour chaque ligne la proportion de cases colorées en noir ou bleu, rapportée au nombre de colonnes de la grille et d'autre part, la fraction rationnelle majorante. Enfin, à côté du nombre pair, on indique le nombre réel de décompositions de Goldbach de ce nombre, le nombre effectif de colonnes sans cases colorées de la grille, et le nombre de décomposants de Goldbach obtenu par minoration.

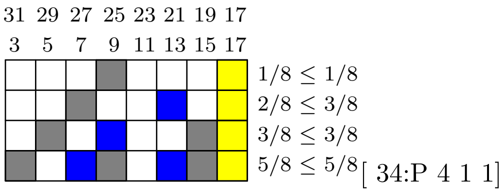

21 19 17 15 13
3 5 7 9 11
1/5 ≤ 1/5
2/5 ≤ 3/5
2/5 ≤ 3/5
[24:J 3 1 0]

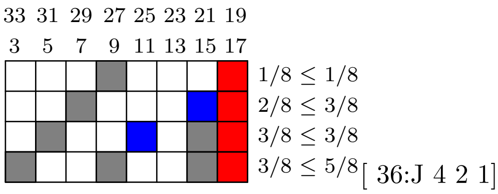

23 21 19 17 15 13
3 5 7 9 11 13
1/6 ≤ 1/6
2/6 ≤ 3/6
4/6 ≤ 5/6
[26:P 3 1 0]


25 23 21 19 17 15
3 5 7 9 11 13
1/6 ≤ 1/6
2/6 ≤ 3/6
4/6 ≤ 5/6
[28 2 1 0]


27 25 23 21 19 17 15
3 5 7 9 11 13 15
2/7 ≤ 3/7
2/7 ≤ 3/7
3/7 ≤ 5/7
[30 3 2 0]

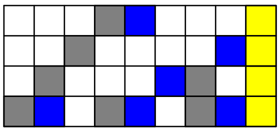

29 27 25 23 21 19 17
3 5 7 9 11 13 15
1/7 ≤ 1/7
2/7 ≤ 3/7
3/7 ≤ 3/7
5/7 ≤ 5/7
[32 2 0 0]


31 29 27 25 23 21 19 17
3 5 7 9 11 13 15 17
1/8 ≤ 1/8
2/8 ≤ 3/8
3/8 ≤ 3/8
5/8 ≤ 5/8
[34:P 4 1 1]


33 31 29 27 25 23 21 19
3 5 7 9 11 13 15 17
1/8 ≤ 1/8
2/8 ≤ 3/8
3/8 ≤ 3/8
3/8 ≤ 5/8
[36:J 4 2 1]

35 33 31 29 27 25 23 21 19

3 5 7 9 11 13 15 17 19



$2/9 \leq 3/9$

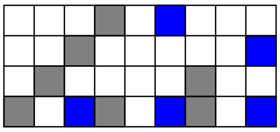
$2/9 \leq 3/9$

$3/9 \leq 3/9$

$6/9 \leq 7/9$ [38:P 2 1 0]

37 35 33 31 29 27 25 23 21

3 5 7 9 11 13 15 17 19



$2/9 \leq 3/9$

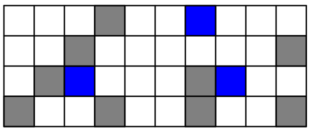
$2/9 \leq 3/9$

$2/9 \leq 3/9$

$6/9 \leq 7/9$ [40 3 1 0]

39 37 35 33 31 29 27 25 23 21

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



$2/10 \leq 3/10$

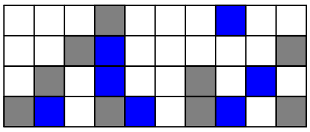
$2/10 \leq 3/10$

$4/10 \leq 5/10$

$4/10 \leq 7/10$ [42 4 2 0]

41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



$2/10 \leq 3/10$

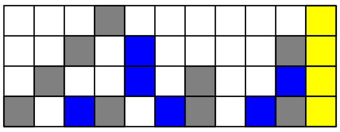
$3/10 \leq 3/10$

$4/10 \leq 5/10$

$7/10 \leq 7/10$ [44 3 1 0]

