1 Extraits de *Comprendre les mathématiques* de Claude-Paul Bruter

p. 9
Ces ouvrages, formellement bons par ailleurs, mais où tout est mécaniquement et froidement démontré et enchaîné pour satisfaire à une vocation de rigueur qui, certes, répond à une nécessité, mais a perdu ses racines.

[Les savants] se sont toujours efforcés de faire connaître autour d'eux la manière dont ils comprenaient les événements, d'autant plus que cette manière, à tort ou à raison, leur semblait être en progrès par rapport aux savoirs antérieurs.

p. 10
L'un des rôles majeurs de l'éducation est de former l'esprit des jeunes gens pour qu'ils soient mieux à même, notamment par leur équilibre intérieur, de supporter les souffrances, de venir à bout des épreuves quelle qu'en soit la nature, d'apporter leur contribution pour réduire autant que faire se peut, à l'échéance la plus brève possible, les désagréments que notre humanité peut connaître.
Une telle formation suppose qu'on développe et élargisse la sensibilité de l'être, et non point qu'on la restreigne, qu'on développe et élargisse à travers cette sensibilité aiguisée le souci de comprendre, et non point qu'on fige l'intelligence dans les limites d'un domaine de pensée borné. L'intuition de Poincaré lui a fait pressentir des évolutions dont il s'est alarmé. Il a craint que l'enseignement, en particulier celui des mathématiques, ne se dirige vers des formes qui émousse la sensibilité plutôt qu'elles ne l'exercent, comme cela lui paraît nécessaire.

p. 29
Pourtant, l'homme a besoin du rêve pour concevoir de meilleures organisations, il a besoin de s'évader, par moments, de la réalité et de reposer son psychisme afin de reprendre assez de forces intérieures pour pouvoir affronter à nouveau les difficultés quotidiennes. L'homme est ici un enfant.
Les constructions ou modèles mathématiques apparaissent alors parfois comme des jouets, inoffensifs, initiatiques et curatifs, avec lesquels les hommes peuvent faire travailler leur imagination, se donner de l'importance et une raison d'être, construire des mondes parfois baroques, dévoiler des fantasmes qui peuplent leur esprit et dont ils se délivrent par le jeu. Sans doute ces jouets n'ont-ils pas exactement les mêmes fonctions chez les adultes et chez les enfants. Mais les uns et les autres partagent à leur égard des réactions communes dans la mesure où ils pratiquent les mêmes opérations mentales et de la même manière.
Ces réactions, parce qu'elles sont d'ordre affectif, marquent les individus : découragement et parfois rejet de la part de ceux qui éprouvent quelque difficulté, quelles qu'en soient les raisons, à comprendre et interpréter le discours mathématique, enthousiasme au contraire de la part d'autres, tenaces, stimulés par la difficulté à vaincre, joyeux de l'avoir surmontée, excités par le merveilleux d'une démonstration où la perfection du raisonnement n'a pas voilé l'éclat de l'étincelle divinatoire, épanouis enfin par la beauté de la perspective des théorèmes réunis en une théorie harmonieuse.

Un autre aspect sémantique de la notion d'application se rencontre également dans la littérature : les termes "projection", "injection", "immersion", "surjection" et "submersion" le révèlent en partie. On s'amusera un instant, bien sûr, de l'aspect facétieux du mathématicien que pourrait révéler le choix d'une terminologie "aquatique". A vrai dire, ce choix est particulièrement heureux car l'image marine est l'une des meilleures qui soit pour évoquer un milieu topologique, souple et indifférencié, au sein duquel un objet peut être "plongé" - autre terme mathématique. Cette terminologie souffre pourtant d'une insuffisance : elle se rapporte en effet au caractère local de l'application ; elle en évoque plus difficilement l'effet global. Globalement, la projection, la submersion, aplatit, plaque l'objet de départ sur l'espace d'arrivée, de sorte que l'objet plaqué a au plus la même dimension que celle de l'espace d'arrivée (il ne s'agit pas ici d'une dimension au sens métrique du terme, mais du nombre de directions suffisantes pour établir un repère à partir duquel on peut situer tout point de l'espace). Au contraire, la dimension de l'objet source est conservée si l'on procède à une immersion de cet objet. Reste le cas où la dimension de l'objet source est égale à celle de l'espace d'arrivée : parmi les applications de ce type figurent notamment les changements de repères qui permettront d'examiner l'objet sous des angles et à partir de points de vue différents. Ces changements de repères sont très utilisés pour obtenir des présentations simples et éclairantes des objets,

