Extrait d'une conférence du 15 juin 2011 de Pierre Boulez et Alain Connes à l'IRCAM au sujet de la créativité en musique et mathématiques (DC 30/12/13)

Pierre Boulez explique [1] : "Quand je regarde la musique, je commence par essayer d'en comprendre la forme".

[puis, à propos de non-experts s'exprimant au sujet d'une musique entendue] "Il n'y avait *(de leur part)* aucune conception de la forme mais il y avait une conception des évènements et des évènements qui n'étaient pas liés par une forme, mais des évènements séparés.
C'est très difficile d'approcher une forme même car une forme est vraiment disons... ce que... comment la personne la regarde.
Quand on voit le détail *(d'une partition musicale)*, on voit comment le discours se construit, s'il se construit plus horizontalement que verticalement ou plus verticalement qu'horizontalement, par cassure ou continuité".

Notes (!)
J'applique la méthode préconisée par Francis Brown : je regarde intensément mes grilles de divisibilité, et j'attends qu'un miracle se produise...
Pourquoi une colonne vide (qui dénote une décomposition de Goldbach) n'est pas perdue d'une grille à la suivante ; il y a quelque-chose qui ne bouge pas, au fur et à mesure du processus, un invariant qui fait qu'une condition est conservée et cette condition garantit la non-perte de l'existence d'un décomposant de Goldbach. On voit bien ce qui ne varie pas d'une grille à l'autre : c'est la forme (au sens de Pierre Boulez) des configurations bleues ou grises ; pour décrire mathématiquement une forme, il faut utiliser les distances entre les sommets de la forme et dans le cas qui nous intéresse, les sommets en question correspondent aux restes des différents entiers dans les différents corps premiers, les coordonnées de points qu'on a définies dans d'autres notes. On a le sentiment de s'approcher un peu du but, mais il semble tout de même encore très loin...

1. entre les minutes 19 et 21

La créativité en musique et en mathématiques

Pierre Boulez et Alain Connes [1]

INTRODUCTION : Bonsoir à tous, je vous souhaite la bienvenue au cœur de l'Ircam dans l'espace de projection pour cette rencontre inédite entre un mathématicien, entre Alain Connes, et un compositeur, Pierre Boulez. Alors, cette rencontre appartient au festival Agora, qui interroge la relation entre l'invention et la contrainte, entre finalement l'intuition et la logique. Et il nous semblait très important de placer ce soir ce point nodal de rencontre, cette tentative de rencontre entre deux mondes qui coexistent et qui, peut être, ont des choses à se dire.

Alors je voulais simplement vous signaler que, évidemment, il sera question de la déduction dans l'opération artistique comme de l'intuition dans l'opération mathématique. Et c'est le *comme* qui est une relation insondable et assez complexe. Gérard Assayag, directeur de l'Unité mixte de recherche CNRS-Ircam, va animer, s'il en est besoin, ce débat, en tout cas, va servir de catalyseur. Et je voulais aussi dire que ce débat s'inscrit dans le cadre de la conférence Mathématiques et musique, conférence internationale qui a lieu au moment d'Agora.

Peut être que cette conférence décrètera l'irréductibilité entre l'invention artistique et l'invention mathématique. Mais irréductible est un terme qui a été interrogé par les mathématiciens. Donc, nous restons dans le domaine mathématique. En guise de lancer, je ne voulais faire qu'une citation, comme on fait souvent en France pour commencer ou pour terminer, une citation du plus intuitif et peut être du plus déductif de tous les esprits, Leibniz, qui disait et qui parlait certainement aux compositeurs autant qu'aux scientifiques : *"Le monde parfait est le monde le plus simple en hypothèses et le plus riche en phénomènes."*.

Je cède la parole à Gérard Assayag.

1. Cette conférence s'est tenue à l'IRCAM le 15 juin 2011. Elle est visionnable à l'adresse : https://medias.ircam.fr/x70ce3e$_{p}ierre-boulez-et-alain-connes-la-creativ$

Gérard Assayag : Merci Franck. Nous allons commencer par une courte présentation de Pierre Boulez et ensuite s'engagera un dialogue en partie, mais en partie seulement improvisé.

Pierre Boulez : Bien, alors un petit texte au début, pour lancer un peu le débat, parce que ce n'est pas du tout un texte définitif et dogmatique. C'est un texte, au contraire plutôt sceptique, je dirais. Si, pour rendre compte d'une œuvre, on parle de musique mathématique, il ne s'agit pas d'un alliage très cordial. Ces deux mots, si près l'un de l'autre, indiquent une œuvre rébarbative, sèche, inexpressive, ennuyeuse.

Elle ne vient pas du cœur, ne retourne pas au cœur, pour citer, une fois de plus, ce grand modèle, mais sort du cerveau et ne va même pas à un autre cerveau. C'est donc déjà une sorte de réhabilitation de la réflexion, de la réflexion musicale que de rapprocher directement les deux mots mathématiques, musique, et d'y ajouter le troisième mot contact, mot discret, sans prétention, mais signe d'une volonté on ne peut plus déterminée. Bien évidemment, ce n'est pas la première fois que ce rapprochement est tenté.

Depuis le quadrivium au Moyen Âge, jusqu'aux travaux de Rameau et d'Alembert et jusqu'aux constructions mystiques de Scriabine. On a même beaucoup écrit. Et cependant, il existe toujours une sorte de frontière non dite entre la créativité musicale et la structure du langage expliquée ou du moins approchée scientifiquement. Quand un musicien, un compositeur s'approche de l'outil informatique, qu'il désire utiliser le matériel électronique, plusieurs malentendus peuvent surgir, difficiles à surmonter. Désirant avant tout l'outil qui lui permette de travailler de proche en proche, il s'attache à un rendement immédiat. Il s'attend à ce qu'on lui fasse des propositions, qu'on lui fournisse des exemples. À partir de là, il peut imiter ces exemples ou essayer de les transgresser en modifiant les paramètres qu'on lui propose. Mais il peut très bien ne pas aller plus loin et délaisser cet outil qu'il a tout juste effleuré. Le second écueil, c'est de transcrire trop littéralement des procédés, des schémas plutôt, qui lui sont fournis par l'outil mathématique ou arithmétique.

Ce qui, dans un cas, a un sens, est pertinent, n'a plus de sens dans la transcription littérale. Autant la première approche que je signale est basée sur la perception immédiate et ne se soucie pas de codifier en vue d'un langage, autant la seconde approche s'inquiète fort peu, voire pas du tout, de la perception, et se fie bien davantage à la notion de schéma pouvant s'appliquer indifféremment à tout paramètre. Ne tenant compte que de la perception, on n'arrive pas à organiser un langage, les objets que l'on a trouvés n'étant pas assez forts pour cela. Si l'on ne tient pas compte de la perception, le langage ne peut se constituer que d'une façon proprement hasardeuse, les paramètres n'ayant pas la même valeur dans le modèle et dans la transcription.

C'est là où le critère esthétique fait son apparition. Choix ou rejet des solutions proposées ? Faire face au tableau fut-il total des possibles. L'intuition devient comme un court-circuit indispensable. C'est ainsi que parmi tous les univers possibles d'intervalles, de durées, de dynamiques, etc., l'intuition va choisir celle qui servira le compositeur au moment où la solution va acquérir toute sa nécessité. Plus on sera capable de maîtriser cet univers des possibles, plus l'intuition aura servi de critère absolu dans cet instant du choix plus ou moins approché d'une certaine vérité dont on a besoin à un moment donné.

D'ailleurs, que l'on pense musique avec ou sans interprète, une musique combinée entre électronique et instrument ou une musique purement électronique, il reste à trouver le geste et la forme. Là, on n'a plus affaire à des objets, mais à des textures qui, en changeant continument ou par cassure, vont occuper un espace-temps. Quel modèle mathématique va nous donner la possibilité de trouver ce geste qui va justifier toutes les autres catégories ?

De ce point de vue, j'ai trouvé tout à fait approprié la citation de Mallarmé placée en tête de ce symposium. *"Un coup de dés jamais n'abolira le hasard."*. Pour résumer mon attitude de compositeur, je dirais que je n'attends pas tout d'une organisation systématique de quelques paramètres que ce soient. Je suppose que l'invention, si elle se réalise, ne peut se faire que si elle admet l'accident, l'imprévu qui remet en question ce que l'on avait cru établir.

Autant que j'en puisse juger, l'intuition scientifique passe par les mêmes phases. Et sur ce terrain incertain, elle est en mesure de se confronter avec l'intuition musicale. C'est une profession de foi bien fragile, certes, que je propose, mais je dois, je crois, davantage à cette fragilité qu'à la sécurité des dogmes. Je la crois plus riche de promesses.

Gérard Assayag : Votre conclusion illustre une tension qui, me semble-t-il, traverse votre oeuvre qui est la tension entre système et liberté. Et dans un entretien récent à la revue Musik Blätter, revenant sur *Le marteau sans maître*, vous indiquez bien comment cette œuvre avait marqué son temps par une combinaison de constructivisme très achevé, même un peu rigide, issu de l'école de Vienne, mais d'une liberté ornementale et d'une certaine fraîcheur qu'on a pu appeler l'esprit français disons. Donc, l'idée était de travailler avec le constructivisme, mais de manière à y être libre. Or, c'est une chose qui ne va pas de soi et je me dis que c'est peut être une problématique que rencontre aussi le mathématicien. Qu'en pensez vous Alain Connes ?

Alain Connes : Disons que j'ai un peu réfléchi, donc, à ces deux aspects qui sont des aspects dont on parle assez peu en mathématique, qui sont justement la créativité et le rôle de l'esthétique. Et je crois que je vais vous livrer quelques réflexions que j'ai eues là dessus, mais simplement comme un point de départ. Je pense que ça correspondra bien à ce dont vous avez parlé. Donc, en fait, a priori, lorsqu'on parle de créativité en mathématiques, le mathématicien est un peu sceptique parce que l'essentiel de la tâche du mathématicien, c'est résoudre des problèmes. Et c'est en gros une tâche de découverte. C'est-à-dire que le mathématicien est à la recherche de vérités, qui préexistent à sa présence, avant qu'il commence à chercher. Et ce qui est assez extraordinaire, justement, vous parliez de cette relation avec les mathématiques, ce qui est assez extraordinaire, c'est de voir que l'évolution des mathématiques qui a eu lieu au XX$^{\text{ème}}$ siècle, en fait, permet déjà le rapprochement entre la musique et les mathématiques. Pourquoi ? Parce que, en fait, le rôle des mathématiques qui, au départ, était un rôle qu'on pourrait en gros résumer comme une partie de la physique, est devenu, au fil des mathématiques qu'on appelle modernes, des mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle, en fait, c'est devenu un espèce de substitut de la philosophie au niveau de la création des concepts. Et ce qui est assez remarquable, en fait, c'est que justement... Cette transition, on peut presque la faire remonter à Galois. Et ce qui est assez remarquable, c'est qu'un peu comme en musique, elle a engendré au départ des résistances considérables et qui continuent à se manifester de manière sporadique. Mais je vais vous citer... Est-ce que ça dérange si je fais une citation en anglais parce que c'est un texte qui est en anglais au départ.

Mais c'est un texte très récent d'un mathématicien bien connu qui s'appelle Vladimir Arnold, et qui parle des mathématiques, et qui parle de l'enseignement des mathématiques, et qui parle des mathématiques modernes. Ne vous en faites pas, je suis français, donc je défendrai le point de vue français après. Mais il faut quand même que j'expose au départ ce point de vue. Donc il dit : "*Mathematics is a part of physics, physics is an experimental science, a part of natural science, mathematics is the part of physics where experiments are cheap.* (rires)*. In the middle of the twentieth century, it was attempted to divide physics and mathematics. The consequences turned out to be catastrophic. Whole generations of mathematicians grew up without knowing half of their science, and of course in total ignorance of any other sciences. They first began teaching their ugly scholastic pseudo-mathematics to their students.*"

Il continue, il continue, et son texte est très amusant, il est plein de piques, etc. Et il dit ensuite : "*The ugly building built by under-educated mathematicians who were exhausted by their inferiority complex and who were unable to make themselves familiar with physics, reminds one's...*" Bon, alors après, il parle d'une axiomatique des nombres impairs, etc. et ensuite, il dit donc, finalement, qu'il a interrogé par exemple des étudiants français en mathématiques, il leur a demandé "*2+3 ?*". Et "*a french primary school pupil replies 3+2 because addition is commutative*". Et ensuite, il explique "*Judging by my teaching experience in France, the university students'idea of mathematics, I feel sorry for them because they are very intelligent but deformed kids, is as poor as that of this pupil.*", l'élève qui répondait "*2+3=3+2.*". Et ensuite, il donne des exemples.