43 41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23



$2/11 \leq 3/11$

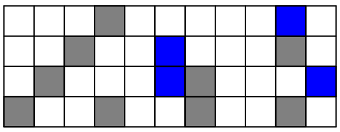
$3/11 \leq 3/11$

$4/11 \leq 5/11$

$7/11 \leq 7/11$ [46:P 4 1 1]

45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23



$2/11 \leq 3/11$

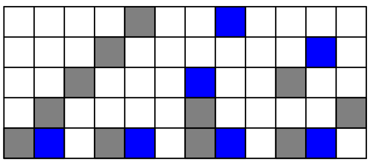
$3/11 \leq 3/11$

$4/11 \leq 5/11$

$4/11 \leq 7/11$ [48 5 2 1]

47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25



$2/12 \leq 3/12$

$2/12 \leq 3/12$

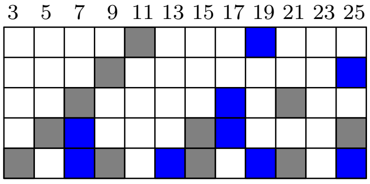
$3/12 \leq 3/12$

$3/12 \leq 5/12$

$8/12 \leq 9/12$ [50 4 1 0]

49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25



$2/12 \leq 3/12$

$2/12 \leq 3/12$

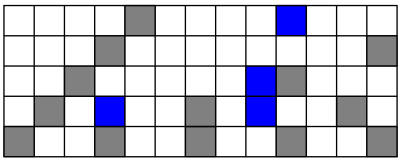
$3/12 \leq 3/12$

$5/12 \leq 5/12$

$8/12 \leq 9/12$ [52 3 1 0]

51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27



$2/13 \leq 3/13$

$2/13 \leq 3/13$

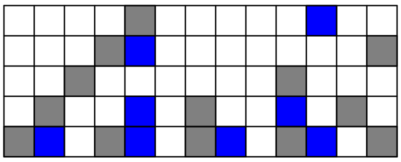
$3/13 \leq 3/13$

$5/13 \leq 5/13$

$5/13 \leq 9/13$ [54 5 2 1]

53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27



$2/13 \leq 3/13$

$3/13 \leq 3/13$

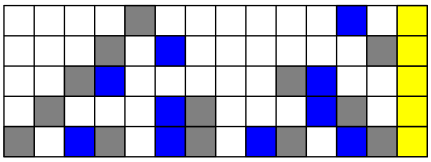
$2/13 \leq 3/13$

$5/13 \leq 5/13$

$9/13 \leq 9/13$ [56 3 1 1]

55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29



$2/14 \leq 3/14$

$3/14 \leq 3/14$

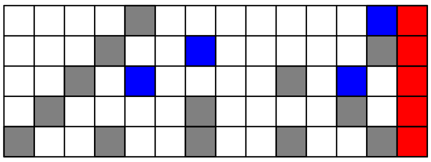
$4/14 \leq 5/14$

$5/14 \leq 5/14$

$9/14 \leq 9/14$ [58:P 4 1 1]

57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29



$2/14 \leq 3/14$

$3/14 \leq 3/14$

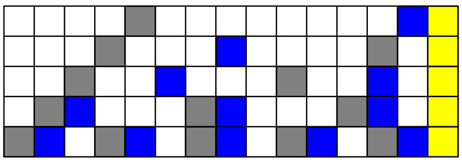
$4/14 \leq 5/14$

$3/14 \leq 5/14$

$5/14 \leq 9/14$ [60:J 6 3 1]

59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31



$2/15 \leq 3/15$

$3/15 \leq 3/15$

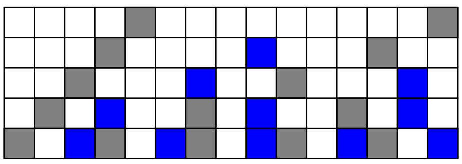
$4/15 \leq 5/15$

$6/15 \leq 7/15$

$10/15 \leq 11/15$ [62:P 3 1 0]