permettant de les classer facilement, de mettre en évidence certaines propriétés. Les submersions plus générales permettent de procéder à des découpes en tranches : leur dimension est égale à la différence entre les dimensions des espaces source et image.
On voit ici apparaître les notions essentielles de singularité et d'extrémalité, profondément liées l'une à l'autre. Pour des raisons d'ordre physique et même métaphysique, ces notions sont d'une extrême fécondité et d'une grande importance. Elles apparaissent dans l'œuvre de Fermat, et joueront un rôle de plus en plus manifeste dans le développement des mathématiques.
Sur le plan psychologique, la singularité possède une double propriété : elle est attirante par son originalité, dérangeante par son étrangeté. Sur le plan physique, elle possède aussi une double propriété : elle est à la fois un obstacle et, par cela même, un élément autour duquel se structure et s'organise son voisinage. La singularité renferme ainsi toute l'ambiguïté du monde. La prise de conscience des propriétés de la singularité nous permet de mieux accepter le caractère ambigu de ce monde, caractère contre lequel il devient absurde de s'insurger, qu'il est finalement vain de vouloir combattre.
C'est la géométrie qui permet d'établir un lien entre singularité et extrémalité, via la notion de bord d'un objet. Le bord est en effet la partie de l'objet où la dimension s'affaiblit : si le couteau est globalement un objet de dimension 3, la surface du manche est de dimension 2, la partie coupante de la lame est une ligne de dimension 1, et même, si l'on a affaire à un couteau-scie, les extrémités des dents de la scie sont des points de dimension 0. Le bord du couteau est composé de toutes ces parties de dimensions inférieures à 3. Cette définition topologique du bord coïncide ici avec la définition métrique : si l'on parvient à définir une notion de distance entre points du couteau, ce bord se confond avec le lieu des points du couteau les plus écartés, situés sur des droites traversant le couteau. Ces points extrêmes qui définissent le bord sont également singuliers, particuliers, rares parmi l'infinité des points qui forment le domaine du couteau.
La reconnaissance de la prégnance, en mathématiques, des concepts d'extrémalité et de singularité, la prise de conscience de l'importance de leur rôle dans l'activité des mathématiciens sont récentes. Pourtant, il s'agit encore ici de notions naturelles, inscrites dans notre physiologie, son organisation, son mode de fonctionnement, dont l'emploi, primitivement inconscient, est sous l'empire de la nécessité intérieure. On voit ici la présence de la rationalité cachée, implicite, dans le processus qui conduit à l'emploi intuitif de ces concepts fondamentaux, puis à leur mise en lumière.
Ces niveaux profonds, où s'exerce de manière non simpliste la rationalité physique, parce qu'ils sont difficilement atteints par l'analyse consciente et complète, sont parfois hâtivement dénommés "irrationnels", dans le meilleur des cas du ressort de l'intuition. L'intuition, "forme de connaissance immédiate qui ne recourt pas au raisonnement", est malgré tout l'expression d'un processus rationnel qui, dans un premier temps, dépasse nos capacités de perception et d'analyse. Tels des panneaux qui jalonnent une piste, des étapes de ce processus peuvent émerger au niveau conscient, pouvant guider l'activité de l'esprit dans sa recherche de la rationalité sous-jacente, à l'origine même de ces indicateurs de rationalité.
Ce point de vue de Sirius, sous-tendu en premier lieu par un souci d'universalité, présente l'avantage de promouvoir la réponse à la question : dans quelle mesure une vérité locale a-t-elle une valeur plus générale ? Cette question en appelle d'autres : il faut en effet s'entendre au préalable sur l'étendue de cette généralité, et pour cela définir avec précision le cadre le plus large à l'intérieur duquel on pourra, de manière pertinente, travailler. Une fois cette mise en forme accomplie, qui permet d'élaguer les propriétés secondaires et de mettre en évidence les propriétés fondatrices et principales, reprend le travail proprement constructif du mathématicien. Toute l'histoire du progrès des mathématiques est profondément marquée par l'influence déterminante de la construction de ces théories chaque fois plus englobantes. C'est en définitive par leur intermédiaire que des propriétés d'apparence particulières révèlent leur signification générale, et finalement parviennent à être démontrées.

