Traduction d'un article de Shai M. J. Haran (Denise Vella-Chemla, décembre 2020)

Théorie de l'indice, théorie du potentiel, et hypothèse de Riemann

Shai Haran
Département de mathématiques théoriques,
Institut de science Weizmann,
Rehovot 76100,
Israël

Dans ce survol, nous souhaiterions brosser à touches de pinceaux expressionistes, notre pressentiment concernant le problème de hypothèse de Riemann. Langlands l'a très bien dit [38] :

> "*... J'ai essayé de décrire les choses comme elles pourraient être et, à ce qu'il me semble à présent, comme elles sont vraisemblablement. Elles pourraient être autrement. Toutefois, il est utile d'avoir une conception de l'ensemble à laquelle on puisse se référer pendant le travail quotidien d'arrache-pied avec les difficultés techniques, sous la condition que l'on ne devienne pas trop attaché à elles. J'ai simplement fusionné mes propres observations et réflexions avec les idées des autres et avec les principes habituellement acceptés.*"

Commençons par rappeler les analogies bien connues entre les corps de nombres et les corps de fonctions. Pour les corps de fonctions, l'hypothèse de Riemann a été résolue par Weil, sur un corps fini [49], et par Selberg, sur les nombres complexes [43]. La plupart des tentatives jusqu'à ce jour de prouver l'hypothèse de Riemann pour les corps de nombres suivent la vieille suggestion d'Hilbert : trouver un opérateur A, agissant sur un espace de Hilbert tel que $\langle Ax, y\rangle + \langle x, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$, et tel que $i(\frac{1}{2} - A)$ est auto-adjoint, et identifier ses valeurs propres avec les zéros de la fonction zeta. Cette approche a reçu un examen minutieux [22 ; 25], particulièrement après le succès de la théorie de Selberg où un tel opérateur, le Laplacien, existe effectivement.

Un tel opérateur existe dans le contexte de la théorie de Weil, notamment l'opérateur de Frobenius agissant sur la cohomologie ℓ-adique (ou de façon équivalente, les points de torsion de la ℓ-ième puissance du Jacobien), mais une telle réalisation existe seulement sur $\mathbb{Q}_\ell$, $\ell \neq p$, ∞, un fait qui fait allusion aux difficultés de cette approche pour les corps de nombres.

Revoyons la preuve centrale de l'hypothèse de Riemann pour une courbe C sur un corps fini F_p, comme elle a été élucidée dans [23 ; 40]. Étant donnée une fonction $f \;:\; p^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}$ de support fini, nous lui associons sa transformée de Mellin $\hat{f}(s) = \sum_n f(p^n) \,.\, p^{ns}$, $s \in \mathbb{C}$, et un diviseur $\hat{f}(A) = \sum_n f(p^n) \,.\, A^n$ sur la surface $C \times C$, où A^n sont les correspondances de Frobenius données par $A^n = \{(x, x^{p^n})\}$, $A^{-n} = p^{-n} \,.\, (A^n)^*$, $n \geq 0$; $*$ dénotant l'involution $(x, y)^* = (y, x)$. Sur la surface $C \times C$, nous avons la théorie de l'intersection qui est donnée explicitement pour nos diviseurs par :

$$(i) \qquad \langle \hat{f}(A), \hat{g}(A)\rangle = \langle (f * g^*)^\wedge(A), \mathrm{Diag}\rangle$$

référence de l'article : *L-functions and arithmetic*, Durham 1989, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 153, 257-270, Cambridge University Press, 1991.

où $g^*(p^n) = g(p^{-n}) \,.\, p^{-n}$, (ainsi $(g^*)^\wedge(s) = \hat{g}(1-s)$) et $f * g(p^n) = \sum\limits_m f(p^m) \,.\, g(p^{n-m})$ (ainsi $(f * g^*)^\wedge(s) = \hat{f}(s) \,.\, \hat{g}(s)$) ; i.e., la connaissance des nombres d'intersections se réduit à celles avec la diagonale $\mathrm{Diag} = A^0$.

(ii)
$$\langle \hat{f}(A), \mathrm{Diag}\rangle = \hat{f}(0) + \hat{f}(1) - \sum_{\zeta(s)=0} \hat{f}(s)$$

où la somme est étendue sur les zéros de la fonction zeta $\zeta(s)$ de C.

Dénotons par $h^0(f) = \dim_{F_p} H^0(C \times C, \mathcal{O}(\hat{f}(A)))$ la dimension de l'espace des sections globales du fibré en droites $\mathcal{O}(\hat{f}(A))$, on a :

l'inégalité de Riemann-Roch

$$h^0(f) + h^0(\omega - f) \geq \frac{1}{2}\langle \hat{f}(A), \hat{f}(A) - \omega\rangle$$

où ω est un diviseur canonique sur $C \times C$ auquel on peut penser comme à la distribution sur $p^{\mathbb{Z}}$ donnée par $\langle \omega, f\rangle = (2g_c - 2)(\hat{f}(0) + \hat{f}(1))$.

la monotonicité $\quad h^0(f) > 0 = h^0(f+g) \geq h^0(g)$.

l'amplitude $\quad \langle \omega, f\rangle = 0 \implies h^0(m.f)$ est borné indépendamment de $m \in \mathbb{Z}$.

Étant données les trois propriétés ci-dessus, il est possible de dériver
l'inégalité fondamentale $\quad \hat{f}(0).\hat{f}(1) \geq \frac{1}{2}\langle \hat{f}(A), \hat{f}(A)\rangle$ ou de façon équivalente en utilisant (i), (ii) :

$$\sum_{\zeta(s)=0} \hat{f}(s) \,.\, \hat{f}(1-s) \geq 0$$

dont on montre facilement que cela équivaut à l'hypothèse de Riemann :

$$\zeta(s) = 0 \implies \mathrm{Re}\ s = \frac{1}{2}$$

En retournant aux corps de nombres, et pour des raisons de simplicité, considérons seulement le cas des nombres rationnels, $\mathbb{Q}$, dénotons par $\zeta(s) = \prod\limits_{p \leq \infty} \zeta_p(s)$, $\mathrm{Re}\ s > 1$, la fonction zeta de Riemann classique (complétée à l'∞) ; $\zeta_p(s) = (1 - p^{-s})^{-1}$ pour $p < \infty$, $\zeta_\infty(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$.

La relation exacte entre les zéros de $\zeta(s)$ et la distribution des nombres premiers était connue de Riemann, mais c'est Weil qui l'a "cristallisée" dans ses sommes explicites [50 ; 51].

Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ lisse et à support compact, nous lui associons sa transformée de Mellin $\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(x) x^s \frac{dx}{x}$, et nous avons par l'équation fonctionnelle $\zeta(s) = \zeta(1-s)$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) + \hat{f}(1) - \sum_{\zeta(s)=0} \hat{f}(s) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint \hat{f}(s) d\ \log\ \zeta(s) \\ &= \sum_{p \leq \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \hat{f}(s) d\ \log \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{p \leq \infty} W_p(f) \overset{\text{def}}{=} W(f). \end{aligned}$$

En utilisant l'inversion de Mellin, il est facile de voir que [26] :

$$W_p(f) = \log\ p \, . \sum_{n \neq 0} f(p^n) \, . \min(1, p^n) \qquad \text{pour } p < \infty,$$

$$W_\infty(f) = (\gamma + \log \pi) f(1) + \int_0^1 \frac{f(x) - x f(1)}{1 - x^2} dx + \int_1^\infty \frac{x^2 f(x) - f(1)}{x^2 - 1} \frac{dx}{x}.$$

Et à nouveau, comme noté par Weil [50], en posant $f^*(x) = f(x^{-1}).x^{-1}$,

l'inégalité fondamentale $\quad \hat{f}(0).\hat{f}(1) \geq \frac{1}{2}\, W(f * f^*)$ ou de façon équivalente :

$$\sum_{\zeta(s)=0} \hat{f}(s) \, . \, \hat{f}(1-s) \geq 0$$

peut facilement être démontrée comme étant équivalente à l'hypothèse de Riemann.

Il ne sera pas exagéré de dire que le plus grand mystère de l'arithmétique est le simple fait que $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$, ou, de façon équivalente que du point de vue de la géométrie algébrique, spec $\mathbb{Z} \times$ spec $\mathbb{Z} \simeq$ spec $\mathbb{Z}$, i.e. la surface se réduit à la diagonale ! Pourtant, si l'on prend deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ lisses et à support compact, que l'on considère comme représentant les diviseurs de Frobenius sur la surface non-existante, nous pouvons définir leur nombre d'intersections : $\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} W(f * g^*)$, et à nouveau, en associant à une telle fonction f, un nombre réel $h^0(f) \geq 0$ vérifiant les trois propriétés ci-dessus amènera à la solution de l'hypothèse de Riemann. Donc notre point principal est : un Riemann-Roch à deux dimensions pour spec $\mathbb{Z}$ pourrait très bien exister !

Revoyons brièvement la preuve du théorème classique de Riemann-Roch, i.e, sur $\mathbb{C}$, d'une manière légèrement biaisée [2 ; 7 ; 24 ; 44]. Étant donné une variété compacte riemannienne X, et un opérateur de Dirac $D : E_+ \longrightarrow E_-$, agissant sur la section de deux fibrés vectoriels $E_\pm$ sur X, dénotons par $\Delta_+ = D^*D$, $\Delta_- = DD^*$ les Laplaciens associés, et considérons $R^\alpha_\pm = \Delta_\pm^{-\alpha}$ comme des opérateurs sur $L^2(E_\pm)$. Un fait de base est la super-symétrie : $\mathrm{tr}(R^\alpha_+) - \mathrm{tr}(R^\alpha_-)$ est indépendant de $\alpha > \dim X$; en fait, $R^\alpha_\pm$ a un spectre discret et les valeurs propres non nulles de R^α_+ et R^α_- sont de mêmes multiplicités incluantes. En faisant tendre $\alpha \longrightarrow \infty$, $R^\alpha_\pm$ converge vers les projections sur les noyaux de $\Delta_\pm$, par conséquent

$$\mathrm{tr}(R^\alpha_+) - \mathrm{tr}(R^\alpha_-) \underset{\alpha \to \infty}{\longrightarrow} \dim \ker D - \dim \ker D^* = \text{index } D.$$

D'un autre côté, pour Re $\alpha > \dim X$, les $R^\alpha_\pm$ sont donnés par les noyaux continus, $R^\alpha_\pm(x, y)$, qui ont des prolongements méromorphes à tous les α, par conséquent en faisant tendre $\alpha \longrightarrow 0$, nous obtenons :

$$\mathrm{tr}(R^\alpha_+) - \mathrm{tr}(R^\alpha_-) \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} \int_X Pf_{\alpha=0}(R^\alpha_+(x,x) - R^\alpha_-(x,x))dx.$$

En mettant ces choses ensemble, et en évaluant explicitement le dernier intégrande, on obtient le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer. Pour la catégorie particulière des variétés kahleriennes, et l'opérateur $\overline{\partial}$, on obtient le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch. En remplaçant les opérateurs bornés dans un espace de Hilbert par un facteur II_∞, Atiyah [1] a démontré un théorème de l'indice à valeur réelle pour X non-compacte, duquel une foule de théorèmes ont surgi [4 ; 13 ; 33-36].

Le théorème de l'indice relie l'information globale (la limite $\alpha \longrightarrow \infty$) à l'information locale (la limite $\alpha \longrightarrow 0$) et on est habituellement confronté au fait que la détermination précise de ce dernier, i.e., de $Pf_{\alpha=0}(R^\alpha_+(x,x) - R^\alpha_-(x,x))$, est l'étape la plus profonde qui inclut le passage vers un nouvel espace géométrique, X', l'espace cotangent à X. Un soupçon de ce que X' pourrait être dans le réglage arithmétique est gagné par une inspection de la preuve de la K-moyennabilité de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ [31 ; 32] que nous décrirons prochainement (de façon biaisée). Dénotons par $X_p = SL_2(\mathbb{Q}_p)/SL_2(\mathbb{Z}_p)$ le plan hyperbolique p-adique, c'est un arbre $(p+1)$-régulier, et dénotons par $d(x,y)$ la mesure naturelle $SL_2(\mathbb{Q}_p)$-invariante. En agissant sur les fonctions sur X_p, nous avons l'opérateur de Hecke, $T_p f(y) = \sum_{d(x,y)=1} f(x)$, et le générateur infinitésimal de parcours au hasard sur X_p, le Laplacien $\Delta_p = \frac{\zeta_p(2)}{\zeta_p(1)}\, T_p - 1$, dont l'opérateur potentiel associé est donné par le noyau $\Delta_p^{-1} = \zeta_p(1)\,.\,p^{-d(x,y)}$, [10 ; 11]. La fonction $d(x,y)$ est définie négative, par conséquent pour chaque $\alpha > 0$, nous avons un opérateur auto-adjoint positif sur $L^2(X_p)$ donné par le noyau $R_p^\alpha = p^{-\alpha d(x,y)}$ et l'espace de Hilbert associé $H^\alpha = \{f \;:\; X_p \longrightarrow \mathbb{C} \big| (f, R_p^\alpha f)_{L^2(X_p)} < \infty\}$.

En posant $\alpha \longrightarrow \infty$, nous obtenons $H^\infty = L^2(X_p)$.

D'un autre côté, en posant $\alpha \longrightarrow 0$, nous obtenons $H^0 = \mathbb{C} \oplus \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} H^\alpha$, où $\Big|_{\alpha=0} H^\alpha$ est la complétion de l'espace de Hilbert de $\mathcal{S}_0(X_p) = \{f \;:\; X_p \longrightarrow \mathbb{C} \;\Big|\; \text{supp } f \text{ finite}, \int_{X_p} f(x)dx = 0\}$ relativement à $(f,g) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} (f, R_p^\alpha g) = -\log p\,.\, \iint_{X_p\times X_p} f(x)\overline{g(y)} d(x,y)$. Ce dernier espace est l'analogue de l'espace cotangent au plan hyperbolique p-adique. Pour rendre cette analogie plus suggestive, dénotons par $X_p' = SL_2(\mathbb{Q}_p)/\Gamma_0(p)$ les arcs orientés, $\Omega_c = \{\omega \;:\; X_p' \longrightarrow \mathbb{C} \;\Big|\; \text{supp } \omega \text{ finite}, \; \omega(x,y) = -\omega(y,x)\}$ les formes différentielles à support compact, et $L^2(\Omega)$ la fermeture de Ω_c dans $L^2(X_p')$. Alors, la différentiation extérieure $df(x,y) = f(x) - f(y)$ induit un isomorphisme $d : \mathcal{S}_0(X_p) \xrightarrow{\sim} \Omega_c$ et une isométrie $2(\log p)^{-\frac{1}{2}} d \;:\; \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} H^\alpha \xrightarrow{\sim} L^2(\Omega)$.