Mais en fait quand on approfondit un peu ce texte d'Arnold, on s'aperçoit que si vous voulez, ce qu'il critique, c'est les mathématiques. Ce qu'ils critiquent, c'est si vous voulez tous les exemples qu'il prend où il dit les mathématiciens modernes ne savent pas faire ça, etc., c'est des mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et ces mathématiques, il donne des exemples de courbes à tracer dans le plan ou des choses comme ça, c'est des mathématiques qui maintenant sont complètement digérées et que l'ordinateur fait beaucoup mieux qu'un mathématicien, il le fait en un quart de seconde. Et ce qu'il n'a pas digéré, ce qu'il n'explique pas justement, c'est le merveilleux phénomène qui s'est produit dans les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle et qui justement, permettent... Je vais vous lire un petit texte de Grothendieck. Et ce que dit Grothendieck, c'est : "*La clarification progressive, justement, des notions de définitions, d'énoncés, de démonstrations, de théories mathématiques dont* *on pourrait, si on ne faisait que des mathématiques que comme étant une partie de la physique, on pourrait les ignorer complètement. Et dire que c'est des fantaisies d'axiomaticiens, a été à cet égard très salutaire et nous a fait prendre conscience de toute la puissance des outils d'une simplicité enfantine pourtant.* C'est-à-dire que les concepts mathématiques, en fait, il ne faut pas avoir peur. En général, ils ont une version enfantine et cette version enfantine est beaucoup plus proche de leur réalité que les versions extrêmement élaborées, "*donc d'une simplicité enfantine, pourtant, dont nous disposons pour formuler avec une précision parfaite ceux-là mêmes qui pouvait sembler informulable par la seule vertu d'un usage suffisamment rigoureux du langage courant à peu de choses près. S'il y a une chose qui m'a fasciné dans les mathématiques depuis mon enfance, c'est justement cette puissance à cerner par des mots et à exprimer de façon parfaite l'essence de telles choses mathématiques qui, au premier abord, se présentent sous une forme si élusive ou si mystérieuse qu'elles paraissent au delà des mots.*"

Et ça, si vous voulez, c'est une chose extrêmement importante parce que la plupart des gens, quand on leur parle de mathématiques, ils pensent à l'arithmétique, ils pensent aux nombres.

Bon, ils pensent peut être à la géométrie, mais ils ne se rendent pas compte que les mathématiques modernes, c'est-à-dire les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle, elles ont justement réussi à perfectionner le langage courant par des concepts qui sont extrêmement précis, mais qui, justement, ont un potentiel d'application qui va bien au-delà de la physique.

Bon, alors, quand on pense justement à la musique et si vous voulez, pour bien situer les choses par rapport aux mathématiques, je vais vous lire un petit texte que j'avais écrit il y a longtemps et où je parlais justement du lien entre les deux et je disais : "*Il est crucial à mes yeux pour un enfant d'être exposé très tôt à la musique. Je pense qu'exposer un enfant à la musique vers l'âge de 5 ou 6 ans permet d'équilibrer un petit peu la prépondérance dans son intellect du sens de la vue et cette richesse incroyable, purement visuelle, qu'un enfant acquiert très tôt et qui, donc en fait est reliée à la géométrie.*".

Elle est reliée à la géométrie du moment qu'elle s'inscrit dans l'espace par l'intermédiaire d'une image mentale. Si vous voulez, il y a le même phénomène en mathématique que par rapport à un musicien. Quand un non-mathématicien voit un mathématicien en train de travailler dans le métro. Qu'est ce qu'il voit ? Il voit une page pleine de formules. Elles n'ont aucun sens. Quand un non-musicien voit un musicien travailler dans le métro et lire une partition, c'est exactement pareil, il a l'impression de... C'est pareil !

Or, il y a une partie essentielle du travail des mathématiciens qui est justement de créer des images mentales. Mais quand je parle d'images mentales, ça a à voir avec la géométrie. On voit une figure géométrique, on voit, elle s'inscrit dans l'espace. Mais ce qui est vraiment étonnant, c'est que justement, dans le fonctionnement du mathématicien, il n'y a pas seulement l'image géométrique, il y a l'algèbre. Et l'algèbre n'a rien de visuel, mais par contre, l'algèbre a une temporalité, c'est-à-dire l'algèbre s'inscrit dans le temps.

Quand vous faites un calcul, quand vous exposez une démonstration, ça s'inscrit dans le temps. C'est exactement comme le musicien qui, après avoir compris une œuvre musicale, l'avoir zippée complètement dans son esprit, a quelque chose qui tient en rien, l'étale. Le mathématicien, c'est pareil. Quand il fait un calcul algébrique, ça s'inscrit dans le temps, mais c'est quelque chose qui est très proche du langage, qui a cette précision diabolique du langage et d'une certaine manière, si vous voulez, il y a une connivence assez incroyable entre le calcul algébrique, cette partie des mathématiques qui a à voir avec le langage, qui a un déroulement dans le temps et certaines œuvres musicales. Et ça, je ne peux pas m'empêcher d'y penser. C'est-à-dire que pour moi, il y a certaines œuvres musicales relativement courtes qui disent quelque chose.

Et j'avais même cette impression, vous allez rigoler mais j'avais même cette impression quand on voyait ces salles qui vont de manière répétitive écouter les sonates de Beethoven des années et des années. Ça m'a rappelé, si vous voulez, des gens qui sont là et qui essayent de comprendre. Et on leur répète la même chose. Ils savent qu'il y a quelque chose, et ce quelque chose est intransmissible autrement que par la musique. On ne peut pas le transformer en autre chose que ce qui est transmis, mais ça transmet quelque chose.

Donc, on ne peut pas dire que ça n'est pas un langage. De même, on ne peut pas dire que les mathématiques n'ont pas un aspect langage. Elles ont un aspect langage qui est extrêmement important.

Mais l'essentiel de ce que j'ai dit, si vous voulez, c'est que cet aspect langage des mathématiques est devenu beaucoup plus florissant. Il est devenu beaucoup plus expressif. Il est devenu beaucoup plus large que, justement, les mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Et quand on en reste aux mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, bien sûr, on peut dire "Ah, ces mathématiques-là, elles ont un rapport avec la musique parce qu'il y a l'arithmétique, il y a le log 3 sur log 2, qui est le clavier bien tempéré, etc.

Mais ça ne va pas aller au delà. En fait, le langage mathématique, justement, a franchi bien d'autres frontières et d'une certaine manière, maintenant, on peut espérer que, justement, il y ait une possibilité de rapprochement qui est beaucoup plus grande à cause de ça. Encore faut-il accepter les mathématiques modernes. Et encore faut-il avoir absorbé toute cette élaboration, qui n'est pas du tout évidente.

Gérard Assayag : Alors cette dualité algèbre / géométrie, c'est un de vos chevaux de bataille. C'est extrêmement intéressant parce qu'elle nous amène au coeur du problème de la relation maths-musique, parce que c'est une dualité qu'on rencontre sans arrêt dans la recherche musicale, soit de manière métaphorique, nous en avons discuté, soit de manière technique, et je pourrais éventuellement donner des exemples. Alors notamment dans l'analyse musicale, c'est-à-dire que quand on regarde une partition, il y a une expression que j'ai entendue et qui me plaît bien, c'est la partition vue d'avion, quand on essaie de comprendre ce mécanisme, c'est-à-dire on la regarde comme un tout mais on a le droit de faire ce qu'on veut. On peut sauter d'un point à un autre et mettre en relation un point avec un autre librement et c'est une vision évidemment géométrique.

Alain Connes : Bien sûr.

Gérard Assayag : Ou alors il y a une autre façon de l'aborder, qui est du point de vue de ces mécanismes d'engendrement. Et là, on a un point de vue beaucoup plus local, parce qu'on regarde la mécanique. Est ce que ça, c'est quelque chose que vous ressentez, cette tension quand vous, quand vous regardez une musique, pas quand vous la créez, mais quand vous regardez une musique existante ?

Pierre Boulez : Quand je regarde la musique, je commence d'abord par essayer de comprendre la forme, parce que c'est elle qui vous dirige, simplement dans l'évaluation. On a fait ici une expérience une fois, sur trois niveaux de compréhension de la musique. On a donné d'abord, disons, une sonate de Mozart ou un mouvement, ou un demi-mouvement (la première moitié du mouvement), et on a demandé à quelqu'un qui n'est absolument pas musicien, à quelqu'un qui n'a aucune culture musicale, on lui a demandé qu'est ce qu'il pensait ? Il en a donné une description très vague et pas du tout relevante si je peux dire. Ensuite le moyen. Il avait écouté plusieurs fois des sonates de Mozart, donc il pouvait trouver une forme, en tout cas un contraste entre les thèmes. C'est déjà une approche beaucoup plus précise et le cultivé, alors, décrivait exactement ce qui est passé. Ensuite, on a passé une œuvre de Schophausen pour piano, un fragment bien sûr. Eh bien, les trois réponses étaient très similaires parce que chacun créait son propre théâtre de la forme et ils s'aiguillaient vers les passages qui les avaient particulièrement frappés, c'est-à-dire qu'il n'y avait aucune conception de la forme.

Mais il y avait une conception des événements et des événements qui étaient encore pas liés par une forme mais des événements séparés, qui les avaient frappés, soit parce qu'ils étaient très forts, soit parce qu'ils étaient joués par un instrument spécialisé, etc., etc. Donc, vous voyez que c'est très difficile d'approcher une forme même, parce qu'une forme est vraiment, disons, ce que... comment la personne la regarde. Et là, quand on est musicien, évidemment, on essaye d'avoir une vue, disons plus objective, et non pas seulement subjective.

Voilà comment moi, je vois la musique. Alors quand on voit le détail, on voit en effet comment le discours se construit et s'il se construit plus horizontalement que verticalement ou plus verticalement qu'horizontalement, ou s'il se construit par cassure, ou bien s'il est construit pas continuité, etc., etc. Il y a beaucoup de façon d'envisager la perception même de la musique et je suis persuadé qu'il y a beaucoup de gens qui se font aussi une espèce de... qui... puisqu'ils ne peuvent pas comprendre la forme musicale, qui se font une certaine narration, spécialement quand ils ont écouté une œuvre plusieurs fois, ils se font une narration personnelle et c'est cette narration qu'ils suivent. C'est pour cela que les gens, le public en général, s'il ne fait pas d'effort, s'installe tellement bien dans une œuvre parce qu'il l'écoute toujours de la même façon et donc qu'il a devant lui les mêmes images, les mêmes clichés, les mêmes clichés, je dirais, plutôt que les mêmes images. Et c'est comme ça qu'il absorbe la musique, il ne l'absorbe pas par une espèce de description de la continuité, il l'accepte comme un tout, suivi d'un tout, suivi d'un tout.

Gérard Assayag : Mais l'analyste-expert, le compositeur qui regarde un autre compositeur, n'a-t-il pas cette liberté quand il regarde une partition, de la voir finalement comme un espace où il peut se promener à son gré, ce qui n'est pas réaliste dans la mesure où la partition n'a pas été engendrée de cette façon-là, en agissant simultanément sur toutes les parties ?

Pierre Boulez : Oui, certainement, quand vous analysez... Moi, ce qui m'intéresse dans l'analyse, c'est même l'analyse fausse, mais qui engendre quelque chose.

Je me souviens d'une fois quand Stockhausen m'a montré une analyse du Quatuor de Webern, mais il regardait la densité des rencontres. Ce qui n'a rien à voir avec Webern, qui était simplement un contrepoint à quatre voix, et donc un contrepoint à quatre voies, surtout si c'est en canon, les choses sont décalées les unes par rapport aux autres. Donc s'il y a un phrasé individuel, les choses sont évidemment pas toujours d'une intensité constante. Mais pour lui, ce qui l'intéressait à ce moment là, c'était le phénomène de l'intensité.

Comment un canon à quatre voix peut donner des intensités de cet ordre, statistiquement parlant. Je trouve ça plus intéressant que d'analyser simplement, même comme le compositeur l'a conçu. Ce qui est intéressant dans une analyse, c'est pas lorsque vous voulez refaire ce que le compositeur a fait, c'est de voir par quel procédé il est arrivé à un résultat pareil. Et donc, même si l'analyse est fausse, est fausse complètement, l'analyse est beaucoup plus intéressante parce qu'elle est productive.

Alain Connes : D'accord, il y a quand même une différence assez frappante, justement, là, on parle d'Œuvres. Donc on voit... Alors si on regarde un aspect des mathématiques, qui est une démonstration, on peut dire la chose suivante qui est un peu semblable, c'est que, si vous voulez, une démonstration, il y a deux manières de la regarder. Il y a une vérification ligne à ligne. Et ça, je pense, c'est un peu comme quelqu'un qui joue un morceau de musique qui ne l'a pas encore digéré et qui est obligé d'avoir la partition devant les yeux.

Donc, on peut faire ça. On peut vérifier une démonstration ligne à ligne. Mais il y a une deuxième étape qui est extrêmement importante. C'est qu'en fait, un mathématicien sait qu'il ne comprend une démonstration que quand il est capable dans son cerveau de la zipper en une demi-seconde. C'est-à-dire qu'il n'aura pas les ingrédients successifs de la démonstration, mais il aura immédiatement l'intégralité de la démonstration.

Pierre Boulez : Est ce que je peux ouvrir une parenthèse ?

Alain Connes : Bien sûr.

Pierre Boulez : En musique, ça, ça dépend beaucoup d'un point de vue très différent, c'est si vous êtes interprète, ou si vous êtes compositeur. Si vous êtes compositeur, vous avez tout le temps de naviguer et vous naviguez d'un point à l'autre et vous essayez de conforter votre analyse par comparaison d'un point à un autre, quelles sont les différences, quelles sont les similarités, etc. Si vous êtes interprète, cette façon, disons, d'amasser la connaissance est une conséquence... est une espèce de choses inconsciente. Quand vous êtes au point D, par exemple, vous savez que vous avez déjà joué le point A, et ses successions, et vous savez que vous allez rencontrer le point N et ses successions. Mais vous ne le savez pas exactement. Mais vous le savez, plus ça se rapproche, plus vous êtes conscient de ce qui va suivre. Et plus ça s'éloigne, et plus vous êtes conscient que ça s'éloigne et donc que la forme a atteint un point du présent, c'est-à-dire qu'on a constamment ces trois dimensions dans la tête, présent, bien sûr, celui où vous êtes et le passé qui vous y a amené, le futur qui va vous mener à...

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr. Mais ce que je veux dire, c'est que justement, cette espèce de linéarité de l'œuvre, il y a quelque chose qui est extrêmement frappant pour le mathématicien, c'est-à-dire que si un mathématicien essaye de comprendre une démonstration, il y a ce procédé qui consiste à essayer de la lire linéairement. Il y a un autre procédé qui est bien plus efficace, qui consiste à regarder l'énoncé du théorème et à commencer par chercher soi-même une démonstration.