61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31



$2/15 \leq 3/15$

$3/15 \leq 3/15$

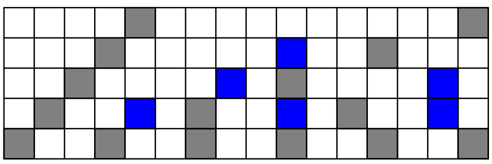
$4/15 \leq 5/15$

$6/15 \leq 7/15$

$10/15 \leq 11/15$ [64 5 1 0]

63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33



$2/15 \leq 3/15$

$3/15 \leq 3/15$

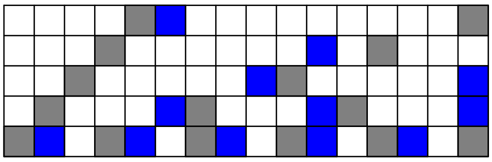
$4/15 \leq 5/15$

$6/15 \leq 7/15$

$6/15 \leq 11/15$ [66 6 3 1]

65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35

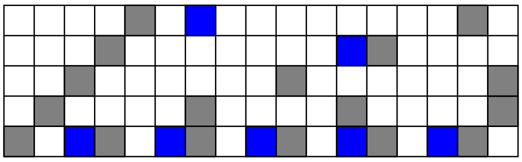
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33



$3/16 \leq 3/16$
$3/16 \leq 3/16$
$4/16 \leq 5/16$
$6/16 \leq 7/16$
$11/16 \leq 11/16$ [68 2 1 1]

67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35

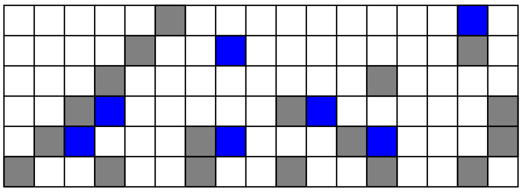
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35



$3/17 \leq 3/17$
$3/17 \leq 3/17$
$3/17 \leq 5/17$
$4/17 \leq 7/17$
$11/17 \leq 11/17$ [70 5 2 1]

69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37

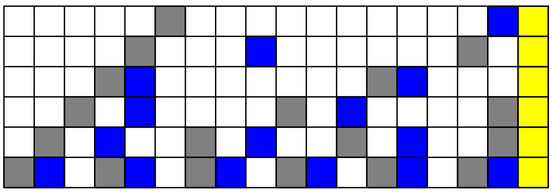
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35



$2/17 \leq 3/17$
$3/17 \leq 3/17$
$2/17 \leq 3/17$
$5/17 \leq 5/17$
$7/17 \leq 7/17$
$6/17 \leq 11/17$ [72 6 2 1]

71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37

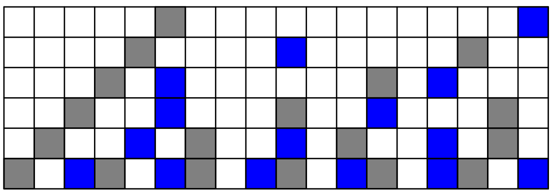
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37



$2/18 \leq 3/18$
$3/18 \leq 3/18$
$4/18 \leq 5/18$
$5/18 \leq 5/18$
$7/18 \leq 7/18$
$12/18 \leq 13/18$ [74:P 5 1 1]

73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39

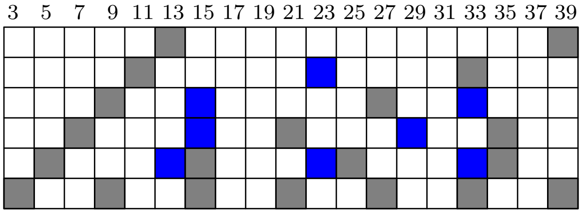
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37