Nous arrivons maintenant aux potentiels en rapport avec l'arithmétique. Ce sont les potentiels de M. Riesz donnés par

$$R_p^\alpha = \frac{\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(\alpha)} |x|^{\alpha-1} dx, \qquad \text{Re } \alpha > 0.$$

Pour une fonction φ lisse (i.e. localement constante) sur $\mathbb{Q}_p$, telle que $\displaystyle\int_{|x|>1} |\varphi(x)|\,.\,|x|^{\text{Re }\alpha-1} dx < \infty$, nous pouvons former la convolution $R_p^\alpha * \varphi$:

$$R_p^\alpha * \varphi(y) = \frac{\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(\alpha)} \int \varphi(x)\,.\,|y-x|^{\alpha-1} dx, \qquad \text{Re } \alpha > 0.$$

Celle-ci peut être prolongée de façon méromorphe à tous les α, en ramassant une fonction δ lorsque nous croisons la droite Re $\alpha = 0$, i.e.,

$$R_p^\alpha * \varphi(y) = \frac{\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(\alpha)} \int (\varphi(x) - \varphi(y)).|y-x|^{\alpha-1} dx, \qquad \text{Re } \alpha < 0$$

(pour $p = \infty$, nous ramassons la distribution $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n$ lorsque nous traversons Re $\alpha = -2n$).

Dénotons par ψ_p le caractère additif de base de $\mathbb{Q}_p$, et $\psi_p^{(x)}(y) = \psi_p(x.y)$, un calcul évident donne $R_p^{-\alpha} * \psi_p^{(x)} = |x|^\alpha . \psi_p^{(x)}$, i.e, $\psi_p^{(x)}$ est un vecteur propre (généralisé) pour $R_p^{-\alpha}$ avec valeur propre associée $|x|^\alpha$, reflétant le fait que, comme distribution sur $\mathbb{Q}_p$, $R_p^{-\alpha}$ est la transformation de Fourier de $|x|^\alpha$. De manière similaire, nous avons la formule de reproduction de M. Riesz $R_p^\alpha * R_p^\beta = R_p^{\alpha+\beta}$, Re$(\alpha+\beta) < 1$. Écrite explicitement, $|x|^\alpha = R_p^{-\alpha} * \psi_p^{(x)}(0)$ devient

$$|x|^\alpha = \int (1 - \psi_p(xy)) \left[-\frac{\zeta_p(1+\alpha)}{\zeta_p(-\alpha)} \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}} \right].$$

Notons que la mesure entre crochets est positive pour $\alpha \in (0, \alpha_p)$, où $\alpha_p = [\overline{\mathbb{Q}_p} : \mathbb{Q}_p]$ i.e., $\alpha_p = \infty$ pour $p < \infty$ et $\alpha_\infty = 2$ (mais pour des corps de nombres plus généraux ayant une place complexe v, $\alpha_v = 1$. Du théorème de Levi-Khinchin [6], nous déduisons que $|x|^\alpha$ est une fonction définie négative sur $\mathbb{Q}_p$, pour $\alpha \in (0, \alpha_p)$, par conséquent nous avons un semi-groupe de conduction de la chaleur [6 ; 27]

$$\mu_{p,t}^\alpha(y) = \int_{\mathbb{Q}_p} e^{-t|x|^\alpha} \psi_p(xy)dx = \sum_{n\geq 1} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{\zeta_p(1+n\alpha)}{\zeta_p(-n\alpha)} |y|^{-(1+n\alpha)}dy$$

$\mu_{p,t}^\alpha$ a un générateur infinitésimal $R_p^{-\alpha}$, et pour $\alpha \in (0,1)$, il est transitoire avec le noyau de potentiel R_p^α. La théorie du potentiel de R_p^α peut être développée de manière purement analytique [27] sans aucun recours aux probabilités, et selon bien des aspects, elle est en fait plus facile que la théorie classique ; e.g., l'inégalité de Harnack est une trivialité dans la situation non-archimédienne. Ici, d'un autre côté, dans le but d'ajouter à l'intuition, nous rappelons brièvement la formulation en termes d'espace de chemins de la solution au problème de Dirichlet [29 ; 42]. Dénotons par Λ_x l'espace des chemins $X : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{Q}_p$, X continus par la droite, ayant une limite à gauche en tout point et $X(0) = x$. Pensons à un tel chemin comme décrivant le saut autour de $\mathbb{Q}_p$. Par le théorème de Kolmogorof, il existe une mesure de probabilité unique P_x, sur Δ_x, telle que $P_x[X(t) \in dy] = \mu_{p,t}^\alpha(dy - x)$.. Nous avons maintenant une interprétation probabiliste :

$$\mu_{p,t}^\alpha * \varphi(x) = E_x[\varphi(X(t))], \qquad R_p^\alpha * \varphi(x) = E_x\left[\int_0^\infty \varphi(X(t))dt\right],$$

où E_x dénote ce qui est attendu relativement à P_x. Pour un sous-ensemble compact $K \subseteq \mathbb{Q}_p$, et une fonction continue $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{C}$, il existe une solution unique h_φ, au problème de Dirichlet avec condition aux bornes φ : $h_\varphi(x) = \varphi(x)$ pour $x \in K$, et h_φ est α-harmonique en dehors de K, i.e., pour $x \notin K$, h_φ est lisse près de x et $R_p^{-\alpha} * h_\varphi(x) = 0$, ou de façon équivalente, pour $p < \infty$:

$$h_\varphi(x) = (1 - p^{-\alpha}) \int_{|y|\geq 1} h_\varphi(x + p^N y)|y|^{-\alpha} d^*y, \qquad \text{pour tout } N \gg 0.$$

Probabilistiquement, h_φ est donnée par $h_\varphi(x) = E_x[\varphi(X(t_K)) \ ; \ t_K < \infty]$, où

$$t_K(X) = \inf\{t > 0, X(t) \in K\}$$

est le temps de frappe de K ; e.g., $R_p^{-\alpha} * \mathbb{1} = 0$, et $\mathbb{1}$ (= la fonction constante 1) est la seule fonction α-harmonique tout au long de $\mathbb{Q}_p$, bornée à l'infini.