Ces propriétés générales s'imposent au mathématicien : la familiarité avec les cas particuliers lui permet de voir aussitôt la structure sous-jacente aux exemples qu'il manipule, ses articulations principales qu'il traduit sous forme d'axiomes. Il n'y a en l'occurrence rien d'irrationnel dans cette démarche ; tout au contraire, elle est l'expression d'une rationalité très claire et en quelque sorte naturelle. La nécessité et le bon sens imposent de montrer aux collègues l'organisation discrète de l'univers à l'intérieur duquel ils travaillent. La meilleure intelligence de cet univers, observé de plus loin mais avec un regard pénétrant, permet de mieux déceler et mettre au jour les chemins qui courent entre les propositions.
Proposons cette comparaison : cet univers des idées est semblable dans sa genèse à celui d'un univers géographique, à une planète dont nous essayons de préciser le relief. Par temps clair, ou parce que nous sommes proches et dotés de très bons instruments, pics, cols et vallées se font voir d'emblée sous un jour cohérent, une sorte de nécessité interne implique leur présence en tel lieu, leur étendue. Il arrive fréquemment que les conditions d'observation ne soient pas aussi favorables. Mais l'observateur averti, doté d'une expérience professionnelle, d'une grande patience et d'une grande concentration, repère des

indices, de plus en plus nombreux au fil du temps, de sorte que le paysage géographique dont il veut percer les secrets finit, petit à petit, par prendre forme. Des pans de cet univers se mettent en place, la position de tel indice étant induite, s'expliquant par celle de tel autre. Un seuil de reconstitution atteint, le voile se déchire et le paysage apparaît en toute clarté.

Par intuition, nous désignons un ensemble d'activités mentales qui comprend l'observation et la réminiscence de faits analogues et d'indices. Ceux-ci suggèrent l'existence de telle propriété, dont on finit par conjecturer la présence. Ce sont les premiers éléments d'un puzzle que des raisons morphologiques locales vont permettre de reconstituer. En l'occurrence, la culture mathématique du chercheur, ses compétences dans d'autres domaines, la maîtrise et la souplesse qu'il a acquises dans l'exercice du raisonnement, faisant appel à des raisons plus ou moins diverses et lointaines, à des comparaisons entre situations a priori étrangères les unes aux autres, lui permettent de deviner, de remarquer ou simplement de souligner la présence de telle ou telle propriété, et finalement d'exposer les raisons de son existence.

On peut alors soutenir que l'intuition est une manifestation très fine et très élaborée de la rationnalité profonde de l'être. Les qualités intrinsèques, la formation, et en particulier l'exercice sont à la source du déploiement de cette intuition.