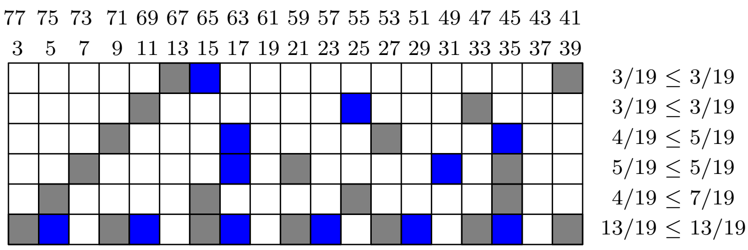
$2/18 \leq 3/18$
$3/18 \leq 3/18$
$4/18 \leq 5/18$
$5/18 \leq 5/18$
$7/18 \leq 7/18$
$12/18 \leq 13/18$ [76 5 1 1]

75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39

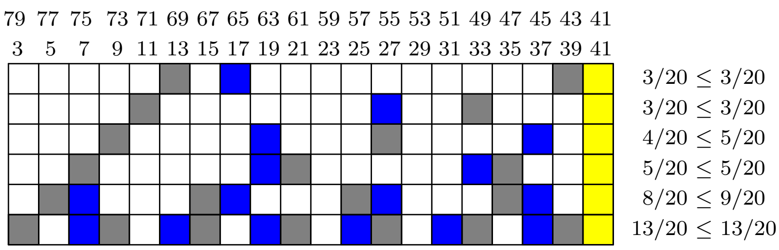
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39



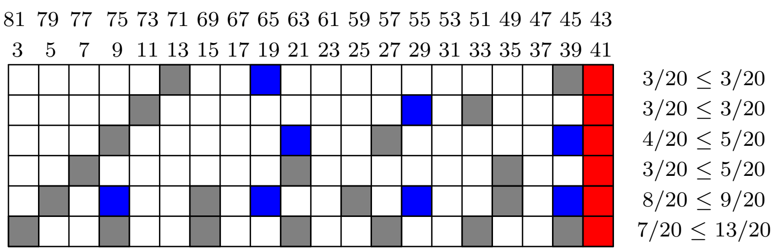
$2/19 \leq 3/19$
$3/19 \leq 3/19$
$4/19 \leq 5/19$
$5/19 \leq 5/19$
$7/19 \leq 7/19$
$7/19 \leq 13/19$ [78 7 3 1]



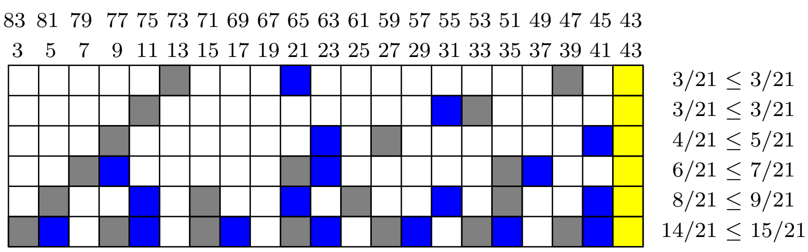
[80 4 1 1]



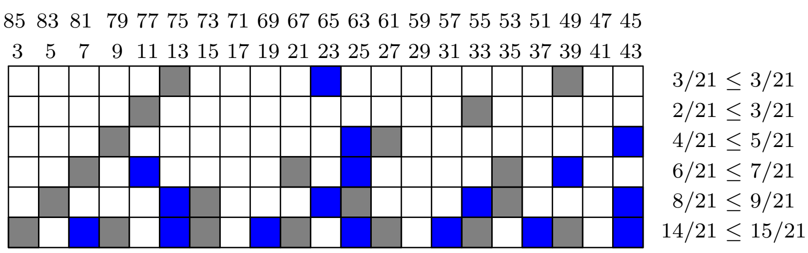
[82:P 5 1 1]



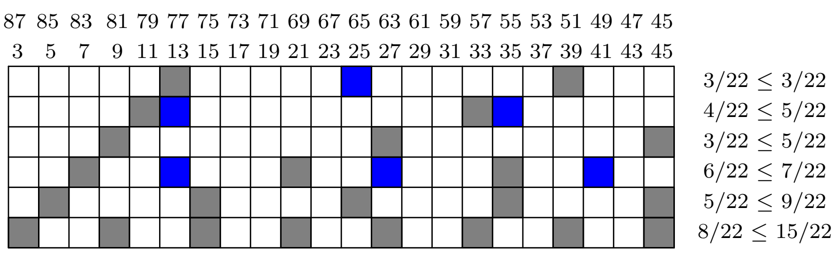
[84:J 3 1 1]