Analytiquement, l'information complète est codée par la forme de Dirichlet associée [17] qui est donnée pour $\alpha \in (0, \alpha_p)$ par

$$\mathcal{E}_p^\alpha(\varphi_1, \varphi_2) = -\frac{1}{2} \frac{\zeta_p(1+\alpha)}{\zeta_p(-\alpha)} \iint (\varphi_1(x) - \varphi_1(y)) \, . \, (\varphi_2(x) - \varphi_2(y)) \, . \, |x-y|^{-\alpha-1} dxdy$$

ou de façon duelle, par la distribution de l'espace de Hilbert d'énergie finie [27], la complétion de $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p) = \{\text{fonctions lisses, rapidement décroissantes sur } \mathbb{Q}_p\}$ par rapport à

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{H^\alpha} = (\varphi_1, R_p * \varphi_2)_{L^2} = \frac{\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(\alpha)} \iint \varphi_1(x)\varphi_2(y)|x-y|^{\alpha-1} dxdy.$$

Notre croyance de base qu'un analogue du théorème de l'indice existe pour les corps de nombres provient d'une formule simple reliant les nombres d'intersection $W(f) = \hat{f}(0) + \hat{f}(1) - \sum_{\zeta(s)=0} \hat{f}(s)$

avec les potentiels de Riesz. Notamment, supposons que nous commencions avec une fonction de Schwartz f sur les idèles $\mathbb{A}^*$, telle que f est une projection de $\hat{f}$ sur $\mathbb{Q}^*\backslash\mathbb{A}^*/\prod_p \mathbb{Z}_p^* \cong \mathbb{R}^+$.

On a [26] :

$$W(f) = \sum_{q\in\mathbb{Q}^*} \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} R^\alpha_{\mathbb{A}^*}\widetilde{f}(q)$$

où $R^\alpha_{\mathbb{A}^*} = \otimes_p \frac{1}{c_p(\alpha)} R^\alpha_p$ avec les constantes de renormalisation $c_p(\alpha) = R^\alpha_p \phi^*_p(1) = 1 + \frac{(p^\alpha-1)(1-p^{-\alpha})}{p-p^\alpha}$ pour $p<\infty,\ c_\infty(\alpha)=1$.

Notons que $c_p(0) = 1,\ \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\alpha=0} c_p(\alpha) = 0$, de telle façon que les $c_p(\alpha)$ n'affectent pas vraiment la formule ci-dessus et sont rajoutés dedans pour des besoins de convergence. Nous pouvons aussi utiliser $\widetilde{c}_p(\alpha) = \frac{\zeta_p(1+\alpha)\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(1)^2}$, en notant que $\prod_p \widetilde{c}_p(\alpha)c_p(\alpha)$ converge pour Re $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Nous allons maintenant analyser le cas limite $\alpha \longrightarrow \alpha_p$, où on obtient la loi normale, et la perspective d'une super-symétrie en arithmétique. Pour $p=\infty$, comme $\alpha\to\alpha_p=2,\ \mu^\alpha_{p,t}$ converge vaguement vers la loi normale classique. D'un autre côté, pour $p<\infty$, comme $\alpha\longrightarrow\alpha_p=\infty,\ \mu^\alpha_{p,t}$ converge vaguement vers une mesure de probabilité $\mathbb{Z}_p$-invariante $\mu^\infty_{p,t}$, i.e., la loi normale p-adique dégénère en un semi-groupe de mesures de probabilités sur $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.

On pose

$$\phi_p = \mu^{\alpha_p}_{p,1/\alpha_p} = \begin{cases} e^{-\pi x^2} & p=\infty \\ \text{fonction caractéristique de } \mathbb{Z}_p, & p<\infty\ ; \end{cases}$$

$\phi_{\mathbb{A}} = \otimes_p\phi_p$ la loi normale sur les adèles $\mathbb{A}$; et pour un diviseur sur spec $\mathbb{Z}'$

$$a\in\mathbb{A}^*/\prod_p\mathbb{Z}^*_p,\ \phi^{(a)}_{\mathbb{A}}(x) = |a|^{-1}\phi_{\mathbb{A}}(a^{-1}x)$$

la loi normale avec une mesure sous-jacente perturbée par a. En notant pr $:\mathbb{A}\longrightarrow\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ la projection naturelle, $\mathrm{pr}_*\phi^{(a)}_{\mathbb{A}}$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$, agissant sur $L^2(\mathbb{A}/\mathbb{Q})$ via la convolution, et nous avons un Riemann-Roch (à une dimension) de Tate pour spec $\mathbb{Z}$, [48] :

$$h^0(a) - h^0(a^{-1}) = \deg a,$$

où $h^0(a) = \log\mathrm{tr}(\mathrm{pr}_*,\phi^{(a)}_{\mathbb{A}})$, $\deg a = -\log|a|$, qui est précisément l'équation fonctionnelle de la fonction theta classique (log) déguisée dans un langage fantaisie. La fonction zeta de Riemann n'est rien d'autre que la transformée de Mellin de $\mathrm{tr}(\mathrm{pr}_*\phi^{(a)}_{\mathbb{A}})-1$, et le Riemann-Roch ci-dessus est équivalent à l'équation fonctionnelle $\zeta(s)=\zeta(1-s)$. Notons que l'élimination des valeurs propres n'est pas additive mais multiplicative, et nous avons log tr, plutôt que tr comme dans le théorème de l'indice. Le fait que $h^0(a)>0$, ou de façon équivalente que $\mathrm{tr}(\mathrm{pr}_*\phi^{(a)}_{\mathbb{A}})>1$, découle du fait que $\mathrm{pr}_*\phi^{(a)}_{\mathbb{A}}$ est positive et a toujours 1 comme valeur propre puisque c'est une mesure de probabilité : $\mathrm{pr}_*\phi^{(a)}_{\mathbb{A}} * \mathbb{1} = \mathbb{1}$.

On note en passant que R^α_p a un pôle simple en $\alpha=1$, avec résidu de mesure de Haar, et $Pf_{\alpha=1}\,R^\alpha_p$ est le noyau logarithmique qui entre dans le Riemann-Roch Arakelov-Faltings pour $\mathbb{P}^1$ sur spec $\mathbb{Z}$ [12]. Alternativement, $-\log\prod_p\rho_p(q_1,q_2)$ est le nombre d'intersections de $q_1,q_2\in\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, considéré comme des diviseurs horizontaux de $\mathbb{P}^1$ sur spec $\mathbb{Z}$, où

$$\rho_p\ :\ \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\times\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\longrightarrow[0,1], \rho_p(x_1\ :\ x_2, y_1\ :\ y_2) = \frac{|x_1y_2-x_2y_1|_p}{|(x_1,x_2)|_p\,.\,|(y_1,y_2)|_p}$$

est la métrique naturelle sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, et où la valeur absolue deux dimensionnelle est la L^{α_p} valeur absolue : $|(x_1,x_2)|_p = \sup(|x_1|_p, |x_2|_p)$ pour $p < \infty$,

$$|(x_1,x_2)|_\infty = (|x_1|_\infty^2 + |x_2|_\infty^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous regarderons ensuite la compactification (ou plutôt la quantification) des potentiels de Riesz et leur connexion avec la théorie de la représentation de SL_2. Dénotons par $\mathcal{S}^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ l'espace des fonctions lisses $\varphi\ : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{C}$, telles que $\varphi(x^{-1})\,.\,|x|^{-(1+\alpha)}$ est également lisse (i.e., pour $p < \infty$: $\varphi(x) = \text{cons}\,.\,|x| - (1+\alpha)$ pour $|x| \gg 1$), et posons

$$\phi_p^\alpha(x) = \zeta_p(1+\alpha)\,.\,|(1,x)|^{-(1+\alpha)} \in \mathcal{S}^\alpha(\mathbb{Q}_p).$$