Et quand on a fait ça, ce qui se produit, c'est que la lecture de la démonstration, à ce moment-là, on va dire : “Mais ça, c’est rien. Ça, c’est rien”. Et on va dire : “LÀ, c’est LÀ qu’il se passe quelque chose”. Et c’est seulement comme ça, c’est seulement à partir de ce mécanisme-là qu’on a vraiment compris, c’est-à-dire... Donc ça, je ne sais pas s’il y a quelque chose d’analogue à ça dans une oeuvre musicale. C’est-à-dire, est-ce qu’une oeuvre musicale répond à une question, à un questionnement, etc. Et on peut dire lorsque l’oeuvre se déroule “Ah !”. Bon, j’ai eu parfois cette impression-là à la fin de certains morceaux où il y avait une espèce de moment où il y avait un moment explicatif a posteriori ou l’inverse. Je veux dire au moment où on voit qu’il y a un thème qui ensuite va se dérouler, etc. Mais en mathématique, c’est quelque chose d’extrêmement fort.

C’est-à-dire qu’il y a une différence énorme, justement, entre le mathématicien qui comprend vaguement l’énoncé et puis va se mettre à vérifier la démonstration pas à pas, etc. Et le mathématicien qui va avoir un acte qui n’est pas du tout passif, mais va se mettre à réfléchir par lui-même et après, seulement après, va regarder la démonstration.

Gérard Assayag : Est ce que ça a quelque chose à voir avec la compression, ce zippage que vous évoquez ?

Alain Connes : Absolument, bien sûr, bien sûr. C’est-à-dire que le mathématicien fonctionne par niveaux d’abstraction, par niveaux hiérarchiques d’abstraction, c’est-à-dire qu’en fait, ça veut dire qu’il ne peut progresser, comme les notions sont très compliquées, que si ces notions là, il est capable de les rendre en occupant un espace qui est presque nul et après, il va pouvoir les manipuler mais les manipuler abstraitement sans savoir ce que le zippage contient, simplement en ayant une idée intuitive de ce que cette motion signifie. Bien sûr pour ça, le langage est extrêmement important, c’est pour ça que, bon, il y a des mathématiciens très créatifs comme Grothendieck, etc. qui ont donné 36 noms nouveaux comme le schéma. Schéma, ça a un sens mathématique bien précis, etc. Et ça n’est qu’avec ce mécanisme de zippage complet qu’on peut progresser par des niveaux hiérarchiques de compréhension.

Pierre Boulez : Pour la musique, c’est surtout la mémoire qui joue. Je vois, par exemple, c’est très frappant. Quand j’étais surtout en charge d’orchestre, je faisais des séances d’initiation, mais d’explications sur des œuvres et j'ai toujours remarqué qu'il fallait toujours des exemples. Parce que quand on joue l'œuvre, l'exemple revient à la mémoire immédiatement. Et là, la mémoire fonctionne de façon à aimanter la perception dans un sens ou dans l'autre.

Alain Connes : D'accord, oui, alors donc je pense qu'il y a quelque chose qui est très analogue dans ce cas-là, parce que, bon, il y a certains mathématiciens comme Grothendieck qui fonctionnent un peu à l'envers, c'est-à-dire qu'ils partent du cas général et puis ils... mais la plupart des mathématiciens fonctionnent de manière différente, c'est-à-dire que si on leur donne un bon exemple et qu'on leur explique concrètement sur un exemple, un phénomène général, en général justement, ils sont parfaitement capables d'immédiatement généraliser et d'avoir le cas général et je suppose qu'en musique, enfin, on voit bien dans la musique de Beethoven ou des choses comme ça, on voit bien qu'il y a un système génératif qui permet à partir de choses relativement simples d'engendrer quantités de choses qui s'en déduisent et ça, en mathématiques, c'est un phénomène assez général. Donc il y a ce côté de presque génération automatique qui se produit et qui joue un rôle très, très, très, très important.

Gérard Assayag : Alors pour revenir à cette dualité algèbre / géométrie, vous mentionnez, alors c'est très important, que du côté algébrique, vous mettez le temps, il y a un engendrement. Donc un engendrement. Il y a une combinatoire de symboles. Il y a des règles de production. C'est des choses qu'on utilise beaucoup en musique. Les musiciens se sont beaucoup intéressés, par exemple, aux grammaires formelles ou aux règles de production pour produire des séquences intéressantes, ou non d'ailleurs, de notes.

Mais dès lors que ça produit des séquences, on est bien d'accord, mais est ce que des séquences, ça suffit pour définir du temps ? C'est une question que je vais poser à la fois au mathématicien et au musicien.

Alain Connes : Bien sûr, je vais répondre parce que je veux dire : mon premier travail mathématique a consisté exactement à ça, c'est-à-dire si vous voulez, ce qui est assez incroyable, c'est que, justement, on s'aperçoit que ce qu'on appelle la non commutativité, qu'est ce que ça veut dire ? Ça veut dire que quand vous écrivez un mot, ce n'est pas l'ensemble des lettres du mot qui compte, mais c'est l'ordre aussi dans lequel il est écrit.

D'accord, bon, on peut donner 36 exemples. Et ce qui est absolument incroyable, ce qui est absolument incroyable, c'est que justement, on s'aperçoit lorsqu'on fait des mathématiques, on s'aperçoit que lorsqu'on regarde l'algèbre non-commutative, c'est-à-dire l'algèbre justement, dans laquelle on ne se permet pas de dire que $abab$, ça fait a^2b^2. Eh bien, le temps est engendré de manière naturelle. Ça, c'est beaucoup plus fort que de dire que l'algèbre s'inscrit dans le temps.

C'est qu'en fait, et ça, ça vient du quantique, c'est-à-dire le quantique nous a appris que justement, il fallait lorsqu'on faisait des calculs de mécanique quantique, on ne pouvait pas, c'est ce qu'a trouvé Heisenberg, on ne pouvait pas permuter des quantités comme la position et le moment, etc. On ne pouvait plus calculer de manière trop simple lorsqu'on s'intéresse à des systèmes microscopiques, ce qui est absolument incroyable. Et le potentiel philosophique n'a pas du tout été suffisamment exploité, de ce fait-là. Le fait est que quand on prend une algèbre d'une certaine qualité, qu'on appelle une algèbre d'opérateurs, qui est non-commutative, eh bien, elle engendre son propre temps. Elle a un groupe d'automorphismes qui est paramétré par un paramètre t, mais qui est vraiment le temps dans les exemples physiques qui la fait tourner avec le temps. Alors ça, c'est hallucinant et ça vient exactement du fait qu'on ne peut pas permuter a et b. Donc, quand vous écrivez un mot, l'ordre des lettres est important, alors que quand Descartes, etc., quand des gens de cette époque-là faisaient des calculs, ils faisaient des calculs de manière commutative, c'est-à-dire en permutant les lettres.

Gérard Assayag : Si je comprends bien, c'est l'algèbre qui évolue elle-même et qui se transforme elle-même, qui engendre donc une série

Alain Connes : Elle engendre un passage du temps. Alors ça, ça avait déjà été pressenti puisqu'Hamilton avait écrit des phrases tout à fait prophétique, justement, et où il parlait de la relation entre l'algèbre et le temps.

Donc, ce qui me frappait tout à l'heure, c'est que vous vous expliquiez que, justement, dans le travail d'un interprète, il y a toujours ce présent. Et puis il y a le passé et le futur, etc. Donc on voit bien, je vais dire la musique en gros, c'est une analyse profonde, microscopique du temps. C'est une compréhension du temps qui va de plus en plus loin dans la finesse. Mais ce qui est tout à fait étonnant, c'est qu'au niveau algébrique, il y a exactement la même chose qui se produise et qu'en fait justement, non seulement, bien sûr, un calcul algébrique se fait de manière linéaire, avec des termes ordonnés dans le temps, ça, c'est rien.

Mais ce qui est hallucinant, c'est l'inverse. C'est le fait que même si on faisait des mathématiques en dehors du temps, etc., eh bien le temps serait là et serait présent. Il serait engendré de manière naturelle.

Gérard Assayag : Vous évoquiez un autre point tout à l'heure qui était sans le dire, je vais dire le terme technique, vous m'excuserez, la correspondance de Curry-Howard, c'est-à-dire le fait qu'une preuve, on peut aussi la regarder comme un programme, comme un calcul.

Alain Connes : Oui, si on veut, oui, bien sûr.

Gérard Assayag : Ça évoque une question qu'on s'est posée ici même lors du tout premier congrès Mathématiques et Musique qui a été organisé en 1999 à la demande de la Société de mathématiques européenne avec M. Bourguignon. On avait décidé de mettre ça sous l'égide de la question "Est-ce qu'il y a une correspondance entre ce que les musiciens appellent la logique musicale, qui est toujours une logique d'organisation, et ce que les matheux appellent la logique tout court, la logique mathématique ou la logique formelle, la logique mathématisée ?

Et on était arrivés, on n'avait évidemment pas tranché cette question, on était simplement arrivés à dire la chose suivante, c'est qu'il y a bien de la logique dans l'organisation de la musique. Il y a bien des termes formels qu'on engendre. Il y a même des choses qui ressemblent à des axiomes, c'est-à-dire des hypothèses de départ qu'on se donne pour engendrer un matériau. Mais il y a deux choses qu'il n'y a pas. Il n'y a pas de notion de vérité : on ne cherche pas à ce que ces termes qu'on agrège, qui vont finir par former une partition, établissent une certaine valeur de vérité, ce n'est pas ça le problème. Ce n'est pas le problème de la logique. Le problème de la logique musicale n'est pas le problème de la logique mathématique. Vous êtes d'accord avec moi ?

Pierre Boulez : Certainement pas d'accord avec ça. Je l'ai dit discrètement, mais je le pense.

Gérard Assayag : On peut le dire et je crois que c'est facile à établir. Il n'y a pas de valeur de vérité, donc déjà, ça enlève tout un aspect calculatoire parce que souvent, c'est ça qu'on cherche. Et puis, il y a un autre problème beaucoup plus profond, qui est le suivant : en logique pure, lorsqu'on déroule une démonstration, je peux utiliser un terme A pour ma démonstration. Et j'ai parfaitement le droit de le réutiliser ensuite, mais il ne se passe rien. Ça ne me coûte rien. Je l'utilise, je peux l'utiliser mille fois si je veux, si je le désire. Quand on considère une séquence musicale, un élément du langage musical comme ressemblant un petit peu à une démonstration et que l'on regarde les termes que l'on agrège les notes, les accords, etc., eh bien, le fait d'avoir exposé un objet musical n'est pas du tout innocent. Et la seconde fois qu'on l'expose, ça n'a pas du tout la même valeur que la première fois qu'on l'avait exposé. Donc déjà, déjà, on n'est plus dans cette hypothèse. *(Rires.)* Je vois, je crois que je vous vois venir.

Alain Connes : Non, non, en fait, si vous voulez, ça veut dire que vous ne connaissez pas un certain pan du développement mathématique, qui est ce qu'on appelle la logique linéaire. Dans la logique, dans la logique linéaire, en particulier Jean-Yves Girard à Marseille, lorsqu'on a utilisé une fois, on ne peut plus utiliser.

Donc, je veux dire, il ne faut pas croire que les mathématiciens manquent d'imagination. Ils ont utilisé cette logique-là. Elle leur est déjà apparue. Mais en fait, si vous voulez, bon, simplement pour rebondir un peu sur ce que vous disiez à propos de ce qui se passe en musique au niveau de la logique, ce que je dirais, c'est qu'il y a pour le mathématicien effectivement un rôle de l'esthétique, quand il regarde une démonstration. C'est-à-dire un mathématicien est capable de dire en regardant une démonstration les chances qu'elle a d'être vraie. Il est capable, en regardant une formule même obtenue par un ordinateur, de dire les chances qu'elle a d'être vraie. Donc là, il y a un rôle de l'esthétique. Mais si vous voulez pour moi, il ne faudrait pas du tout croire que la qualité, bon, c'est une qualité nécessaire pour un énoncé mathématique, d'être vrai, d'être correct, une démonstration d'être correcte. Mais la notion, qui est beaucoup plus intéressante et beaucoup plus difficile à définir et qui est beaucoup plus proche de la musique, c'est la notion de sens, c'est-à-dire que, si vous voulez, un énoncé mathématique, vous pourriez fabriquer un ordinateur qui vous fabriquerait 36 énoncés mathématiques à la pelle et qui seraient tous corrects parce qu'il les aurait fabriqués en faisant des démonstrations correctes. Ce serait facile. Par contre, si vous regardiez tous ces énoncés, la plupart d'entre eux seraient complètement inintéressants parce qu'ils n'auraient pas de sens.

Qu'est ce que ça veut dire un sens ? Un sens, c'est quelque chose qui est... qui ne répond pas à la logique, parce que l'énoncé en question est correct. Mais il y a pour le mathématicien une notion d'un énoncé qui est merveilleux, qui a un sens. Et je pense que là, on a un rapprochement avec la musique. Parce que vous me disiez une pièce musicale n'a pas à être correcte, bien sûr, mais elle doit avoir un sens. Si elle n'a pas de sens, à ce moment-là, bon, ben, je vais dire, on pourrait faire n'importe quoi. On pourrait inventer 36 morceaux de musique. Et là, je pense qu'on touche un point essentiel parce que la notion de correct, c'est une condition nécessaire. C'est une condition nécessaire pour le mathématicien, bien entendu. Mais un mathématicien pourrait passer sa vie à faire ce que disait Arnold des axiomes sur les nombres impairs ou des choses comme ça. Et ça veut dire qu'il aurait perdu son temps. Il aurait perdu son temps parce que justement, il n'aurait pas trouvé de vérité qui a du sens. Il n'aurait pas dévoilé un pan de cette réalité mathématique, mais justement, des choses qui ont du sens. Et ça, c'est une chose extrêmement difficile à définir en mathématiques. Et je pense que c'est aussi difficile à définir qu'en musique, d'une certaine manière.