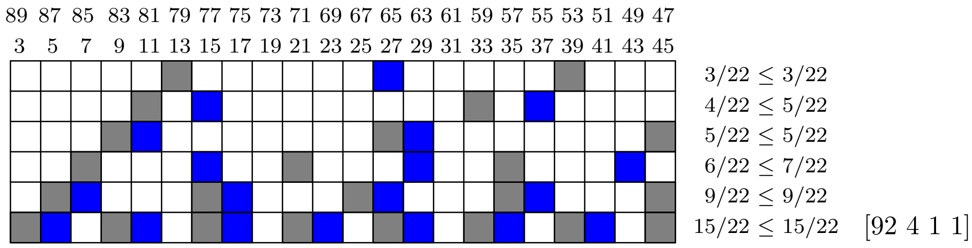
[86:P 5 1 1]

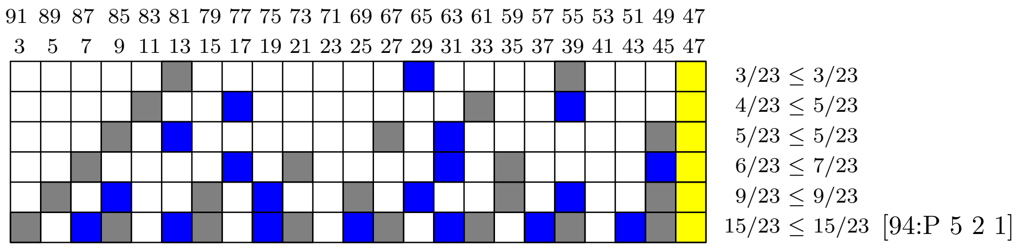


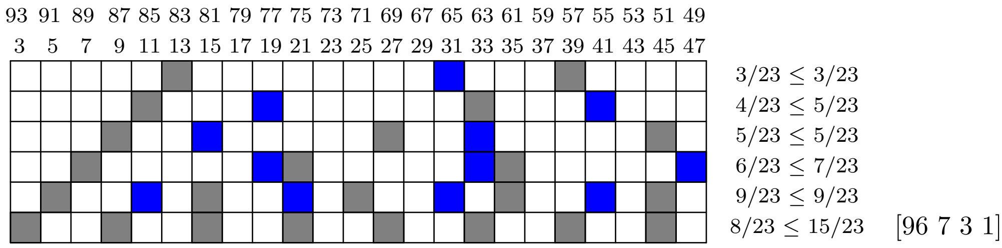
[88 4 1 1]