Une vérification facile donne

$$R_p^\alpha\ :\ \mathcal{S}^\alpha(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^{-\alpha}(\mathbb{Q}_p), \qquad\qquad R_p^\alpha * \phi_p^\alpha = \phi_p^{-\alpha}.$$

Nous pouvons identifier $\mathcal{S}^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ avec les fonctions lisses $\varphi\ :\ \mathbb{Q}_p^{\oplus 2}\backslash\{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $\varphi(ax_1, ax_2) = |a|^{-(1+\alpha)}\varphi(x_1,x_2)$ (via $\varphi(x) = \varphi(1,x)$; $\varphi(x_1,x_2) = \varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\,.\,|x_1|^{-(1+\alpha)}$), qui en retour peut être identifié avec les sections lisses d'un fibré de droites $\mathcal{O}_p(\alpha)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Le fibré $\mathcal{O}_p(\alpha)$ peut être trivialisé au moyen de la section qui ne s'évanouit jamais correspondant à ϕ_p^α, et nous obtenons :

$$\widetilde{R}_p^\alpha \ \stackrel{\text{def}}{=}\ (\phi_p^{-\alpha})^{-1} \circ R_p^\alpha \circ \phi_p^\alpha\ :\ \mathcal{S}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\ \xrightarrow{\ \sim\ }\ \mathcal{S}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)), \qquad\qquad \widetilde{R}_p^\alpha \mathbb{1} = \mathbb{1}$$

où $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ dénote les fonctions lisses sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, e.g., pour $p < \infty$: $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \ = \ \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p) \oplus \mathbb{C}\,.\,\mathbb{1}$. Dénotons par $SL_2(\mathbb{Z}_p) \ = \ \{g \in SL_2(\mathbb{Q}_p)\Big||g(x_1,x_2)| = |(x_1,x_2)|\}$ le sous-groupe compact maximal de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, $p \le \infty$; et par $dx_1\ :\ x_2$ l'unique mesure de probabilité $SL_2(\mathbb{Z}_p)$-invariante sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Alors nous avons,

$$\widetilde{R}_p^\alpha \varphi(y_1 : y_2) = \frac{1}{r_p(\alpha)} \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \varphi(x_1 : x_2)\rho_p(y_1 : y_2, x_1 : x_2)^{\alpha-1} dx_1 : x_2, \qquad \operatorname{Re}\alpha\ > 0$$

où $r_p(\alpha) \ = \ \dfrac{\zeta_p(2)}{\zeta_p(1)}\,.\,\dfrac{\zeta_p(\alpha)}{\zeta_p(1+\alpha)} \ = \ \displaystyle\int \rho_p(x_1 : x_2, y_1 : y_2)^{\alpha-1} dx_1 : x_2$ pour tout $y_1\ :\ y_2$.

Notons qu'alors que R_p^α était diagonalisable par rapport à la transformation de Fourier en envoyant $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ sur lui-même, $\widetilde{R}_p^\alpha$ est diagonalisable par rapport à la transformation de Fourier envoyant $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p))$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)^\vee)$, où $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)^\vee$ est le groupe (discret) de caractères de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$; ici $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ est considéré comme un groupe via $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Z}_p[\sqrt{\varepsilon_p}]^*/\mathbb{Z}_p^*$, $\quad \varepsilon_p \in \mathbb{Z}_p^*\backslash(\mathbb{Z}_p^*)^2$ [19]. En effet, pour $p < \infty$, et un caractère $\chi \ne \mathbb{1}$, primitive du conducteur p^N, $\quad R_p^\alpha\chi \ = \ \frac{\zeta_p(1+\alpha)}{\zeta_p(1-\alpha)} p^{-N\alpha}\chi$; pour $p = \infty$, et le caractère $\chi_n(z) = z^{2n}$, $\widetilde{R}_\infty^\alpha \chi_n \ = \ \frac{\zeta_\infty(1+\alpha)}{\zeta_\infty(1-\alpha)} \cdot \frac{\zeta_\infty(1-\alpha+2n)}{\zeta_\infty(1+\alpha+2n)} \cdot \chi_n$. Par conséquent, alors que R_p^α avait un spectre $p^{\alpha\mathbb{Z}}$ ($\mathbb{R}^+$, pour $p = \infty$) avec d'infinies multiplicités, $\widetilde{R}_p^\alpha$ a un spectre discret ; tandis que R_p^α était non borné, $\|\widetilde{R}_p^\alpha\|_{L^2(\mathbb{P}^1)} = 1$ pour tout $\alpha \ge 0$, et de plus $\widetilde{R}_p^\alpha$ est Hilbert-Schmidt pour $\operatorname{Re}\ \alpha > \frac{1}{2}$ (et de classe trace pour $\operatorname{Re}\ \alpha > 1$). Notons également que nous perdons la propriété de semi-groupe $R_p^\alpha * R_p^\beta \ = \ R_p^{\alpha+\beta}$, et qu'il ne nous reste que $\widetilde{R}_p^\alpha \ \ge\ 0$; nous perdons la positivité $R_p^\alpha \ge 0$, et il ne nous reste que $\widetilde{R}_p^\alpha \ge 0$ pour $\alpha \in (-1,1)$, correspondant à la représentation en série complémentaire de SL_2 ; nous perdons la structure de nature markovienne de $R_p^{-\alpha}$, $\ \alpha \in (0,\alpha_p)$: $\widetilde{R}_p^{-\alpha}$ n'engendre pas un semi-groupe markovien même pour $\alpha \in (0,1)$.

Dirigeons notre attention vers les valeurs réelles de α, notons que $\widetilde{R}_{\mathbb{A}}^{it} = \otimes_p \widetilde{R}_p^{it}$ est l'opérateur bien connu d'entrelacement pour la représentation en série principale non-ramifiée de $SL_2(\mathbb{A})$ [19 ; 21 ; 53]. Notamment, la transformation de Fourier symplectique deux dimensionnelle (le symbole isotropique [28])

$$\mathcal{F}\varphi(y_1, y_2) = \iint_{\mathbb{A}\,\oplus\,\mathbb{A}} \varphi(x_1, x_2)\psi(x_1y_2 - x_2y_1)dx_1dx_2$$

descend vers un opérateur unitaire $\mathcal{F}$ sur l'espace $\Omega = SL_2(\mathbb{A})/\mathbb{Q}^* \prod_p \mathbb{Z}_p^* \ltimes \mathbb{A}$, qui est une fibration de $\mathbb{P}^1(\mathbb{A}) = SL_2(\mathbb{A})/\mathbb{A}^* \ltimes \mathbb{A}$, avec comme fibre $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* \prod_p \mathbb{Z}_p^* \cong \mathbb{R}^+$. Ainsi, via une transformation de Mellin, $L_2(\Omega) = \int_0^\infty H^{it} \oplus H^{-it}$, où H^{it} dénote $L^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{A}))$ avec la $SL_2(\mathbb{A})$-action unitaire irréductible

$$\pi^{it}(g)\varphi(x_1 : x_2) = \varphi(g^{-1}(x_1 : x_2))\,.\,\left[\frac{|(x_1, x_2)|}{|g^{-1}(x_1, x_2)|}\right]^{1-it},$$

et $\mathcal{F}$ se décompose en $\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{R}_{\mathbb{A}}^{it} \\ \widetilde{R}_{\mathbb{A}}^{-it} & 0 \end{pmatrix}$.