L'image géographique que nous avons prise n'est pas innocente. Elle témoigne du caractère spatial de notre activité mentale. Elle prend en compte des considérations de nature géométrique dans le déroulement même de cette activité : le raisonnement n'est autre, souvent, que la description de l'enchaînement de morphologies s'emboîtant à la manière des pièces d'un puzzle. Cette vision décrit le raisonnement achevé. Le raisonnement actif, opératoire, créateur, est un processus constructif qui déplace les pièces, les retourne parfois de manière inattendue, les déforme, les relie, vérifie et justifie la possibilité de leur accouplement. Ce qui amène à distinguer deux types de démonstration : celle qui ne fait que s'appuyer sur des résultats connus, de la déduction desquels on justifie l'assertion proposée ; celle qui non seulement utilise le procédé précédent, mais s'appuie aussi sur un mode original de construction, auquel la démonstration doit son caractère excitant, fascinant, sa beauté propre. Le développement de la topologie est caractéristique de ce point de vue, comme le montrent par exemple les travaux de Thurston et Poenaru qui fourmillent de constructions originales. C'est à ce niveau sans doute que l'on se rapproche le plus de l'irrationalité. L'irruption de cette nouvelle manière de faire détruit une routine mentale, une tendance à l'ankylose de l'esprit. C'est à ce moment-là que l'on savoure le fin plaisir apporté par l'astuce, sorte d'aiguillon habile qui excite et fait rire l'esprit.

La construction permet d'insuffler la vie aux mathématiques ; quant au raisonnement, il est le ciment qui donne à l'édifice intellectuel sa solidité.

Nous avons maintenant en main assez d'éléments pour pouvoir aborder ici de manière brève, et pour conclure, ce thème pédagogique : comment développer, chez l'enfant, la rationalité dans ses formes directes ou subtiles ? A l'évidence, l'étude des mathématiques favorisera la formation des procédures de raisonnement. Cette étude suppose que l'on ne se contente pas, comme on le fait malheureusement depuis quelques années, d'enseigner des recettes aux élèves. Une telle cuisine scolaire est insipide, et sans grand intérêt pour la formation de l'esprit. Il est indispensable que ces élèves rencontrent des démonstrations vraies, parviennent à les maîtriser, d'abord pour s'exercer au raisonnement brut, mais également pour développer l'intuition. Comme Poincaré l'a souligné, l'exercice de la géométrie est plus apte à favoriser l'expression de l'intuition : c'est en effet en géométrie élémentaire que l'on rencontre le plus aisément ces constructions originales et pourtant faciles qui entraînent l'esprit à l'élaboration de petits puzzles mentaux attrayants. Une société ne saurait, sans risque grave pour sa pérennité, renoncer à ces jouets éducatifs millénaires, et dont les qualités ont été éprouvées au fil des siècles.

p. 79

Cette procédure qui consiste, étant donné une difficulté, à prendre de la hauteur, à adopter en quelque sorte un point de vue de Sirius pour mieux dominer la situation, doit-elle être considérée comme une démarche rationnelle ou non ? Donnons d'abord quelques exemples élémentaires où, cachée sous des habits bien différents, cette procédure est employée. Nous la rencontrons en premier lieu dans l'algèbre : celle de l'arithmétique, où l'on a commencé par remplacer les nombres par des lettres et raisonner sur des expressions littérales ; celle des espaces fonctionnels où les fonctions polynomiales, à travers la géométrie algébrique et l'arithmétique, ont joué un rôle central. Nous rencontrons à nouveau cette procédure en théorie des nombres, au moment où la création des nombres complexes, plus généralement lors de la création des nombres par la méthode des extensions. Les prémisses de cette procédure apparaissent également dans la conception, entrevue par N. Oresme ou Kant, d'espaces multidimensionnels.

Il est clair que, dans ces situations, l'observation répétée de cas possédant la même formulation est une invite naturelle à établir des formulations générales, des énoncés qui transcendent les cas particuliers. La démarche de l'esprit, autant fondée sur l'analogie que sur la synthèse, est une démarche de bon sens.