Pierre Boulez : Oui, c'est très difficile parce que lors de l'Histoire, on voit des gens qui ont à peu près, surtout au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, le même vocabulaire et dans un cas, l'oeuvre est très belle et dans l'autre cas, l'œuvre va être complètement inintéressante. C'est-à-dire que la même grammaire peut servir non pas des buts du reste, mais peut servir à des fins très différentes.

Alain Connes : Oui, donc, je veux dire, ça veut dire simplement que quand on s'en tient au niveau de la structure, de la logique, etc., on ne touche pas le problème essentiel et le problème essentiel pour les mathématiques, justement, bien sûr, il y a le problème de la vérité, il y a le problème qu'on peut discuter en long, en large et en travers. Mais il y a un problème beaucoup plus difficile, beaucoup plus important, qui est de voir justement en quel sens ce qu'on a trouvé dévoile un petit coin de la réalité mathématique. Et ça, ça signifie avoir du sens. Exactement.

Gérard Assayag : Le problème que vous évoquez, c'est le problème que rencontrent les démonstrateurs automatiques de théorèmes, les programmes informatiques qui démontrent des théorèmes, ils peuvent démontrer des théorèmes corrects, mais ils ne savent pas comment dire qu'un théorème est intéressant. Et donc, ils peuvent démontrer des milliards de choses inintéressantes. Alors c'est intéressant parce que ça peut rejoindre une problématique qu'on connaît ici, qui est la composition assistée par ordinateur, où on a des programmes informatiques que des compositeurs utilisent pour calculer des matériaux ou des structures intéressants.

Mais ils pourraient en calculer des milliards qui ne seraient pas intéressants. C'est in fine le compositeur qui décide. Alors est-ce que vous pourriez nous aider ? Comment pourriez-vous, compositeur, nous aider à converger de manière plus fine, plus intéressante, vers des résultats qui ne sont pas seulement corrects du point de vue du calcul, mais susceptible d'intéresser le musicien ?

Pierre Boulez : La première chose que je peux vous répondre, c'est une réponse très bête, c'est parce que ça me plaît, tout simplement parce que ce que vous me donnez, ce que vous me proposez, ça me plaît.

Gérard Assayag : C'est comme ça qu'on fonctionne.

Pierre Boulez : Oui, mais tout le raisonnement de la musique est fondé là dessus, bien sûr, on ne va pas dire aussi bêtement que ça, ça me plaît, donc je le choisis. Vous pouvez avoir un goût terrible, le kitsch, et le dire, ça me plaît aussi, bien sûr. Mais ce qui est intéressant, c'est que quand vous avez comme ça des quantités de possibilités, vous ne pouvez pas les écouter, si vous avez mille possibilités, au bout de cent, vous serez fatigué ou vous n'aurez absolument plus de jugement. C'est ça qui est dangereux en musique. C'est que plus vous écoutez les différentes solutions, moins vous avez de réactions disons pour choisir les choses. Et donc, à un moment donné, il faut deux choses.

Premièrement, restreindre le périmètre du choix et deuxièmement, décider : "oui, ça, pourquoi je le choisis ? Parce que ça me paraît meilleur, pour cette raison, pour cette raison. Mais au fond de ça, vous essayez de vous justifiez vous même. Mais le principal, c'est uniquement... c'est pas uniquement, mais c'est principalement l'intuition et l'intuition. Bon, ça existe et c'est un don que vous avez, même si vous êtes très doué, vous l'avez un jour, vous ne l'avez pas le lendemain.

C'est-à-dire c'est très variable et quelquefois, vous êtes très pointus, d'autres fois moins pointus, parce que vous êtes davantage séduit par le... Et il y a une question aussi en musique qui est difficile, c'est de joindre la structure abstraite si on peut dire, et l'objet concret, parce que l'objet concret qui est très intéressant, peut être dans une structure tout à fait inepte. Et au contraire, un structure très intelligente peut avoir des objets qui sont tout à fait inintéressants. Et donc, c'est cette combinaison qui n'est pas facile non plus à organiser, qui fait que l'œuvre acquiert une grande validité. Mais ça, ça a toujours été le cas. Je veux dire, si vous regardez l'Histoire de la musique, vous avez par exemple deux personnalités très distinctes comme Berlioz et Schumann, je prends exprès ces deux exemples. Chez Berlioz, il y a un sens de l'instrumentation qui est absolument remarquable, même quand il était très jeune. Mais le sens de l'harmonie, c'est-à-dire du langage harmonique, était très primitif chez lui. Alors on explique cela parce qu'il a joué de la guitare quand il était jeune et donc que la guitare a simplifié son vocabulaire.

Ça n'enchanterait pas les guitaristes, si on dit ça. Mais tandis que Schumann avait au contraire un langage harmonique très... beaucoup plus raffiné. Mais son langage instrumental était vraiment très disons, sans beaucoup de signification, sans beaucoup de couleurs, même, tout simplement.

Et donc, c'est très rare d'avoir chez les mêmes musiciens des gens qui sont doués également, pour les différentes composantes. Si bien que quand vous avez quelqu'un comme Wagner, évidemment, vous avez là, vous avez tout.

Mais Wagner qui, disons, n'a jamais parlé de système, il a toujours parlé de musique nouvelle, de musique du futur, etc. Mais il n'a jamais codifié son langage. Pas du tout même. Mais il a pris le langage tel qu'il l'a trouvé, et sous l'influence, en particulier de Liszt, il a détourné le langage de la fonction sur laquelle ce langage vivait, et donc finalement, il a inventé ce langage très ambigu où toutes les relations sont possibles. Dans un langage plus classique, disons même Beethoven, sans parler de Mozart, vous avez des accords qui faisaient des accords tournants, si l'on peut dire qui aidaient la modulation, qui aidaient donc à aller un peu dans un pays voisin, mais dans Wagner, vous êtes... quelquefois, vous ne savez pas du tout où vous êtes, parce qu'il utilise uniquement des choses ambiguës.

Cette ambiguïté s'est généralisée au fur à mesure et a conduit à Schönberg, qui a de nouveau, lui, créé un dogme.

Et ce dogme était intéressant d'une certaine façon, parce qu'il a en effet, il organisait le langage musical d'une autre façon. Mais ce dogme, ce dogme, ne tenait pas compte des phénomènes verticaux, et, ou à peine compte des phénomènes verticaux, et c'est la faiblesse du langage dodécaphonique de Schönberg., c'est qu'une dimension prévaut sur les autres ou sur l'autre, spécifiquement, c'est-à-dire que le domaine horizontal prévaut sur le domaine vertical et dans Bach, ça, c'était typique, les domaines verticaux et horizontaux seront tout à fait contrôlés.

Et là, le domaine vertical, vous le percevez immédiatement ; le domaine horizontal, le contrepoint, vous lez percevez quand vous avez étudié la partition, c'est là, la différence. C'est que vous ne percevez pas la musique de la même façon si elle est écrite d'une façon ou d'une autre. Et ça, il n'y a rien à faire, on ne changera jamais ça, parce que c'est un phénomène de perception.

Alain Connes : Oui, ce que je voulais dire, c'est au niveau général de la structure. C'est, bon, finalement, si vous voulez, on peut résumer en gros un peu le travail du mathématicien en disant que de temps en temps, il y a un mathématicien qui... trouve un phénomène brut. Un exemple de ça, c'est par exemple quand Riemann trouve la relation entre les nombres premiers et les zéros d'une certaine fonction. D'accord ? Et c'est une trouvaille, c'est-à-dire que c'est quelque chose qu'après, on va pouvoir vérifier jusqu'à un certain niveau avec l'ordinateur, etc.

Mais ça va donner aux mathématiciens d'un siècle après, de deux siècles après une espèce d'objectif. Et la raison, c'est qu'on sait que ce phénomène est suffisamment profond et suffisamment mystérieux pour que l'on soit sûr que toutes les notions qui seront inventées, découvertes à l'occasion de cette recherche, c'est-à-dire pour essayer de trouver une démonstration de ce fait-là, seront, auront du sens, auront du sens. Et alors ? Justement, là où je pense qu'il y a un rapprochement qui est possible, si vous voulez avec la musique, c'est qu'on peut dire en fait qu'il y a deux aspects dans le travail du mathématicien. C'est-à-dire, bien sûr, il y a un aspect incroyablement rationnel qui consiste, une fois qu'on a une idée de démonstration, à essayer de vérifier qu'elle est correcte, bien sûr. Ça, c'est le rationalisme à l'état pur. Mais il y a un aspect qui est bien plus intéressant et qui a à voir avec l'intuition. Et cet aspect qui a à voir avec l'intuition, c'est qu'il y a une période dans laquelle le mathématicien ne doit absolument pas se dire “est-ce-que ce que je dis est correct ? etc. Est ce que je vais vérifier tous les petits détails, etc.” Et dans laquelle, justement, il doit se permettre de rêver ? Il doit se permettre de voir beaucoup plus loin et dans cette période-là, qui est en gros, mise en route un petit peu comme par un élan poétique. C'est quelque chose qui est intransmissible en mots. C'est-à-dire que si un mathématicien est dans cette période-là, il est incapable de l'expliquer à des gens qu'il va rencontrer qui vont lui dire “oui, bon, mais alors ?”.

Et il est incapable de l'écrire. Parce que s'il l'écrit, c'est comme s'il essayait d'attraper quelque chose qui va disparaître à partir du moment où il va l'écrire. Mais la question que je me pose, c'est de savoir dans quelle mesure, justement, cette intuition qui est terriblement présente, qui est quelque chose d'extrêmement fort, peut se traduire d'une autre manière. Est-ce qu'elle peut s'exprimer sous une forme musicale, est-ce qu'elle peut s'exprimer autrement. Parce qu'elle vient de quelque chose qui est très profond, qui est à l'intérieur.

Et si vous voulez, il y a un texte de Grothendieck que je vous lirai si j'ai le temps et qui parle justement du rêve en mathématiques et qui dit à quel point, justement, le rêve n'est pas admis en mathématiques. Il n'est pas admis. Pourquoi ? Parce que quand un mathématicien écrit un article, il ne va pas écrire sur des rêves qu'il a fantasmés, etc. Il va écrire des démonstrations. Et donc il y a toute une partie invisible du travail du mathématicien qui n'est jamais visible.

La partie qui est visible, ça va être une démonstration rigoureuse, écrite, etc. Et il va y avoir tout un... quelque chose qui est entièrement caché et qui est toute cette partie invisible et qui a consisté en ces... toutes ces journées, etc. dans lesquelles il y avait un rêve, qui était présent à l'intuition, qui était présent à l'esprit et qui n'était pas encore réalisé. Bon moi, ça me fait penser si vous voulez que le fonctionnement de la musique, on a un peu l'impression qu'on en est à ce niveau de l'intuition, de quelque chose qui n'est pas encore réalisé, etc. mais qu'on a réussi à transmettre, par contre. On a réussi à le transmettre sous forme musicale et à partir du moment où, justement, il y avait quelque chose de vrai derrière, il y avait une vraie inspiration, etc., là, ça a du sens et finalement, on arrive à travers la musique à transmettre quelque chose. Et alors ? Ce qui est très amusant, c'est que finalement, il m'est arrivé d'avoir un apport de l'extérieur par une œuvre musicale pour un problème que je me posais et que cet apport musical soit plus important que si j'avais lu un texte mathématique.

Il m'était arrivé d'écouter des œuvres musicales relativement courtes, mais qui avaient un sens, et c'était un sens qui cadrait avec une espèce d'intuition que j'avais à un moment donné, mais que je ne pouvais pas traduire autrement, je ne pouvais pas la traduire par des mots. Je ne pouvais pas dire "Bon, eh bien, etc.". Mais par contre, il y avait par exemple, je ne sais pas, un prélude, qui correspondait exactement à cette intuition. Je ne savais pas pourquoi. Donc, là, il y a quelque chose, à mon avis, si vous voulez justement, dans la notion de sens et tout ça.

Pierre Boulez : Non, moi, je dis que la transcription d'une intuition musicale, de la mathématique à la musique, c'est très, très inconfortable.

C'est très, très inconfortable parce que les choix ne sont pas les mêmes. La culture n'est pas la même et les choix ne sont pas les mêmes. Je disais tout à l'heure, je prends le cas d'un compositeur qui l'a fait, Xenakis pour ne pas le nommer, qui a utilisé beaucoup les glissandos, les courbes, alors on voyait des courbes superbes, magnifiques, etc. Mais qu'est ce qu'on entend, on entend un matériau extrêmement pauvre.

Alain Connes : Ce n'était pas du tout de ça dont je parlais. Si vous voulez, il y a deux choses très, très différentes. Il y a le fait d'utiliser des mathématiques, bon, je me souviens d'avoir écouté, effectivement, une conférence de Xenakis, il y a très, très longtemps, à un moment donné où je me posais la question de savoir si j'allais faire des mathématiques ou si j'allais m'intéresser à la musique ? Des choses comme ça.

Et ça m'avait dégoûté, vraiment, parce que il était venu à la Sorbonne, il avait fait un exposé et dans son exposé, il avait entouré le tableau dans lequel il avait quelques formules générales par des formules mathématiques, et ces formules mathématiques n'avaient rien à voir avec ce dont il parlait. Donc, elles étaient là uniquement comme outil psychologique pour, comment dire, pour effrayer les gens qui ne connaissaient pas les mathématiques et pour, donc, leur imposer comme ça quelque chose. Donc, ce n'était pas du tout ça dont je parlais.

Ce dont je parlais, c'était un problème qui est complètement ouvert à mon avis, qui est qu'il y a certaines notions mathématiques, certaines intuitions mathématiques qui ne sont pas transmissibles par des mots pour le moment.