Nous terminons ce survol en transformant nos formules de base reliant les sommes explicites en potentiels de Riesz en une formule de trace. Un calcul évident donne pour Re $\alpha > 0$:

$$\frac{1}{\widetilde{c}_p(\alpha)} R_p^\alpha(\widetilde{f}_p)(q) = \frac{\zeta_p(2\alpha)}{\zeta_p(\alpha)^2}\frac{\zeta_p(1)^2}{\zeta_p(1+\alpha)^2}\,\mathrm{tr}(\widetilde{R}_p^\alpha \pi_p^\alpha(\widetilde{f}_p)\pi_p^\alpha(q))$$

où

$$\pi_p^\alpha(a)\varphi(x_1 : x_2) = \varphi(a^{-1}x_1 : x_2)\left[\frac{|(x_1, x_2)|}{|(a^{-1}x_1, x_2)|}\right]^{1+\alpha},$$

$$\pi_p^\alpha(\widetilde{f}_p) = \int_{\mathbb{Q}_p^*} \widetilde{f}_p(a)\pi_p^\alpha(a)d^*a.$$

En utilisant le fait que $\dfrac{\zeta(2\alpha)}{\zeta(\alpha)^2} = -\dfrac{\alpha}{2}(1 + O(\alpha^2))$ lorsque $\alpha \longrightarrow 0$, nous obtenons :

$$W(f * f^*) = -\frac{1}{2}\sum_{q\in\mathbb{Q}^*} Pf_{\alpha=0} \prod_p \frac{\zeta_p(1)^2}{\zeta_p(1+\alpha)^2}\mathrm{tr}(\widetilde{R}_p^\alpha \pi_p^\alpha(\widetilde{f}_p^*)\pi_p^\alpha(\widetilde{f}_p^{(q)})).$$

En dénotant par $S_p^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(1+\alpha)}\widetilde{R}_p^\alpha + (1 - \frac{\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(1+\alpha)})\widetilde{R}_p^1$, $\widetilde{R}_p^1$ la projection sur l'espace des fonctions constantes, nous avons pour $p < \infty$: $S_p^\alpha \mathbb{1} = \mathbb{1}$, $S_p^\alpha \chi = p^{-N\alpha}\,.\,\chi$ pour un caractère χ primitif du conducteur p^N, de telle façon que S_p^α forme un semi-groupe positif borné pour $\alpha > 0$. À nouveau, un calcul évident donne pour Re $\alpha > 0$:

$$\frac{\zeta_p(2\alpha)}{\zeta_p(\alpha)^2}\,\mathrm{tr}(S_p^\alpha \pi_p^\alpha(\phi_p^*)) = 1$$

$$\frac{\zeta_p(2\alpha)}{\zeta_p(\alpha)^2}\,\mathrm{tr}(S_p^\alpha \pi_p^\alpha(\tilde{f}_p^* * \tilde{f}_p^{(q)})) = R_p^\alpha(\tilde{f}_p^* * \tilde{f}_p^{(q)})(1) + O(\alpha^2).$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$W(f * f^*) = -\frac{1}{2}\sum_{q\in\mathbb{Q}^*} Pf_{\alpha=0}\mathrm{tr}(\pi^\alpha(\widetilde{f}^*)S_{\mathbb{A}}^\alpha \pi^\alpha(\widetilde{f}^{(q)}))$$

où $S_{\mathbb{A}}^{\alpha} = \otimes_p S_p^{\alpha}$, $\pi^{\alpha}(f) = \otimes_p \pi_p^{\alpha}(\widetilde{f}_p)$, comme opérateurs sur $L^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{A})) = \otimes_p L^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p))$ (l'espace de Hilbert $\otimes_p$ w.r.t. $\mathbb{1}$). Notons que pour Re $\alpha > 1$, S_p^{α} est donné par le noyau

$$S_p^{\alpha}(y,x) = \mathbb{1} - \frac{\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(1+\alpha)} \left(\mathbb{1} - \frac{\zeta_p(1)}{\zeta_p(2)} \frac{\zeta_p(1+\alpha)}{\zeta_p(\alpha)} \rho_p(y,x)^{\alpha-1} \right)$$

et que pour Re $\alpha > 2$, $S_{\mathbb{A}}^{\alpha}$ est donné par le noyau $\prod_p S_p(y_p, x_p)$; notons également que l'effet de lissage : $S_p^{\alpha}\pi_p^{\alpha}(\widetilde{f}_p)$ est donné par un noyau continu pour Re $\alpha > 0$. Il est facile de vérifier que, pour $\alpha \in (0, \alpha_p)$, $S_p^{-\alpha}$ engendre une forme de Dirichlet, et nous obtenons un processus de Hunt sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ [17], et le semi-groupe de Schrödinger associé [45] sur l'espace L^2 pondéré $L^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), dx_1 : x_2) \cong L^2\left(\mathbb{Q}_p, \frac{\zeta_p(2)}{\zeta_p(1)} \frac{dx}{|(1,x)|^2}\right)$. En ayant un processus sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ pour chaque p, nous obtenons un processus sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{A}) = \prod_p \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, dont le générateur infinitésimal est $\sum_p S_p^{\alpha}$, mais pour notre objectif, il est plus intéressant de considérer le processus engendré par $S_{\mathbb{A}}^{-\alpha}$.

Finalement, nous remarquons que les opérateurs que nous recherchons sont grossièrement approximés par les $\widetilde{R}_{\mathbb{A}}^{\alpha}$ ou $S_{\mathbb{A}}^{\alpha}$. Il est possible de construire de manière similaire des opérateurs sur les adèles $\mathbb{A}$ (plutôt que $\mathbb{P}^1(\mathbb{A})$) avec une trace reliée aux sommes explicites comme ci-dessus. Ce qui manque dans le but de compléter notre modèle pour attaquer l'hypothèse de Riemann, c'est précisément l'analogue de la super-symétrie dans notre contexte.

Références

[1] M. F. Atiyah, Elliptic operators, discrete groups, and von Neumann algebras, Astérisque, 32 (1976), 43-72.

[2] M. F. Atiyah, R. Bott and V. K. Patodi, On the heat equation and the index theorem, Invent. Math., 19 (1973), 279-330 ; also errata, idid. 28, 277-80.

[3] N. Aronszajn and K. T. Smith, Theory of Bessel potentials. Part I, Ann. Inst. Fourier, 11 (1961), 385-475.

[4] P. Baum and R. Douglas, K-homology and index theory, Proceedings of A.M.S., 38 (1980), 117-73.

[5] Yu. M. Berezanskii, Selfadjoint Operators in Spaces of Functions of Infinitely Many Variables, A.M.S. Translations of Math. Monographs, 63 (1986).

[6] C. Berg and G. Forst, Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups, Springer-Verlag (1975).