2 Extraits de *La construction des nombres* de Claude-Paul Bruter

p. 25

Provenant de Sur la nature des mathématiques, Paris, Gauthier-Villars, 1973

Etant donné un objet O' défini sur un ensemble E', et vérifiant les propriétés $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$, trouver un objet défini sur un ensemble E contenant E', vérifiant non seulement les propriétés précédentes $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ mais de plus des propriétés $P'_{n+1}, P'_{n+2}, \ldots, P'_{n+m}$ et tel que la restriction de O à E' soit O'.

p. 34

Or le mode de construction de cet ensemble conduit à définir une notion d'ordre, et l'on montre facilement que : $\mathbb{N}$ est un ensemble muni d'un ordre total, d'une loi de composition additive, associative et commutative, possédant un élément neutre, et grâce à laquelle des opérations telles que $32 + 24 = 56$ ont un sens. On dit que $\mathbb{N}$ a la structure de demi-groupe commutatif, et non pas de groupe puisqu'en dehors de l'élément neutre, aucun élément ne possède de symétrique.

p. 216

Et quelles leçons de modestie et d'humilité, mais aussi d'optimisme, ne peut-on tirer de cette lenteur à accepter et à comprendre quelques-unes des plus simples de nos constructions ! Que les physiciens, perplexes, voire inquiets, tourmentés, qui s'interrogent sur l'intelligibilité du monde subatomique, veuillent bien se pénétrer de ces leçons, se rassurer, prendre patience : une longue adaptation de la pensée à nos constructions mentales, aux observations nouvelles, est parfois nécessaire jusqu'au moment où, la familiarité aidant, l'assimilation parvient à son terme, l'adéquation entre la construction et le fait sensible atteint un degré tel que la construction, aussi rudimentaire et imparfaite soit-elle, apparaît comme naturelle, comme imposée par la nécessité ; alors la construction fait sens, l'obscurité s'estompe, le paysage devient lumineux, et l'intelligibilité s'affirme.

"Le monde est un animal" disait Platon. Comme il est fascinant d'observer le développement de l'univers symbolique et grouillant construit par les physiciens et les mathématiciens ! A partir de quelques germes discrets de monades, à l'infini il s'auto-reproduit, envahissant l'espace, le meublant sans arrêt dans des directions de plus en plus nombreuses, de plus en plus denses, dessinant des figures de plus en plus enchevêtrées et tordues. Une longue préparation est nécessaire avant que ne soient libérées ces croissances fulgurantes. Pas à pas travaille d'abord la pensée. Puisque, lorsque les temps sont mûrs, apparaît la notion, le concept, la construction, et, sous le nom de théorème, le fait et son explication, qu'on appelle aussi démonstration.

p. 217

Avec Gauss sur les entiers, puis avec Cauchy sur les polynômes, par l'intermédiaire de relations d'équivalence, définies de manière algébrique de manière à être compatibles avec la structure des ensembles originels de nombres, on a pris l'habitude de couper ceux-ci en tranches égales ; chaque tranche est projetée sur un seul "point", qu'on peut désigner par un seul symbole, et qu'on peut appeler aussi "nombre nouveau". Un ensemble O_1 de tels nouveaux nombres possède une structure héritée de celle de l'ensemble originel O_0 considéré. Mais il faut souligner que chaque nouveau nombre, chaque tranche, hérite également en quelque sorte de cette structure interne. Evidemment, les structures filles ne sont pas forcément identiques en tout point aux structures mères, ni même entre elles, le fisc, en somme, étant passé par là.

En introduisant, sur O_1 maintenant, une relation d'équivalence convenable, on fabrique un nouvel ensemble de nombres O_2. Pour peu que O_0 soit un ensemble infini, on peut prolonger parfois jusqu'à l'infini ce processus de descente, de création de nombres structurés. Le procédé connaît un début d'emploi en physique où chaque nombre nouveau caractérise un état particulaire plus fin, structuré par un groupe de symétries, souvent un groupe de rotations.