Pierre Boulez : Oui, mais moi, ce que je voulais dire, c'est pas simplement comme une critique. Mais disons un glissando, qui suive une courbe ou une autre, c'est un matériau extrêmement primitif, c'est un matériau limite. Ce qui nous intéresse dans une continuité comme ça, c'est la notion de coupure, c'est-à-dire de l'intervalle, parce que l'intervalle définit vraiment la façon dont vous percevez les choses. Et donc quand on cible, par exemple, on avait vu, même une courbe qui vous inspire une sorte de geste... Mais ce geste, il faudra le transmettre non pas par un geste direct comme ça, mais il faut le transmuter, pratiquement, avec des intervalles qui lui donneront vraiment un sens, justement. Et c'est pour ça que je dis c'est la transposition ou la trans-figuration de ça, et vraiment moins primitive qu'on ne pense.

Alain Connes : D'accord, mais ce que j'avais en tête, par exemple, vous avez parlé, à propos de Wagner, de l'ambiguïté entre les tonalités, etc. Et alors, justement, il y a une idée mathématique qui est relativement simple à expliquer, qui est due à Galois et qui n'est pas encore, comment dire, capturée mathématiquement. Et c'est précisément l'idée d'ambiguïté. Et donc, ce que j'ai en tête, c'est la chose suivante, c'est que justement, comme les mathématiques arrivent à capturer des concepts à des niveaux de conceptualisation qui sont très élevés... Par exemple, ce qu'a fait Galois, ce qu'il a compris, c'est qu'en fait, les gens avant lui, cherchaient des symétries, et lui, il a réussi à comprendre qu'en fait, la première chose qu'il fallait faire, c'était briser complètement la symétrie entre les racines. Et après, une fois qu'on avait brisé complètement la symétrie, on arrivait à retrouver la structure intérieure par d'autres procédés. Mais ce que j'ai en tête, c'est que cette idée, bon, vous allez lire 36 textes mathématiques autour de cette idée. Il n'y a aucun de ces textes qui l'épuise complètement. Il n'y en en a aucun. C'est-à-dire lorsqu'on l'écrit en termes rationnels, etc., on n'arrive pas à l'épuiser. Et je suis persuadé qu'il y a sûrement certaines structures musicales qui arriveraient à transmettre une partie du contenu de cette idée, de manière complémentaire, à la manière rationnelle de la dire. C'est ça que j'ai en tête, pas du tout le fait que l'on puisse utiliser les mathématiques pour guider certaines choses... C'est quelque-chose qui est beaucoup plus, qui se situe beaucoup plus au niveau conceptuel, et au fait, justement, qu'il y a des concepts mathématiques beaucoup plus élaborés, beaucoup plus compliqués et beaucoup plus, comment dire ? Et en même temps beaucoup plus enfantins qu'on pourrait croire et que, justement, on n'arrive pas à les percevoir complètement lorsqu'on utilise uniquement le langage linéaire, rationnel, etc. Et que la musique polyphonique, etc., peuvent aider considérablement, ne serait-ce que par la polyphonie, c'est-à-dire le langage écrit est un langage linéaire unique.

Il y a un seul, un seul narrateur. Et la polyphonie, justement, bon, ben, on le sait bien. Et à mon avis, justement, ça, ça devrait permettre d'aller au-delà de certaines choses qu'on est seulement capable de faire pour le moment.

Gérard Assayag : La question que vous posez est vraiment celle de la source de la créativité. C'est-à-dire que si je la transforme un petit peu, c'est “Est-ce qu'il existe des niveaux de représentation très profonds, pré-verbaux, quasi conceptuel, mais on ne va pas vraiment dire ça puisqu'ils sont encore non verbalisés, mais qui pourraient ensuite, au moment où ils éclosent et où ils apparaissent, se transformer de diverses façons en mathématiques, en langage.

Alain Connes : C'est exactement ça. C'est exactement ça. Mais ce que je veux dire, c'est que je reviens toujours à Grothendieck, mais il montre bien à quel point, justement, le processus de créativité est un processus de retour à l'enfance. C'est en ce sens là, c'est-à-dire que c'est un processus qui consiste à essayer de se dépouiller entièrement de tous les dogmes, de tout ce qui nous a été imposé, etc. Et de revenir à une perception complètement enfantine. Mais justement, bon, après justement, être capable de la rendre universelle et de la transmettre. Alors ça, c'est évidemment au cœur de la musique, mais c'est aussi, c'est semblable au sein des mathématiques.

Pierre Boulez : Mais est ce possible d'être aussi enfantin ? J'allais dire infantile, excusez-moi, d'être aussi enfantin, après avoir fait tout de même des expériences qui vous ont marqué ?

Alain Connes : Justement...

Pierre Boulez : Est-ce que ça n'est pas artificiel ?

Alain Connes : Je ne pense pas que ce soit artificiel. Je ne pense pas que soit artificiel, l'exemple de Grothendieck, qui est un exemple extrêmement frappant parce qu'à un moment donné, justement, il a, pour revenir au CNRS parce qu'il était parti et il avait fait justement une demande au CNRS et son texte s'appelait *Dessins d'enfants*. Donc vous, vous lisez ça, c'est un enfant, vous pouvez dire, c'est infantile, etc. Mais en fait, c'était relié à un des problèmes les plus profonds des mathématiques qui est ce qu'on appelle la compréhension du groupe de Galois de la clôture algébrique de Q, etc.

Et c'est très souvent le cas, en fait, que quand les gens deviennent des professionnels, ils s'entourent de plus en plus d'une couche protectrice qui les empêche justement de retourner à cet état-là. Et au contraire, je pense que ce qui est absolument essentiel, justement, c'est de permettre le rêve, de permettre, d'essayer d'aller au-delà de l'interdit du rêve, etc., et de revenir à cette source-là. Et je pense que lorsqu'on revient à la source, par exemple, de la notion d'ambiguïté, qui est une notion qui existe et qui pourrait être manifestée dans pas mal de domaines, eh bien à ce moment-là, elle aura effectivement diverses formes, elle prendra diverses formes. Et on n'arrivera jamais à la résumer à une expression.

Il n'y aura jamais une seule expression qui la résumera et ça restera une source d'inspiration constante. Et c'est le cas pour la théorie de Galois, c'est-à-dire que c'est une théorie qui n'est pas épuisée et elle n'est pas épuisée au sens où elle reste... c'est quand les gens la comprennent vraiment, c'est-à-dire que quelqu'un pourrait lire un livre sur la théorie de Galois et n'y rien comprendre parce qu'il n'aurait pas compris l'idée de départ. Et c'est une idée, justement, qui est une idée enfantine, qui est l'idée d'ambiguité.

Mais cette idée, lorsqu'on l'a comprise, elle met les choses en mouvement. C'est une vraie idée met les choses en mouvement, ça là, ça, je pense, c'est très semblable à la musique. Parce qu'on a l'impression, si vous voulez mon impression, moi, sur la créativité en musique, ce n'est pas une impression, c'est plus une impression par rapport à la musique classique, la musique romantique, c'est-à-dire la musique qui est émotionnelle. Mais mon impression, c'était plus, par rapport au mathématicien, qu'il y avait une espèce de batterie émotionnelle qui se charge, indépendamment de l'expression instrumentale et ensuite, une fois qu'elle est suffisamment chargée, il y a un travail qui est extrêmement difficile, qui est de rendre l'émotion individuelle universelle, la transformer, la rendre universelle. Et c'est un processus qui peut paraître extrêmement différent du processus mathématique. Mais schématiquement, c'est le même parce que, que fait le mathématicien ? Quel est le rôle de l'intuition de mathématicien ? Le rôle de son intuition, c'est exactement comme un chasseur. Il dit "Il y a quelque chose là !". Il le sent très, très profondément. Mais après, cette chose-là, il doit aller la chercher et il y a une réalité qui est extrêmement cruelle, etc., et qui l'empêche d'aller la chercher. Donc, après, il a un vrai travail, et ce travail, je pense que c'est le même. C'est très semblable au travail qui consiste à avoir une émotion personnelle, à essayer de la rendre universelle. Donc, il y a un parallèle, bien sûr, ce sont des choses différentes, mais le rôle de l'intuition est le rôle absolument moteur de l'intuition au démarrage et c'est le même dans les deux, je pense

Pierre Boulez : Oui, ça, je le pense aussi, très certainement, mais, en plus de ça, je dirais qu'il y a deux contraintes : d'abord, l'objet n'existe pas, celui que vous imaginez, donc, il reste à construire, et deuxièmement, nous avons, dans une musique qui est instrumentale, par exemple, nous avons à tenir compte de ce qui est la transmission. Et cette transmission se fera mal si par exemple, l'idée est géniale mais la réalisation est insuffisante. Et justement, cette différence entre les objets dont vous vous servez, par exemple, les notes. Quand vous avez, par exemple, un objet tout à fait remarquable, je pense, tout simplement, parce que tout le monde connaît ça, à un son de tam-tam. Un son de tam-tam est beaucoup plus intéressant qu'un son de violon, juste comme ça, mais qu'est-ce qu'il fait ? Ce son est si intéressant, qu'il sort du contexte automatiquement, et donc il faut le restreindre au contraire, pour l'employer d'une façon très très mesurée pour qu'il ait disons sa place. Tandis que vous avez un Fa#, un Sol, ou je ne sais quoi, lui, il est neutre, et donc vous pouvez l'utiliser à votre découverte, c'est-à-dire qu'il y a des objets qui sont prêts à la découverte, et des objets qui ne sont pas prêts à la découverte, qui monopolisent...

Alain Connes : C'est un peu comme un caractère chinois qui a du sens en lui-même, par opposition à une lettre de l'alphabet qui n'a pas de sens en soi.

Pierre Boulez : Et ça n'est pas commode de devoir utiliser les deux.

Gérard Assayag : Nous pourrions continuer très longtemps cette passionnante discussion mais nous devons rendre l'antenne, pour que le Festival et le Colloque se poursuivent. Je pense que nous avons eu deux très belles paroles de fin et je voudrais juste mentionner une conclusion sur l'émotion, je me rappelle avoir lu dans l'un de vos ouvrages, celui avec Changeux, et qui est que pour qu'un jour les machines puissent s'imaginer des buts, et donc deviennent plus intéressantes, il faudrait qu'elles souffrent. Nous avons un grand programme en tant qu'informaticiens, pour faire en sorte que les machines puissent souffrir, elles aussi. Merci Alain Connes, merci Pierre Boulez.

Rencontre entre deux figures majeures de la création musicale et de la recherche mathématique contemporaine, Pierre Boulez et Alain Connes.

Quelle est la place de l'intuition dans le raisonnement mathématique et dans l'activité artistique ? Y a-t-il une dimension esthétique dans l'activité mathématique ? La notion d'élégance d'une démonstration mathématique ou d'une construction théorique en musique joue-t-elle un rôle dans la créativité ?

Ce dialogue autour de l'invention dans les deux disciplines est animé par Gérard Assayag, directeur du laboratoire CNRS/Ircam Sciences et technologies de la musique et du son. Introduction : Frank Madlener, directeur de l'Ircam.

Dans le cadre de la troisième conférence internationale “Mathematics and Computation in Music” (MCM 2011), Agora 2011.

Captation et postproduction Année Zéro. Production Ircam.

Creativity in music and math
Pierre Boulez and Alain Connes

INTRODUCTION : Good evening everyone, welcome to the heart of IRCAM in the projection space, for this original meeting between a mathematician, Alain Connes, and a composer, Pierre Boulez. So, this meeting belongs to the Agora festival, which questions the relationship between invention and constraint, finally between intuition and logic. And it seemed very important to us to place this nodal meeting point this evening, this attempt to meet between two worlds which coexist and which, maybe, have things to say to each other.

So I just wanted to point out that obviously there will be deduction in artistic operation as well as intuition in mathematical operation. And it's an unfathomable relationship and quite complex. Gérard Assayag, director of the Joint Research Unit CNRS-Ircam, will lead, if necessary, this debate, in any case, will serve as a catalyst. And I also wanted to say that this debate is part of the Mathematics and Music Conference, an international conference taking place at this time at Agora.

Maybe this conference will decree the irreducibility between artistic invention and mathematical invention. But irreducible is a term which was questioned by mathematicians. So we stay in the mathematical field. By way of launching, I only wanted to make one quote, like we often do in France to start or to finish, a quote of the most intuitive, and maybe of the most deductive of all minds, Leibniz, who said and who certainly spoke to composers as much as to scientists :

> *"The perfect world is the simplest world in hypotheses and the richer in phenomena.".*

I give the floor to Gérard Assayag.

This conference was held at IRCAM on June 15, 2011. It can be viewed at the address : https://medias.ircam.fr/x70ce3e$_{p}ierre - boulez - et - alain - connes - la - creativ$

GÉRARD ASSAYAG : Thank you Franck. We will start with a short presentation by Pierre Boulez and then engage in a dialogue in partly, but in partly only, improvised.

PIERRE BOULEZ : Okay, so a little text at the beginning, to launch a little debate, because it is not at all a definitive and dogmatic text. It is a text, on the contrary, rather skeptical, I would say. If, to account of a work, we talk about mathematical music, it is not an alloy very cordial. These two words, so close to each other, indicate a work barbative, dry, inexpressive, boring.

It does not come from the heart, does not return to the heart, to quote, once in addition, this great model, but comes out of the brain and doesn't even go to another brain. So it's already a kind of rehabilitation of thinking, of musical reflection than one way of directly bringing the two words mathematic, music, and to add the third word contact, discrete word, unpretentious, but a sign of a will that could not be more determined. Good. Obviously, this is not the first time that this rapprochement has been attempted.