[7] J. M. Bismut, The Atiyah-Singer theorems for classical elliptic operators : a probabilistic approach, J. Func. Anal, 57 (1984), 56-99.

[8] J. Bliedtner and W. Hansen, Potential Theory, Springer-Verlag (1986).

[9] D. Cantor, On an extension of the definition of transfinite diameter and some applications, J. Reine. Angew. Math., 316 (1980), 160-207.

[10] P. Cartier, Fonctions harmoniques sur un arbre, Symposia Mathematics, 9 (1972), 203-70.

[11] P. Cartier, Géométrie et analyse sur les arbres, Sem. Bourbaki, 1971/72, Exposé 407.

[12] T. Chinburg, Intersection theory and capacity theory on arithmetic surfaces, Proc. Canadian Math. Soc. Summer Seminar in Number Theory, 7, A.M.S. (1986).

[13] A. Connes, Non commutative differential geometry, Publ. Math. de l'IHES, 62 (1985), 41-144.

[14] P. Deligne, Le déterminant de la cohomologie, Contemporary Math., 67 (1987), 93-177.

[15] W. Feller, On a generalization of M. Riesz, potentials and the semi-groups generated by them, Proc. R. Physiogr. Soc. Lund, 21 (1952), 73-81.

[16] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 2, John Wiley & Sons (1970).

[17] M. Fukushima, Dirichlet Forms and Markov Processes, North-Holland Publ. (1980).

[18] S. Gelbart and I I. Piatetskii-Shapiro, Distinguished representations and modular forms of half-integral weight, Invent. Math., 59 (1980) 145-88.

[19] I. M. Gel'fand, M. I. Graev and I. I. Piatetskii-Shapiro, Representation Theory and Automorphic Functions, Saunders Com. (1969).

[20] I. M. Gel'fand, M. I. Graev and N. Ya, Vilenkin, Generalized Functions vol. 5, Academic Press (1966).

[21] R. Godement, The decomposition of ${}^2(G/\Gamma)$ for $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$, Proc. Symp. Pure Math. IX (1966), 211-24.

[22] D. Goldfeld, Explicit formulae as trace formulae in The Selberg Trace Formula and Related Topics, D. A. Hejhal et al. eds, A.M.S. (1989).

[23] A. Grothendieck, Sur une note de Mattuck-Tate, J. Reine Angew. Math., 200 (1958), 208-15.

[24] B. Getzler, A short proof of the local Atiyah-Singer index theorem, Topology, 25 (1986), 111-7.

[25] D. Hejhal, The Selberg trace formula and the Riemann zeta function, Duke Math. J., 43 (1976), 441-82.

[26] S. Haran, Riesz potentials and explicit sums in arithmetic, to appear in Invent. Math.

[27] S. Haran, Analytic potential theory over the p-adics, preprint.

[28] R. Howe, On the role of the Heisenberg group in harmonic analysis, Bulletin of A.M.S., 3 (1980), no.2, 821-43.

[29] G. A. Hunt, Markoff processes and potentials, I, II, and III, Illinois J. Math., 1 (1957), 44-93; 1 (1957), 316-69; 2 (1958), 151-213.

[30] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic forms on $GL(2)$, Lecture Notes in Math., Springer, 114 (1970).

[31] P. Julg and A. Valette, K-amenability for $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ and the action on the associated tree, J. Funct. Anal., 58 (1984), 194-215.

[32] P. Julg and A. Valette, Twisted coboundary operator on a tree and the Selberg principle, J. Operator Theory, 16 (1986), 285-304.

[33] G. G. Kasparov, Operator K-theory and its applications : elliptic operators, group representations, higher signatures, C^*-extensions, Proc. Int. Cong. Math. Warszawa (1983), 987-1000.

[34] G. G. Kasparov, An index for invariant elliptic operators, K-theory, and representations of Lie groups, Soviet Math. Dokl., 27 (1983) No.1, 105-9.

[35] G. G. Kasparov, Lorentz groups : K-theory of unitary representations and crossed products, Soviet Math. Dokl., 29 (1984) No.2, 256-60.

[36] G. G. Kasparov, The operator K-functor and extensions of C^*-algebras, Math. USSR Izvestija, 16 (1981), No.3, 513-72.

[37] N. S. Landkof, Foundations of Modern Potential Theory, Springer-Verlag (1972).

[38] R. P. Langlands, Automorphic representations, Shimura varieties, and motives, Ein Märchen, Proc. Symp. Pure Math. XXIII (1979), 205-46.

[39] Yu. I. Manin, New Dimensions in Geometry, Proc. Arbeitstagung Bonn, Lecture Notes in Math., Springer, 1111 (1984).

[40] A. Mattuck and J. Tate, On the inequality of Castelnuovo-Severi, Hamb, Abh., 22 (1958), 295-9.

[41] S. J. Patterson, Introduction to the Theory of the Riemann Zeta Functions, Cambridge Univ. Press (1988).

[42] S. C. Port and C. J. Stone, Infinitely divisible processes and their potential theory, I and II, Ann. Inst. Fourier, 21 (1971), no.2, 157-275 ; no.4 179-265.

[43] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces, J. Indian Math. Soc., 20 (1956), 47-87.

[44] R. T. Seeley, Complex powers of an elliptic operator, Proc. Symp. Pure Math. X (1967), 288-307.

[45] B. Simon, Schrödinger semigroups, A.M.S. Bulletin, 7 (1982), No.3, 447-526.

[46] B. Simon, Functional Integration and Quantum Physics, Academic Press (1979).

[47] M, H. Taibleson, Fourier Analysis on Local Fields, Princeton Univ. Press (1975).

[48] J. Tate, Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions, thesis reproduced in J. W. S. Cassels and A. Fröhlich Algebraic Number Theory, Thompson Book Co. (1967).

[49] A. Weil, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Hermann (1948).

[50] A. Weil, Sur les formules explicites de la théorie des nombres premiers, Proc. R. Physiogr. Soc. Lund, 21 (1952), 252-65.

[51] A. Weil, Sur les formules explicites de la théorie des nombres, Izv. Mat. Nauk, 36 (1972) 3-18.

[52] A. Weil, Function zeta et distributions, Sem. Bourbaki 312 (1966).

[53] D. Zagier, Eisenstein series and the Riemann zeta function, in Automorphic forms, Representation theory and Arithmetic, Bombay Colloquium 1979, Springer (1981).

Traduction d'un article de Shai M. J. Haran (Denise Vella-Chemla, décembre 2020)

Potentiels de Riesz et sommes explicites en arithmétique

Shai Haran
Département de mathématiques théoriques,
Institut de science Weizmann,
Rehovot 76100,
Israël

Dans [8], un livre dédié à M. Riesz, A. Weil a exprimé la relation précise entre les zéros des fonctions zeta de corps de nombres et la distribution de leurs nombres premiers. En lisant cet hommage, on ne peut s'empêcher de ressentir que Weil (au moins, subconsciemment) avait préconçu la connexion entre les sommes explicites et les potentiels de Riesz ; ceci est le sujet de notre article. Concernant la philosophie et la motivation derrière une telle connexion, nous renvoyons à la référence [3]. Pour des raisons de simplicité, nous traitons des nombres rationnels, mais avec quelques petites modifications, on peut considérer un corps de nombres arbitraire. Le long du chemin, nous obtenons deux bonus : une expression finie pour la contribution aux sommes explicites donnée par les nombres premiers à l'infini, et une manière uniforme d'exprimer la contribution d'un nombre premier fini et d'un nombre premier infini (cela a été tenté par Weil dans [9], mais il faut remarquer les deux définitions différentes de son "Pf").