Le progrès dans cette voie réside dans l'établissement de relations d'équivalence engendrant des tranches inégales. On peut commencer par supposer, par exemple, comme dans les pavages irréguliers de Penrose, la présence de deux types de tranches, et même, pour aller au plus simple, supposer que ces tranches forment un découpage périodique de l'ensemble de nombres considéré. On peut alors imaginer que la fabrication des tranches, leur localisation, dépendent de conditions extérieures qui fixent le découpage, d'une section particulière donc du fibré des contraintes. L'histoire de la construction des nombres n'a certainement pas atteint son terme.

p. 219
Mais on peut s'interroger : pourquoi s'arrêter en si bon chemin, et ne pas appeler tout simplement nombre tout élément d'un ensemble muni d'une ou de plusieurs lois d'opérations, présentant entre elles des liens de compatibilité nécessaire, dont la nature et le mode opératoire sont, bien sûr, parfaitement définis, ou encore, plus généralement, pourquoi ne pas considérer que tout ensemble sur lequel opère un algorithme est un ensemble de nombres ?

p. 222
Le dernier point sera consacré, à travers la question de la validité du modèle numérique, à l'examen du bien-fondé du platonisme. Celui-ci postule l'existence d'un schéma préétabli selon lequel le monde est organisé, et qui s'exprime en termes mathématiques.
Il est clair que le platonisme vient en droite ligne du pythagorisme. Cette forme d'idéologie a joué et continue de jouer un rôle moteur et positif très important dans le développement des sciences, des mathématiques et de la physique en particulier. Aussi ne serait-il guère politique d'essayer de montrer que les hommes de science qui se réclament du platonisme sont encore imprégnés de ce mode de pensée qui fut celui de l'enfance de l'humanité, émerveillée par un monde peuplé de personnages héroïques, représentatifs, symboliques, mais aussi refuges auprès desquels s'ébauchent les premiers apprentissages de la vie sociale.

La célèbre formule "tout est nombre" fait partie du corpus des conceptions pythagoriciennes. Les capacités croissantes des ordinateurs, la richesse potentielle des représentations numériques que nous avons rencontrées, confortent sur le plan pratique les adeptes néopythagoriciens. La réalité est sans doute plus nuancée. Un nombre est un absolu instantané, statique. Le monde est beaucoup plus flou, il est constamment changeant. Aussi les nombres, qui sont des représentations, ne peuvent-ils fournir, en général, sur le plan pratique cela s'entend, que des approximations. Le "tout est nombre", qui a certes sa vérité sur les plans théorique et abstrait, devrait pour le moins être nuancé ; il serait plus exact d'énoncer, d'ailleurs de manière peut-être trop optimiste, "presque tout peut être approché par le nombre".

A quoi j'ajoute pour ma part, "je ne sais plus du tout ce qu'est un nombre, mais je sais m'en servir...".

3 Dans *Comment l'esprit vient aux savants* de Claude Brezinski

p. 9
Albert Einstein : Je cherche quand je veux, je trouve quand je peux.

Jérôme K. Jérôme : Après avoir cherché sans trouver, il arrive qu'on trouve sans chercher.

p. 20
Jack Lang : "Il faut être provoqué par les pensées des autres". Cette phrase s'applique à toute activité créatrice et, bien sûr, à la recherche scientifique.

p. 33
Mark Kac (Enigmas of chance, University of California Press, Berkeley, 1987, p. 39).
Il y a grossièrement deux sortes de créativité mathématique. La première, semblable à la conquête d'un pic montagneux, consiste à résoudre un problème demeuré ouvert et qui a attiré l'attention de nombreux mathématiciens. L'autre est l'exploration d'un nouveau territoire.

p. 53
Claude Bernard (Introduction à l'étude de la médecine expérimentale, J.B.Baillière et fils, Paris, 1865, p. 66-67).