From the quadrivium in the Middle Ages, to the work of Rameau and d'Alembert and even the mystical constructions of Scriabin. We even have much written. And yet, there is still some sort of border, said, between musical creativity and the structure of the language explained or the less scientifically approached. When a musician, a composer, close to the computer tool, who wishes to use electronic equipment, many misunderstandings can arise, which are difficult to overcome. Desiring before all the tools that allow him to work step by step, he attaches himself to an immediate return. He expects to be made proposals, let him to be given examples. From there, he can imitate these examples or try to transgress them by modifying the parameters which one proposes to him. But he may as well not go further and abandon this tool that he has just touched. The second pitfall is to transcribe too literally rather, diagrams supplied to it by the mathematical tool or arithmetic.

That which in a case makes sense is no longer relevant and does not make sense in the literal transcription. As much the first approach that I point out is based on immediate perception and does not care to codify for a launch pledge, as much the second approach worries very little, if at all, about the perception, and relies much more on the notion of schema that can be applied regardless of any parameter. Taking into account only the perception, we cannot organize a language, the objects that we found are not strong enough for that. If you don't take perception into account, language can only be constituted in a properly hazardous manner, the parameters not having the same value in the template and in the transcript.

This is where the aesthetic criterion appears to choice or reject the so proposed solutions ? Facing the picture was total possibilities. Intuition becomes like an indispensable short circuit. This is how among all possible universes of intervals, durations, dynamics, etc., intuition is going to choose the one that will serve the composer when the solution will acquire all its necessity. The more we will be able to master this universe of possibilities, the more the intuition will have been used as an absolute criterion in this instant of the choice more or less approached a certain truth that we need at a given time.

Besides, whether we think music with or without an interpreter, music combined between electronics and instrument or purely electronic music, it remains to find the gesture and the form. We are no longer dealing with objects, but with textures which, by continuously changing or breaking, will occupy a space-time. What mathematical model will give us the possibility of finding this gesture which will justify all the other categories ?

From this point of view, I found the quote from Malarmy placed at the head of this symposium : "A dice will never abolish the hazard.". To sum up my attitude as a composer, I would say that I did not wait the whole from a systematic organization of a few parameters that these are. I suppose that the invention, if it is carried out, can only be done if it admits the accident, the unexpected that questions to what we thought establish.

As far as I can tell, scientific intuition goes through the same phases. And on this uncertain ground, it is able to confront with musical intuition. It is a very fragile profession of faith, of course, that I propose, but I owe, I believe, more to this fragility than to the security of dogmas. I believe it to be full of promise.

Gérard Assayag : Your conclusion illustrates a tension which, I think, crosses your work, which is the tension between system and freedom. And in a recent interview with the magazine Musik Blätter, returning to *The hammer without master*, you clearly indicated how this work had marked its time by a combination of very finished constructivism, even a little rigid, stemming from the school of Vienna, but with an ornamental freedom and a certain freshness that we could call the French spirit let's say. So the idea was to work with constructivism, but so as to be free there. It's one thing which is not obvious and I say to myself that it may be a problem that also the mathematician meets. What do you think, Alain Connes ?

Alain Connes : Let's say that I've thought about these two things a bit. There are aspects of which we speak relatively little in mathematics, which are precisely creativity and the role of aesthetics. And I think I'll deliver some thoughts I had on that, but just like a starting point, I think it will match what you have told. So, in fact, a priori, when we talk about creativity in mathematics, the mathematician is a little skeptical because most of the task of the mathematician is problem solving. And it's basically a task of discovery. That is to say, the mathematician is looking for truths, that preexist his presence, before he begins to search. And what is quite extraordinary, precisely, you were talking about this relationship with mathematics, which is quite extraordinary, is to see that mathematics evolution that took place in the $\mathrm{XX}^{\mathrm{th}}$ century, in fact, already allows the close relationship between music and mathematics. Why ? Because, in fact, the role of mathematics which, at the beginning, was a role that one could roughly summed up as part of physics, has become, over time, in a thematic called modern mathematics of $\mathrm{XX}^{\mathrm{th}}$ century in fact, it has become a kind of substitute for philosophy at the level of concept creation. And what's quite remarkable, in fact, is that so far, this transition can almost be traced back to Galois. And which is quite remarkable, is that a bit like in music, it has generated at the start considerable resistance which continues to manifest itself sporadically. But I'll quote you... Does it bother if I do a quote in English because it's a text that is in English at the beginning. But it is a very recent text by a well-known mathematician who shovel Vladimir Arnold, and who talks about mathematics, and who talks about the teaching of mathematics, and who speaks about modern mathematics. Don't worry, I'm French, so I will defend the French point of view after. But I still have to expose this point of view. So he says :

"*Mathematics is a part of physics, physics is an experimental*

> *science, a part of natural science, mathematics is the part of physics where experiments are cheap.* (laughs). *In the middle of the twentieth century, it was attempted to divide physics and mathematics. The consequences turned out to be catastrophic. Whole generations of mathematicians grew up without knowing half of their science, and of course in total ignorance of any other science. They first began teaching their ugly scholastic pseudo-mathematics to their students.*"

It continues, it continues, and his text is very funny, it is full of spikes, etc. And then, he says :

> "*The ugly building built by under-educated mathematicians who were exhausted by their inferiority complex and who were unable to make themselves familiar with physics, reminds one's...*"

Well, then after, he speaks of an axiomatic of odd numbers, etc. and then he says so, finally, that he interviewed French math students for example mathematics students, he asked them "2 + 3 ?". And a french primary school pupil replies "3 + 2 because addition is commutative". And then he explains :

> "*Judging by my teaching experience in France, the university students'idea of mathematics, I feel sorry for them because they are very intelligent but deformed kids, is as poor as that of this pupil."*"

The student who answered "2 + 3 = 3 + 2.". And then he give examples.

But in fact when we deepen this text by Arnold a little, we realize if he wants, what he criticizes is mathematics. What they criticize is if you want all the examples he takes where he says the modern mathematicians don't know how to do that, etc., it's mathematics XIX$^{\text{th}}$ century and the mathematics, he gives examples of curves plot in the plane or things like that, it's math that now are completely digested and the computer does a lot better than a mathematician, he does it in a quarter of a second. And what he did not digested, what he doesn't explain is the wonderful phenomenon which occurred in the mathematics of the XX$^{\text{th}}$ century and which precisely, allow

... I'll read you a little text from Grothendieck. And what Grothendieck says is :

> "*The progressive clarification, precisely, of the notions of definitions, statements, demonstrations, mathematical theories including everything we could, if we only did mathematics as being a part of physics, we could ignore them completely. And to say that it is fantasies of axiomaticians, was in this respect very beneficial and made us become aware of the power of childlike simplicity however. That is to say that mathematical concepts, in fact, should not to fear. In general, they have a childish version and this childish version is much closer to their reality than the extremely versions elaborate," therefore of a childish simplicity, however, which we have to formulate with perfect precision the very people who might seem indivisible by virtue of a sufficiently rigorous use of language more or less current pledge. If there is one thing that fascinated me about mathematics since my childhood, it is precisely this power to define in words and to express perfectly the essence of such mathematical things which, at first glance, appear in such an elusive form or so mysterious that they seem beyond words.*"

And that, if you will, is an extremely important thing because most people, when you talk to them about math, they think about arithmetic, they think of numbers.

Okay, they may be thinking about geometry, but they don't realize that modern mathematics, that is to say the mathematics of the XX$^{\text{th}}$ century, they have just succeeded in perfecting the current language by concepts which are extremely precise, but which have potential of applications that goes far beyond physics.

So, when you think about music and if you want, for well situating things in relation to mathematics, I'm going to read you a little text that I wrote a long time ago and where I was talking about the link in between and I said,

> *"It is crucial to me for a child to be exposed to music very early. I think exposing a child to music at the age of 5 or 6 makes it possible to balance a little the preponderance his sense of sight intel-*

lect and this incredible, purely visual wealth, that a child acquires very early and which, therefore in fact is related to geometry.".

It is linked to geometry as long as it fits into space through a mental image. If you want, there is the same phenomenon in mathematics than in relation to a musician. When a non mathematician sees a mathematician working in the metro. What does he see ? He sees a page full of formulas. They have no meaning. When a non-musician sees a musician working in the metro and reading a partition, it is exactly the same, it feels like ... it's the same ! Now, there is an essential part of the work of mathematicians which is precisely to create mental images. But when I talk about mental images, it has to do with geometry. We see a geometric figure, we see, it fits into space. But what's really amazing is that so far, in the functioning of the mathematician, there is not only the geometric image, there is algebra. And there is nothing visual about algebra, but on the other hand, algebra has a temporality, that is to say that the algebra fits into the time.

When you do a calculation, when you expose a demonstration, that takes place over time. It's just like the musician who, after having understood a musical work, having it completely zipped in his mind, something that has nothing to do with it, spreads it out. For the mathematician, it's the same. When he does an algebraic calculation, it takes place over time, but it's something which is very close to language, which has this diabolical precision of language and in a way, if you will, there is a pretty incredible collusion between algebraic computation, that part of mathematics that has to do with the language, which takes place over time and certain musical works.

And that, I can't help thinking about it. In other words, for me, there are some relatively short musical works that say something. And I even had this impression, you will laugh but I even had that impression when we saw these rooms that go repeatedly listen to Beethoven's sonatas of years and years. It reminded me, if you will, people who are there and who are trying to understand. And we repeat the same to them. They know there is something, and this thing is not transferable by another way than through music. We can't transform into something else than what is transmitted, but it transmits something.

So, we cannot say that it is not a language. Likewise, we can't say that maths don't have a language aspect. They have a language aspect which is extremely important.

But the gist of what I said, if you like, is that this aspect launched pledge of mathematics has become much more flourishing. He became much more expressive. It has become much broader than, precisely, the mathematics of the XIX$^{\text{th}}$ century. And when we stay with mathematics of the XIX$^{\text{th}}$ century, of course, you can say "Oh, these mathematics have a connection with music because there is arithmetic, there is log 3 on log 2, which is the well-tempered keyboard, etc."

But it will not go beyond. In fact, mathematical language, so far has crossed many other frontiers and in a way, now, we can hope that, precisely, there is a possibility of reconciliation which is much bigger because of that. People still must accept mathmodern materials. And people still must have absorbed all this elaboration, which is not at all obvious.

Gérard Assayag : So this algebra / geometry duality is one of your workhorses. It's extremely interesting because it brings to the heart of the math-music problem, because it's a duality that we constantly meet in musical research, namely metaphorically, we discussed it, either technically, and I could possibly give examples. So especially in musical analysis, that is to say that when we look at a score, there is an expression which I heard and which I like well, it is the partition seen plane, when we try to understand this mechanism, that is to say it keep as a whole but we have the right to do what we want. We can jump from one point to another and relate a point to another freely and it's an obviously geometric vision.

Alain Connes : Of course.

Gérard Assayag : Or there is another way of approaching it, which is from the point of view of these generating mechanisms. And here we have a point much more local, because we look at the mechanics. Is that, it's something you feel, this tension when you, when you watch music, not when you create it, but when you watch an existing music ?

Pierre Boulez : When I watch music, I start first by trying to understand the form, because it is what directs you, simin the evaluation. We did one experiment here out of three levels of understanding of music. We first gave, say, a Mozart's sonata or a movement, or a half-movement (the first half of the movement), and we asked someone who is absolutely not a musician, someone who has no musical culture, we asked him what did he think ? He gave a very vague description of it and not at all relevant if I can say. Then the medium level. He had listened several times sonatas by Mozart, so he could find a form, at least a contrast between themes. It's already a much more precise and the cultured, then, described exactly what happened. Then we spent a Schophausen's piano work, a fragment of course. Well, the three responses were very similar because everyone created their own theater of the shape and they would point to the passages that had particularly struck them, that is, there was no conception of form.

But there was a conception of events and events that were still not linked by a form but separate events, which had struck, either because they were very strong, or because they were played by a specialized instrument, etc., etc. So you can see that it's very difficult to approach even a form, because a form is really, disounds, what... how the person looks at it. And there, when one is a musician, obviously, we are trying to have a view, let's say more objective, and not only subjective.

This is how I see music. So when we see the detail, we indeed see how the discourse is constructed and if it is constructed more horizontally than vertically or more vertically than horizontally, or if it is built by breakage, or if it is built by continuity, etc., etc. There is a lot of ways of looking at the very perception of music and I'm convinced that there are many people who also make a kind of... who... since they cannot understand the musical form, who make themselves a certain narration, especially when they have listened to a work several times, they make a personal narration and it is this narration that they follow. That's why people, the general public, if they don't make an effort, settles so well in a work because they always listen to it by the same way and therefore that they has before theim the same images, the same stereotypes, the same shots, I would say, rather than the same pictures. And that's how they absorb music, they don't absorb it by a kind of description of continuity, they accepts it as a whole, followed by a whole, followed by a whole.

Gérard Assayag : But the expert-analyst, the composer who watches another composer, doesn't he have this freedom when he is looking at a score, to finally see it as a space where he can walk around at will which is not realistic insofar as the score was not generated from that way, by acting simultaneously on all parties ?

Pierre Boulez : Yes, certainly, when you analyze ... Me, what interested me in analysis, it's even false analysis, but which generates something.

I remember once when Stockhausen showed me an analysis of the Webern quartet, but he looked at the density of meetings. What has nothing to do with Webern, which was just a four-voice counterpoint, and therefore a four-way counterpoint, especially if it's a cannon, things are offset from each other. So if there is an incorrect individual phrasing, things are obviously not always of constant intensity. But for him, what interested him at the time was the phenomenon of intensity.

How can a four-voice cannon give intensities of this order, statistically speaking. I find it more interesting than analyzing even simply how the composer designed it. What is interesting in an analysis, it's not when you want to redo what the composer has done, it is to see by what process he arrived at such a result. And so, even if the analysis is false, is completely false, the analysis is much more interesting because it is productive.