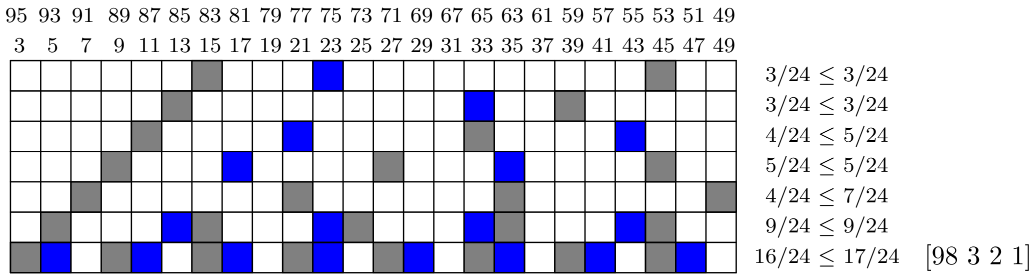


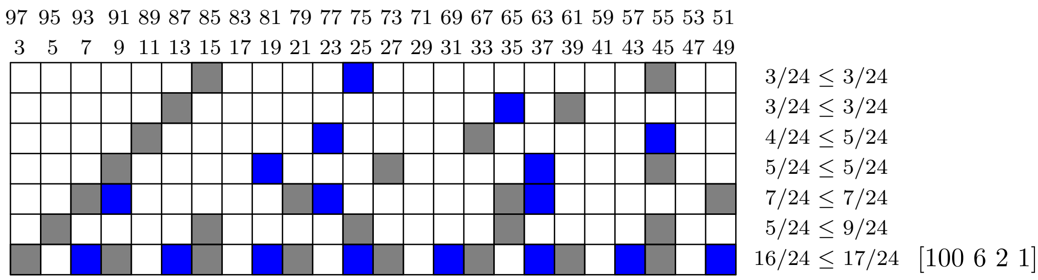
[90 9 4 1]


89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45
3/22 ≤ 3/22
4/22 ≤ 5/22
5/22 ≤ 5/22
6/22 ≤ 7/22
9/22 ≤ 9/22
15/22 ≤ 15/22
[92 4 1 1]


91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
3/23 ≤ 3/23
4/23 ≤ 5/23
5/23 ≤ 5/23
6/23 ≤ 7/23
9/23 ≤ 9/23
15/23 ≤ 15/23
[94:P 5 2 1]


93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47
3/23 ≤ 3/23
4/23 ≤ 5/23
5/23 ≤ 5/23
6/23 ≤ 7/23
9/23 ≤ 9/23
8/23 ≤ 15/23
[96 7 3 1]


95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
3/24 ≤ 3/24
3/24 ≤ 3/24
4/24 ≤ 5/24
5/24 ≤ 5/24
4/24 ≤ 7/24
9/24 ≤ 9/24
16/24 ≤ 17/24
[98 3 2 1]


97 95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
3/24 ≤ 3/24
3/24 ≤ 3/24
4/24 ≤ 5/24
5/24 ≤ 5/24
7/24 ≤ 7/24
5/24 ≤ 9/24
16/24 ≤ 17/24
[100 6 2 1]

Annexe 3 : résultat du calcul des $f(2x, k)$, k compris entre 1 et le nombre de lignes de la grille associée à $2x$

24 : 2 2 1	52 : 8 5 3 2 2	80 : 13 4 5 4 3 3
26 : 4 2 1	54 : 5 5 3 2 2	82 : 13 8 5 4 3 3
28 : 4 2 1	56 : 9 5 2 3 2	84 : 7 8 3 4 3 3
30 : 3 2 2	58 : 9 5 4 3 2	86 : 14 8 6 4 3 3
32 : 5 3 2 1	60 : 5 3 4 3 2	88 : 14 8 6 4 2 3
34 : 5 3 2 1	62 : 10 6 4 3 2	90 : 8 5 6 3 4 3
36 : 3 3 2 1	64 : 10 6 4 3 2	92 : 15 9 6 5 4 3
38 : 6 3 2 2	66 : 6 6 4 3 2	94 : 15 9 6 5 4 3
40 : 6 2 2 2	68 : 11 6 4 3 3	96 : 8 9 6 5 4 3
42 : 4 4 2 2	70 : 11 4 3 3 3	98 : 16 9 4 5 4 3 3
44 : 7 4 3 2	72 : 6 7 5 2 3 2	100 : 16 5 7 5 4 3 3
46 : 7 4 3 2	74 : 12 7 5 4 3 2	
48 : 4 4 3 2	76 : 12 7 5 4 3 2	
50 : 8 3 3 2 2	78 : 7 7 5 4 3 2	

Annexe 4 : résultat du calcul des $majorant(2x, k)$, k compris entre 1 et le nombre de lignes de la grille associée à $2x$