Alain Connes : Okay, there is still a rather frank difference, precisely, there, we are talking about Works. So we see... So if we look at a particular aspect of mathematics, which is a demonstration, we can say the next thing which is a little bit similar, it is that if you want there are two ways to look at a demonstration. There is a check line by line. And that, I think, is a bit like someone playing a song of music which he has not yet digested and who is obliged to have the score before the eyes.

So we can do that. We can check a demonstration line by line. But there is a second step which is extremely important. Because in fact, a mathematician knows he only understands a demonstration when he is able in his brain to zip it in half a second. That is to say that he will not have the successive ingredients of the demonstration, but he will have immediately the entire demonstration.

Pierre Boulez : Can I open a parenthesis ?

Alain Connes : Of course.

Pierre Boulez : In music, that very much depends on a very different point of view , according to the fact you are a performer, or if you are a composer. If you are a composer, you have plenty of time to navigate and you move from one point to another and you try to consolidate your analysis by comparison from one point to another, what are the differences, what are the similarities, etc. If you're a performer, this way, let's say, of amassing the knowledge is a consequence ... is a kind of unconscious thing.

When you are at point D, for example, you know that you have already played point A, and its successions, and you know you're going to meet the point N and its successions. But you don't know exactly. But you know, the closer it gets, the more you are aware of what will follow. And the more it goes away, the more you are aware that it goes away and therefore that the form has reached a point of the present, that is to say that we constantly have these three dimensions in the head, present, of course, where you are and the past who brought you there, the future which will lead you to ...

Alain Connes : Of course, of course. But what I mean is that precisely, this kind of linearity of the work, there is something that is extremely striking for the mathematician, that is to say that if a mathematician tries to understand a demonstration, there is this process which is to try to read it linearly. There is another process which is much more efficient, which is to look at the theorem statement and start by looking for a demonstration yourself.

And when we've done that, what happens is that reading the demonstration, at that time, we will say : "But that's nothing. That's nothing". And we are going to say : "There, there is something going on". And it's only like that, it's only from this mechanism that we really understand what is going on... So that, I don't know if there is something analogous to that in a musical work. That is to say, does a musical work answer a question, etc. And we can say when the work takes place "Ah !". Well, I sometimes had that impression at the end of certain pieces where there was a kind of moment when there was a moexplanatory a posteriori or vice versa. I mean by the time we see that there is a theme that will then unfold, etc. But in mathematics, it is something extremely strong.

That is to say, there is a huge difference, precisely, between mathmatician who vaguely understands the statement and then begins to check the demonstration step by step, etc. And the mathematician who is going to have an act which is not at all passive, but will start to think for himself and after, only after, go and watch the demonstration.

Gérard Assayag : Does that have anything to do with compression, this zipping you are talking about ?

Alain Connes : Absolutely, of course, of course. That is to say, the mathematician works by levels of abstraction, by hierarchical levels of abstraction, that is to say that in fact, it means that he cannot progress, as the concepts are very complicated, and with this notions of zipping, he is able to make them occupy a space which is almost zero and afterwards, he will be able to manipulate them abstractly without knowing what the zipped contains, simply by having an intuitive idea of "what this motion signify. Of course for that, language is extremely important, that's why, well, there are very creative mathematicians like Grothendieck, etc. who gave 36 new names like *schema*. Schemas have a very precise mathematical sense, etc. And it's only with this zipping mechanism that we can progress through hierarchical levels of understanding.

Pierre Boulez : For music, it is mainly memory that plays a role. I see, for example, it's very striking, when I was mainly in orchestral charge, I did introductory sessions, but explanations on musicians'Works and I always noticed that there was always a need for examples. By that, when you play the work, the example immediately comes to mind.

And there, the memory works so as to magnetize the perception in a direction or in another.

Alain Connes : Okay, yes, so I think there is something which is very analogous in this case, because, well, there are some mathematicians like Grothendieck who work a little bit backwards, that is to say that they start from the general case and then they... but most of the mathematicians work differently, that is, if they are given a good example and have been explained something concretely on an example, a general phenomenon, precisely, they are perfectly capable to immediately generalize and to have the general case and I guess that in musique, finally, we can see in Beethoven's music or things like that, we can see that there is a generative system that allows from things relatively simple to generate quantities of things which are deduced from it and this, in mathematics, is a fairly general phenomenon. So there is this side of almost automatic generation that occurs and that plays a very important role, very, very important.

GÉRARD ASSAYAG : So to come back to this duality concerning algebra versus geometry, you mention, so it's very important, that on the algebraic side, you put time, there is a begetting, and so a generation. There is a combinatorial of symbols. There are production rules. These are things that we use a lot in music. The musicians were interested a lot, for example, in formal grammars or production rules to find interesting sequences, or not elsewhere, of notes. But as soon as it produces sequences, we agree, but sequences are they sufficient to define time ? It's a question that I'm going to ask both to the mathematician and to the musician.

ALAIN CONNES : Of course, I will answer because I mean : my first mathematical work consisted exactly in that, that is to say if you want, and what is quite incredible, is that, precisely, we realize that this called non-commutativity, what does that mean ? It means that when you write a word, it's not all of the letters of the word that matters, but it's also the order in which it is written. Okay, well, we can give 36 examples. And what is absolutely unbelievable, what is absolutely incredible, is that precisely, you realize when you do math, you realize that when you look at non-commutative geometry, that is to say the algebra precisely, in which one does not dare to say that $abab$ is equal to a^2b^2, well, time is spawned in a natural way. This is much stronger than saying that algebra takes place over time.

In fact, and that comes from the quantum, that is to say the quantum taught us that precisely, when we were doing mechanical calculations, in a quantum paradigm, we couldn't, that's what Heisenberg found, we could not swap quantities like position and time, etc. We could no longer calculate too simply when we are interested in microscopic systems, which is absolutely amazing. And the philosophical potential has not been sufficiently exploited at all, therefore. The fact is that when we take an algebra of a certain quality, which we call an operator algebra, which is non-commutative, well, it generates its own time. It has a group of automorphisms which is parameterized by a parameter t but that is really the time in the physical examples which turns over time. So this is amazing and it comes exactly because you cannot swap a and b. So when you write a word, the order of the letters is important, while when Descartes, etc., when people of that time were doing calculations, they were doing calculations commutatively, that is, by swapping the letters.

Gérard Assayag : If I understand correctly, it is the algebra that evolves itself and which transforms itself, which therefore generates a series

Alain Connes : It creates a passage of time. So that had already been tipped since Hamilton had written utterly prophetic sentences, precisely, and where he was talking about the relationship between algebra and time.

So what struck me earlier was that you were explaining yourself that, precisely, in the work of an interpreter, there is always this present. And then there is the past and the future, etc. So we can see, I will say it roughly speaking, it is a deep, microscopic analysis of time. It's an understanding of time which goes further and further into finesse. But what is quite amazing, is that at the algebraic level, there are exactly the same thing that happens and does it rightly, not only, well sure, an algebraic calculation is done in a linear way, with ordered terms in time, that's nothing.

But what's amazing is the reverse. It's the fact that even if we were doing math outside of time, etc., well time would be there and would be present. It would be generated naturally.

Gérard Assayag : You mentioned another point earlier which was without saying it, I will say the technical term, you will excuse me, the Curry-Howard correspondance, i.e. the fact that a proof, we can also look at it as a program, as a calculation.

Alain Connes : Yes, if you want, yes, of course.

Gérard Assayag : It brings up a question we asked ourselves here during the very first Mathematics and Music congress which was organized in 1999 at the request of the European Mathematical Society with M. Bourguignon. We decided to put this under the umbrella of the question "Is there a correspondence between what musicians call musical logic, which is always an organizational logic, and what the math just call logic, mathematical logic or formal logic, mathematical logic ?

And we obviously had not decided this question, we had just managed to say the following : there is a lot of logic in the organization of music. There are many formal terms that we generate. There are even things that look like axioms, that is to say starting hypotheses that we give ourselves to generate a material. But there are two things that are not present ; in music, there is no notion of truth : we do not seek that these terms we aggregate, which will eventually form a partition, establish a certain value of truth, that is not the problem. It's not the problem of logic. The problem of musical logic is not the problem of mathematical logic. Do you agree with me ?

Pierre Boulez : I certainly do not agree with that. I said it discreetly but I think so.

Gérard Assayag : We can say it and I think it's easy to establish. Here there is no truth value, so already, it removes a whole computational aspect because often that's what we're looking for. And then there is another problem much deeper, which is as follows : in pure logic, when we unroll a demonstration, I can use a term A for my demonstration. And I have every right to reuse it afterwards, but nothing happens. It doesn't cost me anything. I use it, I can use it a thousand times if I want, if I longed for. When you consider a musical sequence, an element of language musical as a little bit like a demonstration and that we look at the terms that we aggregate, notes, chords, etc., well, the fact to have exhibited a musical object is not at all innocent. And the second time that we expose it, it doesn't have the same value at all as the first time we had exposed him. So already, already, we are no longer in this hypothesis. *(Laughs.)* I see, I think I see you coming.

Alain Connes : No, no, in fact, if you want, that means that you don't know a certain part of mathematical development, which is what is called linear logic. In logic, in linear logic, especially listen to Jean-Yves Girard from Marseille, when we used it once, we can no longer use.

So I mean, don't believe that the mathematicians are missing of imagination. They used this logic. It has already appeared to them. But in fact, if you will, well, just bounce a little bit on what you say about what happens in music at the logic level, what I would say, it is that there is indeed for the mathematician a role of the aesthetics, when he watches a demonstration. That is to say a mathematician is able to tell by watching a demonstration how likely it is to be true. He is able, by looking at a formula even obtained by a computer, to tell the chances that it has to be true. So there is a role of aesthetics. But if you want for me, you shouldn't believe at all that quality, well, is a quality necessary for a mathematical statement to be true, to be correct, a demonstration of being correct. But the concept, which is much more interesting and much more difficult to obtain and which is much closer to music, is the notion of meaning, that is, if you want a mathematical statement, you could brick a computer that would make you 36 mathematical statements at the shovel and that would all be correct because he would have made them by making correct demonstrations. It would be easy. However, if you looked all of these statements, most of them would be completely uninteresting because they wouldn't make sense.

What does meaning mean ? The notion of sense is something that is ... which does not respond to logic, because the statement in question is correct. But there is for the mathematician a notion of a statement which is wonderful, which has a meaning. And I think that here, we have a connection with music. Because you told me a musical piece doesn't have to be correct, of course, but it must have meaning. If it doesn't make sense then, well, well, I'll say, we could do anything. We could invent 36 music skins. And there, I think that we touch on an essential point because the notion of correct is a necessary condition. It is a necessary condition for the mathematician, of course. But a mathematician could spend his life doing what Arnold said about odd number axioms or things like that. And that means he would have wasted his time. he would have wasted his time because he would not have found the truth that makes sense. He would not have revealed a part of this mathematical reality, but precisely, things that make sense. And this is an extremely difficult thing to define in mathematics. And I think it's also difficult to define that in music, in a certain way.

Pierre Boulez : Yes, it is very difficult because during history, we see people who have less, especially in the XVIII$^{\text{th}}$ century, vocabulary and in one case, the work is very beautiful and in the other case, the work is going to be completely uninteresting. That is, the same grammar can serve not for the purposes at least, but can serve very different purposes.

Alain Connes : Yes, so, I mean, it just means that when we stick to the level of structure, logic, etc., we don't touch the essential problem and the essential problem for mathematics, so far, really, of course, there is the problem of truth, there is the problem that we can talk long, wide and cross. But there is a problem much more difficult, much more important, which is to see precisely in what sense what we found reveals a little corner of mathematical reality. And that, that means to make sense. Exactly.

Gérard Assayag : The problem you raise is the problem that meet automatic theorem provers, programs that demonstrate theorems, they can demonstrate correct theorems, but they don't know how to say that a theorem is interesting. And so, they can demonstrate billions of internal things without sens. So it's interesting because it can join a problem that we know here, which is computer assisted composition, where we have computer programs that composers use to calculate interesting materials or structures.

But they could calculate billions that would not be of interest. It is ultimately the composer who decides. So could you help us ? How could you, composer, help us to converge in a finer, more interesting way, towards results that are not only correct from the point of view of calculation, but likely to interest the musician ?

Pierre Boulez : The first thing I can answer is a very silly answer, it's because I like it, simply because what you give me, what you offer me, I like it.

Gérard Assayag : This is how we work.

Pierre Boulez : Yes, but the whole reasoning of music is based on that, of course, we're not going to say that stupidly : what pleases to me, so I choose it. You may have a terrible taste, the kitsch, and so to say, I like it too, of course. But what's interesting is that when you have so many possibilities, you can't listen, if you have a thousand possibilities, after a hundred you will be tired or you will have absolutely no judgment. That's what is dangerous in music. The more you listen to the different solutions, the less you have reactions, let's say, to choose things. And so, at some point, two things are needed.

First, narrow the scope of the choice and second, decide : "yes, that, why do I choose it ? Because it looks better to me, for this reason, and this reason". But deep down, you're trying to justify yourself. But the main thing is only ... it's not only, but it's mainly intuition and intuition, well, it exists and it's a gift that you have, even if you are very gifted, you have it one day, you don't have it the next day.

That is to say it is very variable and sometimes, you are very sharp, others times less sharp, because you are more seduced by the... And there are also a difficult question in music that is how to join the abstract structure if we can say, and the concrete object, because the concrete object which is very interesting, is maybe in a completely inept structure. And on the contrary, a very intelligent structure can have objects which are completely uninteresting facts. And so, it's this combination that is not easy either more to organize, which makes the work acquire great validity. But that, that has always been the case. I mean, if you look at the history of music, you have for example two very distinct personalities like Berlioz and Schumann, I take these two examples on purpose. In Berlioz's work, there is a sense of instrumentation which is absolutely remarkable even when he was very young. But the sense of harmony, that is to say of harmonic language, was very primitive per se. So we explain it's because he played the guitar when he was young and therefore the guitar simplified his vocabulary. It wouldn't enchant guitarists, if we say that. But while Schumann on the contrary had a very... much more refined harmonic language.

But his instrumental language was really, let's say, without a lot of meaning, without many colors, even, quite simply.

And so, it's very rare to have people in the same musicians who are also gifted, for the different components. So when you have someone like Wagner, obviously you have it, you have everything.

But Wagner who, let's say, never talked about a system, he always talked about new music, music of the future, etc. But he never codified his language. Not at all even. But he took the language as he found it, and under the influence, in particular of Liszt, he diverted the language of the function on which this language lived, and therefore ultimately, he invented this language very ambiguous where all relationships are possible. In more classic language, let's even say Beethoven, not to mention Mozart, you have chords that made revolving chords, so to speak that helped modulation, helping to go a little bit to a neighboring country, but in Wagner, you are... sometimes you have no idea where you are because he uses only ambiguous things.

This ambiguity became generalized gradually and led to Schönberg, who has again created a dogma.

And this dogma was interesting in a certain way, because it did indeed he organized musical language in another way. But this dogma, this dogma, ignored vertical phenomena, and, or barely took into account vertical phenomena, and this is the weakness of the twelve-tone language of Schönberg. Is that one dimension prevails over the others or over the other, specifically, that is, the horizontal domain prevails over the domain vertical and in Bach, that was typical, the vertical and horizontal domains rates will be completely controlled.

And there, the vertical domain, you perceive it immediately ; the horizontal domain, counterpoint, you perceive it when you have studied the score is the difference. You do not perceive the music of the same way if it is written in one way or another. And that, there is nothing to do, we will never change that, because it is a phenomenon of perception.

Alain Connes : Yes, what I wanted to say is at the general level of structure. It's, well, finally, if you want, we can roughly summarize a little bit of the mathematician's work saying that from time to time there is a mathematician who ... finds a big phenomenon. An example of that is for instance when Riemann finds the relation between prime numbers and zeros of a certain function. Okay ? And it's a find, that is to say that it is something that afterwards, we will be able to verify until a certain level with a computer, etc.

But it will give mathematicians a century later, two centuries after a kind of objective. And the reason is that we know that this phenomenon is deep enough and mysterious enough to be sure that all the concepts that will be invented, discovered during this research, that is, to try to find a demonstration of this fact, will have meaning, will have a lot of meaning. So what ? Precisely, where I think that there is a connection that is possible, if you want with music, is that we can say in fact that there are two aspects in the work of the mathematician. That is to say, of course, there is an incredibly rational aspect which consists, once we have an idea of a demonstration, to try to verify that it is correct, of course. That is pure rationalism. But there is an aspect which is much more interesting and which has to do with intuition. And this aspect that has to do with intuition is that there is a period in which the mathematician must absolutely not say to himself "Is what I say correct ? etc. Have I checked all the little details ? etc." And in which, precisely, he must allow himself to dream ? He must afford to see much further and in that period, which is basically, set a little bit like a poetic impulse. It is something that is not transferable in words. That is to say that if a mathematician is in this period, he is unable to explain it to people he is going to meet who will say "yes, well, but then ?".

And he is unable to write it. Because if he writes it, it's like he's said to catch something that will disappear from the moment it goes write it down. But the question I ask myself is to what extent, precisely, this intuition which is terribly present, which is something extremely strong, can be translated in another way. Can it express itself in a musical form, can it express itself otherwise. Because it comes from something that is very deep, which is inside. And if you want, there is a text by Grothendieck that I will read to you if I have time and who speaks precisely of the dream in mathematics and who says to what point, precisely, the dream is not admitted in mathematics. It is not admitted. Why ? Because when a mathematician writes an article, he will not write about dreams he has fantasized, etc. He will write demonstrations. And so there is an invisible part of the mathematician's work which is never visible.

The visible part is going to be a rigorous, written demonstration, etc. And it is going to be a whole... something that is completely hidden and that is all this invisible part and that consisted of these... all these days, etc. in which there was a dream, which was present in intuition, which was present in mind and not yet realized. Well, this, it makes me think if you want the music to work, it feels as if we are at this level of intuition, of something that is not yet realized, etc. but that we managed to transmit, on the other hand. We managed to transmit it in musical form and from the moment when, precisely, there had been something real behind it, there was a real inspiration, etc., there, that makes sense and finally, you get through music to convey someone. So what ? The funny thing is that it finally happened to me to have an outside contribution through a musical work for a problem that I was asking myself and that this musical contribution is more important than if I had read a mathematical text.

I used to listen to relatively short musical works, but that had a meaning, and it was a meaning that fit in with some kind of intuition that I had at one time, but could not translate otherwise, I couldn't translate it into words. I couldn't say "Good, well, etc.". But on the other hand, there was for example, I don't know, a Prelude, which corresponded exactly to this intuition. I did not know why. So there, there is something, in my opinion, if you will, in the notion of meaning and all that.

Pierre Boulez : No, I say that the transcription of a musical intuition, from mathematics to music, is very, very uncomfortable. It is very, very uncomfortable because the choices are not the same. The culture is not the same and the choices are not the same. I was saying just now, I take the case of a composer who did it, Xenakis for not to name it, which used a lot of glissandos, curves, so we saw superb, magnificent curves, etc. But what do we hear, we hear an extremely poor material.

Alain Connes : That was not what I was talking about at all. If you want, there are two very, very different things. There is the fact of using mathematics, well, I remember listening, in fact, to a conference of Xenakis, a very, very long time ago, at a given moment when I was asking to myself if I was going to do math or if I was going to be interested in music ? Things like that.

And he disgusted me, really, because he had come to the Sorbonne, he had made a presentation and in his presentation, he had surrounded the painting in which he had some general formulas by mathematical formulas, and these mathematical formulas had nothing to do with what he was talking about. So, they were there only as a psychological tool for, how to say, scaring people who didn't know math and for, so, imposing something on them like that. So it was not that at all I was talking about.

What I was talking about was a problem that is completely open to my opinion, which is that there are certain mathematical notions, certain mathematical intuitions which are not transmissible by words at the moment.

Pierre Boulez : Yes, but what I wanted to say is not just as a criticism. But let's say a glissando, which follows a curve or another, it's an extremely primitive material, it's a limoth. What interests us in a continuity like that is the notion of cutoff, i.e. the interval, because the interval really defines the way you perceive things. And so when we target, for example, we had seen, even a curve that inspires you a kind of gesture... But what gesture, it should be transmitted not by a direct gesture like that, but you have to transmute it, practically, with intervals that will really give it sense. And that's why I say it's the transposition, or trans-figuration of that, and it's really less primitive than we think.

Alain Connes : Okay, but what I had in mind, for example, you mentioned, about Wagner, the ambiguity between the tones, etc. And then, precisely, there is a mathematical idea which is relatively simple to explain, which is due to Galois and which is not yet, how to say, captured mathematically. And this is precisely the idea of ambiguity. And so, what I have in mind, this is the next thing, is that precisely, like math can capture concepts at levels of conceptualization which are very high... For example, what Galois did, what he understood, is that in fact, people before him, were looking for symmetries, and he, he managed to understand that in fact the first thing to do was to break full symmetry between the roots. And after, once we broke completely symmetry, we managed to find the interior structure by other processes. But what I have in mind is that this idea, well, you go and read 36 math texts around this idea. There is none of these texts which completely exhaust him. There are none. That is to say during that you write it in rational terms, etc., you can't exhaust it. And I am persuaded that there are surely certain musical structures which would arrive at transmit part of the content of this idea, in a complementary way, in the rational way of saying it. That's what I have in mind, not at all that we can use mathematics to guide certain things... It is something which is much more, which is much more at a conceptual level, and to the fact, precisely, that there are mathematical concepts much more elaborate, much more complicated and much more ticks, how to say ? And at the same time much more childish than one could believe and that, precisely, we cannot perceive them completely when we only use linear, rational language, etc. And that polyphonic music etc. can help considerably, if only by the polyphony, that is to say the written language is a unique linear language. There is only one, only one narrator. And polyphony, precisely, well, well, we know that. And in my opinion, precisely, that should allow us to go tobeyond certain things that we are only able to do at the moment.

Gérard Assayag : The question you are asking is really the one concerning the source of creativity. In other words, if I transform it a little, "Are there very deep, pre-verbal levels of representation, almost conceptual, but we're not really going to say that since they are still not verbalized, but which could then, by the time they hatch and where they appear, transform in various ways into mathematics, into language."

Alain Connes : It's exactly that. But what I mean, is that I always come back to Grothendieck, but he shows well how precisely, the process of creativity is a process of back to childhood. It is in this sense that it's a process which is to try to get rid of all dogmas, everything what was imposed on us, etc. And to return to a perception completely childish. But precisely, well, after precisely, having been able to make it universal and to transmit it. So that's obviously at the heart of music, but it's also, it's similar within mathematics.

Pierre Boulez : But is it possible to be so childish ? I was going to say infantile, excuse me, for being so childish, having done all the same experiences that have marked you ?

Alain Connes : Exactly ...

Pierre Boulez : Isn't it artificial ?

Alain Connes : I don't think it's artificial. I do not think this let it be artificial : the example of Grothendieck, which is an extreme example, mentally striking because at one point, precisely, it has, to return to the CNRS because he had left and he had made a request to the CNRS and his text was called *Children's drawings*. So you read this, it's a child, you can say, it's infantile, etc. But in fact, it was connected to one of the deepest math problems which is what's called understanding of the Galois group of the algebraic closure of Q, etc. And it is very often the case, in fact, that when people become professionals, they surround themselves more and more with a protective layer which precisely prevents them from returning to this state. And on the contrary, I think that what is absolutely essential, precisely, is to allow the dream, to allow, to try to go beyond the prohibition of the dream, etc., and to return to that source. And I think when we go back to the source, for example, of the notion of ambiguity, which is a notion that exists and that could be manifested in quite a few areas, well then it will have effectively various forms, it will take various forms. And we will not arrive never to sum it up to an expression.

There will never be a single expression that will sum it up and it will remain a constant source of inspiration. And this is the case for Galois theory, that is to say that it is a theory which is not exhausted and it is not exhausted at the sense where it stays... that's when people really understand it, that is to say that someone could read a book on Galois theory and understand nothing about it just because he would not have understood the initial idea. And it's an idea, precisely, which is a childish idea, which is the idea of ambiguity.

But this idea, when understood, sets things in motion.

It's a real idea, it puts things in motion, and I think, it's very similar to music. Because you get the impression, if you want my impression, me, on creativity in music, it is not an impression, it's more than an impression compared to classical music, romantic music, that is music that is emotional. But my impression was more, compared to the mathematician, that there was a kind of emotional battery that charges, regardless of the instrumental expression and then, once it's charged enough, there is a job which is extremely difficult, which is to make individual emotion universal, transform it, and to make it universal. And it's a process that can seem extremely different from the mathematical process. But schematizing it, it is the same because what does the mathematician do ? What is the role of mathematician's intuition ? The role of his intuition, he is exactly like a hunter. He says "There is something there !". He feels it very, very deeply. But after that thing, he has to go to get it and there is a a reality which is extremely cruel, etc., and which prevents him from going to seek it.

So afterwards, he has a real job, and this job, I think it's the same. It's very similar to the work of having a personal emotion, trying to make it universal. So there is a parallel, of course, these are different things but the role of intuition is the absolutely driving role at startup and it's the same in both, I think.

Pierre Boulez : Yes, I also think so, most certainly, but, in more than that, I would say that there are two constraints : first, the object does not exist, whatever you imagine, so it remains to be built, and secondly, what we have, in music that is instrumental, for example, we have to take into account what is transmission. And this transmission will hurt if for example, the idea is brilliant but the realization is insufficient. And until this difference between the objects you use, for example, the notes. When you have, for example, a very remarkable object, I think, quite simply, because everyone knows that, to the sound of a tom-tom. A tom-tom sound is much more interesting than a violon sound, just like that, but what does it do ? This sound is so interesting that it gets out of context automatically, so you have to restrict it on the contrary, to use it in a very very measured way so that it has its place.

While you have a F#, a G, or whatever, it is neutral, and therefore you can use it for your discovery, that is to say that there are objects that are ready for discovery, and objects that are not ready for discovery, which monopolize ...

Alain Connes : It's a bit like a Chinese character that makes sense in itself as opposed to a letter of the alphabet that has no meaning in itself.

Pierre Boulez : And it is not convenient to have to use both.

Gérard Assayag : We could continue this amazing discussion for a very long time but we have to make the antenna, so that the Festival and the Symposium continue. I think we had two very nice ending words and I would just like to mention a conclusion about emotion, I remember reading in one of your works, the one with Changeux, and which is that so that one day the machines can imagine goals, and therefore become more interesting, they should suffer. We have a great program as computer scientists, to make sure that machines can suffer, too. Thank you Alain Connes, thank you Pierre

Boulez.

Meeting between two major figures of musical creation and contemporary mathematics, Pierre Boulez and Alain Connes.

What is the place of intuition in mathematical reasoning and in artistic activity ? Is there an aesthetic dimension in mathematical activity ? The concept elegance of a mathematical demonstration or a theoretical construction in music does it play a role in creativity ?

This dialogue around invention in the two disciplines is led by Gérard Assayag, director of the CNRS / Ircam Sciences and technologies of music and sound laboratory.

Introduction : Frank Madlener, director of IRCAM.

As part of the third international conference Mathematics and Computation in Music (MCM 2011), Agora 2011.

Capture and postproduction Year Zero. Ircam production.