24 : 3 3 1	52 : 9 5 3 3 3	80 : 13 7 5 5 3 3
26 : 5 3 1	54 : 9 5 3 3 3	82 : 13 9 5 5 3 3
28 : 5 3 1	56 : 9 5 3 3 3	84 : 13 9 5 5 3 3
30 : 5 3 3	58 : 9 5 5 3 3	86 : 15 9 7 5 3 3
32 : 5 3 3 1	60 : 9 5 5 3 3	88 : 15 9 7 5 3 3
34 : 5 3 3 1	62 : 11 7 5 3 3	90 : 15 9 7 5 5 3
36 : 5 3 3 1	64 : 11 7 5 3 3	92 : 15 9 7 5 5 3
38 : 7 3 3 3	66 : 11 7 5 3 3	94 : 15 9 7 5 5 3
40 : 7 3 3 3	68 : 11 7 5 3 3	96 : 15 9 7 5 5 3
42 : 7 5 3 3	70 : 11 7 5 3 3	98 : 17 9 7 5 5 3 3
44 : 7 5 3 3	72 : 11 7 5 3 3 3	100 : 17 9 7 5 5 3 3
46 : 7 5 3 3	74 : 13 7 5 5 3 3	
48 : 7 5 3 3	76 : 13 7 5 5 3 3	
50 : 9 5 3 3 3	78 : 13 7 5 5 3 3	

Annexe 5 : Ensembles $Probas(2x)$ et valeur de poincaré($2x$) pour $2x$ compris entre 24 et 100

$Probas(24) = \left\{\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right\}.$
$poincaré(24) = 0.872.$

Probas(26) $= \left\{\frac{5}{6}, \frac{3}{6}, \frac{1}{6}\right\}.$
$poincaré(26) = 0.930556.$

Probas(28) $= \left\{\frac{5}{6}, \frac{3}{6}, \frac{1}{6}\right\}.$
$poincaré(28) = 0.930556.$

Probas(30) $= \left\{\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right\}.$
$poincaré(30) = 0.906706.$

Probas(32) $= \left\{\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right\}.$
$poincaré(32) = 0.920033.$

Probas(34) $= \left\{\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right\}$.
poincaré(34) = 0.871826.

Probas(36) $= \left\{\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right\}$.
poincaré(36) = 0.871826.

Probas(38) $= \left\{\frac{7}{9}, \frac{3}{9}, \frac{3}{9}, \frac{3}{9}\right\}$.
poincaré(38) = 0.934156.

Probas(40) $= \left\{\frac{7}{9}, \frac{3}{9}, \frac{3}{9}, \frac{3}{9}\right\}$.
poincaré(40) = 0.934156.

Probas(42) $= \left\{\frac{7}{10}, \frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right\}$.
poincaré(42) = 0.9265.

Probas(44) $= \left\{\frac{7}{10}, \frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right\}$.
poincaré(44) = 0.9265.

Probas(46) $= \left\{\frac{7}{11}, \frac{5}{11}, \frac{3}{11}, \frac{3}{11}\right\}$.
poincaré(46) = 0.895089.

Probas(48) $= \left\{\frac{7}{11}, \frac{5}{11}, \frac{3}{11}, \frac{3}{11}\right\}$.
poincaré(48) = 0.895089.

Probas(50) $= \left\{\frac{9}{12}, \frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}\right\}$.
poincaré(50) = 0.938477.

Probas(52) $= \left\{\frac{9}{12}, \frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}\right\}$.
poincaré(52) = 0.938477.

Probas(54) $= \left\{\frac{9}{13}, \frac{5}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13}\right\}$.
poincaré(54) = 0.913815.

Probas(56) $= \left\{\frac{9}{13}, \frac{5}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13}\right\}$.
poincaré(56) = 0.913815.

Probas(58) $= \left\{\frac{9}{14}, \frac{5}{14}, \frac{5}{14}, \frac{3}{14}, \frac{3}{14}\right\}$.
poincaré(58) = 0.908883.

Probas(60) $= \left\{\frac{9}{14}, \frac{5}{14}, \frac{5}{14}, \frac{3}{14}, \frac{3}{14}\right\}$.
poincaré(60) = 0.908883.

Probas(62) $= \left\{\frac{11}{15}, \frac{7}{15}, \frac{5}{15}, \frac{3}{15}, \frac{3}{15}\right\}$.
poincaré(62) = 0.939319.

Probas(64) $= \left\{\frac{11}{15}, \frac{7}{15}, \frac{5}{15}, \frac{3}{15}, \frac{3}{15}\right\}$.
poincaré(64) = 0.939319.

Probas(66) $= \left\{\frac{11}{16}, \frac{7}{16}, \frac{5}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}\right\}$.
poincaré(66) = 0.92022.

Probas(68) $= \left\{\frac{11}{16}, \frac{7}{16}, \frac{5}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}\right\}$.
poincaré(68) = 0.92022.

Probas(70) $= \left\{\frac{11}{17}, \frac{7}{17}, \frac{5}{17}, \frac{3}{17}, \frac{3}{17}\right\}$.
poincaré(70) $= 0.90061$.

Probas(72) $= \left\{\frac{11}{17}, \frac{7}{17}, \frac{5}{17}, \frac{3}{17}, \frac{3}{17}, \frac{3}{17}\right\}$.
poincaré(72) $= 0.918149$.

Probas(74) $= \{\frac{13}{18}, \frac{7}{18}, \frac{5}{18}, \frac{5}{18}, \frac{3}{1}\,8, \frac{3}{18}$.
poincaré(74) $= 0.938511$.

Probas(76) $= \left\{\frac{13}{18}, \frac{7}{18}, \frac{5}{18}, \frac{5}{18}, \frac{3}{18}, \frac{3}{18}\right\}$.
poincaré(76) $= 0.938511$.

Probas(78) $= \left\{\frac{13}{19}, \frac{7}{19}, \frac{5}{19}, \frac{5}{19}, \frac{3}{19}, \frac{3}{19}\right\}$.
poincaré(78) $= 0.92321$.

Probas(80) $= \left\{\frac{13}{19}, \frac{7}{19}, \frac{5}{19}, \frac{5}{19}, \frac{3}{19}, \frac{3}{19}\right\}$.
poincaré(80) $= 0.92321$.

Probas(82) $= \left\{\frac{13}{20}, \frac{9}{20}, \frac{5}{20}, \frac{5}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}\right\}$.
poincaré(82) $= 0.921767$.

Probas(84) $= \left\{\frac{13}{20}, \frac{9}{20}, \frac{5}{20}, \frac{5}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}\right\}$.
poincaré(84) $= 0.921767$.

Probas(86) $= \left\{\frac{15}{21}, \frac{9}{21}, \frac{7}{21}, \frac{5}{21}, \frac{3}{21}, \frac{3}{21}\right\}$.
poincaré(86) $= 0.939073$.

Probas(88) $= \left\{\frac{15}{21}, \frac{9}{21}, \frac{7}{21}, \frac{5}{21}, \frac{3}{21}, \frac{3}{21}\right\}$.
poincaré(88) $= 0.939073$.

Probas(90) $= \left\{\frac{15}{22}, \frac{9}{22}, \frac{7}{22}, \frac{5}{22}, \frac{5}{22}, \frac{3}{22}\right\}$.
poincaré(90) $= 0.933893$.

Probas(92) $= \left\{\frac{15}{22}, \frac{9}{22}, \frac{7}{22}, \frac{5}{22}, \frac{5}{22}, \frac{3}{22}\right\}$.
poincaré(92) $= 0.933893$.

Probas(94) $= \left\{\frac{15}{23}, \frac{9}{23}, \frac{7}{23}, \frac{5}{23}, \frac{5}{23}, \frac{3}{23}\right\}$.
poincaré(94) $= 0.921558$.

Probas(96) $= \left\{\frac{15}{23}, \frac{9}{23}, \frac{7}{23}, \frac{5}{23}, \frac{5}{23}, \frac{3}{23}\right\}$.
poincaré(96) $= 0.921558$.

Probas(98) $= \left\{\frac{17}{24}, \frac{9}{24}, \frac{7}{24}, \frac{5}{24}, \frac{5}{24}, \frac{3}{24}, \frac{3}{24}\right\}$.
poincaré(98) $= 0.938041$.

Probas(100) $= \left\{\frac{17}{24}, \frac{9}{24}, \frac{7}{24}, \frac{5}{24}, \frac{5}{24}, \frac{3}{24}, \frac{3}{24}\right\}$.
poincaré(100) $= 0.938041$.