Notations

Nous notons par $\mathbb{Q}_p$ les nombres p-adiques pour $p<\infty$, et les réels pour $p=\infty$.
Nous posons $\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p^* \text{ tel que } |x|=1\}$, de telle façon que $\mathbb{Z}_\infty^* = \{\pm 1\}$.
ψ_p dénotera le caractère "canonique" de $\mathbb{Q}_p$ donné par $\psi_\infty(x) = e^{2\pi i x}$, et pour $p<\infty$ par $\psi_p : \mathbb{Q}_p \twoheadrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}^{e^{-2\pi i x}} \hookrightarrow \mathbb{C}^*$.
dx_p dénotera la mesure auto-duale sur $\mathbb{Q}_p$, selon ψ_p, de telle façon que $dx_\infty([0,1]) = 1$, $dx_p(\mathbb{Z}_p) = 1$ et la transformation de Fourier $\mathscr{F}\varphi(y) = \int \varphi(x)\overline{\psi_p}(xy)dx$ satisfait $\mathscr{F}\mathscr{F}\varphi(x) = \varphi(-x)$.
ϕ_p dénotera le "vacuum supplémentaire" donné par $\phi_\infty(x) = e^{-\pi x^2}$, ϕ_p la fonction caractéristique de $\mathbb{Z}_p$ pour $p<\infty$, de telle façon que $\mathscr{F}\phi_p = \phi_p$.
d^*x_p dénotera la mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p^*$ normalisée par $d^*x_p(\mathbb{Z}_p^*) = 1$ pour $p<\infty$, $d^*x_\infty = \dfrac{dx_\infty}{|x_\infty|}$.
ϕ_p^* dénotera la fonction caractéristique de $\mathbb{Z}_p^*$ pour $p<\infty$.
$\zeta_p(s)$ dénotera la fonction de zeta locale, donnée par

$$\zeta_p(s) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p^*} \phi_p(x_p)|x_p|^s d^*x_p = \begin{cases} (1-p^{-s})^{-1} \text{ pour } p<\infty \\ \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right) \text{ pour } p=\infty \end{cases}$$

de telle façon que e.g. $d^*x_p = \zeta_p(1)\dfrac{dx_p}{|x_p|}$.

$\zeta(s) = \prod\limits_p \zeta_p(s)$, Re $s>1$, dénotera la fonction de zeta globale (complétée à l' ∞), de telle façon que $\zeta(s) = \zeta(1-s)$.

référence de l'article : Inventiones mathematicae, 101, 697-703 (1990), ©Springer-Verlag 1990.

$\mathbb{A}$ dénotera l'anneau des adèles, $\mathbb{A}^*$ les idèles. $\mathscr{S}(\mathbb{A}^*) = \otimes_p \mathscr{S}(\mathbb{Q}_p^*)$ est le produit tensoriel algébrique relativement à ϕ_p^*, i.e. c'est l'espace des fonctions sur $\mathbb{A}^*$ constitué des combinaisons linéaires des fonctions "élémentaires" $f = \otimes_p f_p$, où f_p est une fonction lisse (i.e. localement constante pour $p < \infty$), fonction à support compact sur $\mathbb{Q}_p^*$, et $f_p = \phi_p^*$ pour presque tout p ; nous dirons qu'une telle f est "symétrique" si f_p est $\mathbb{Z}_p^*$-invariante pour tout p, et nous posons

$$\mathscr{S} = \left\{ \tilde{f}(x) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} f(qx) \text{ telle que } f \in \mathscr{S}(\mathbb{A}^*),\ f \text{ est symétrique} \right\}$$

qui contient toutes les fonctions lisses à support compact sur les réels positifs, via :

$$\mathbb{Q}^* \backslash \mathbb{A}^* / \prod_p \mathbb{Z}_p^* \cong \mathbb{R}^+.$$

Pour $\tilde{f} \in \mathscr{S}$, nous avons sa transformée de Mellin,

$$\mathscr{M}^s(\tilde{f}) = \int_{\mathbb{R}^+} \tilde{f}(x) x^s d^*x = \int_{\mathbb{A}^*} f(x)|x|^s d^*x$$

qui est une fonction entière de $s \in \mathbb{C}$, vérifiant $|\mathscr{M}^s(\tilde{f})| = 0(|\text{Im } s|^{-N})$ uniformément dans toute bande verticale $a \leq \text{Re } s \leq b$, pour tout N.

Le noyau de Riesz

Nous nous concentrerons sur le cas $p < \infty$, pour $p = \infty$, voir e.g. [1.5]. Le noyau de M. Riesz est donné par $R_p^s(x) = \dfrac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} |x|^{s-1} dx$, Re $s > 0$, $s \not\equiv 1 \left(\text{mod } \dfrac{2\pi i}{\log p} \mathbb{Z} \right)$. Comme distribution, il a un prolongement méromorphe à tous les s, donné par

$$R_p^s(\varphi) = \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \varphi(0) + \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \left[\int_{|x|>1} \varphi(x)|x|^{s-1} dx + \int_{|x|\leq 1} (\varphi(x) - \varphi(0))|x|^{s-1} dx \right].$$

En particulier, pour Re $s > 0$:

$$R_p^s(\varphi) = \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int \varphi(x)|x|^{s-1} dx$$

$$R_p^{-s}(\varphi) = \frac{\zeta_p(1+s)}{\zeta_p(-s)} \int (\varphi(x) - \varphi(0)) \frac{dx}{|x|^{1+s}}$$

et pour $s = 0$, $R_p^0(\varphi) = \varphi(0)$, i.e. $R_p^0 = \delta$.

Considérons ensuite R_p^s comme un opérateur via la convolution, notamment pour φ une fonction localement constante sur $\mathbb{Q}_p$, telle que $\displaystyle\int_{|x|>1} |\varphi(x)||x|^{\text{Re } s-1} dx < \infty$, nous pouvons former $R_p^s * \varphi$:

$$R_p^s * \varphi(y) = \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(1)} \varphi(y) + \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \left[\int_{|x|>1} \varphi(y+x)|x|^{s-1} dx + \int_{|x|\leq 1} (\varphi(y+x) - \varphi(y))|x|^{s-1} dx \right]$$

et à nouveau, pour Re $s > 0$:

$$R_p^s * \varphi(y) = \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int \varphi(x)|y-x|^{s-1}dx$$

$$R_p^{-s} * \varphi(y) = \frac{\zeta_p(1+s)}{\zeta_p(-s)} \int (\varphi(y+x) - \varphi(y)) \frac{dx}{|x|^{1+s}}.$$

En prenant $\psi_p^{(x)}(y) = \psi_p(xy)$, un calcul évident donne pour Re $s > 0$:

$$R_p^{-s} * \psi_p^{(x)}(y) = |x|^s . \psi_p^{(x)}(y)$$

i.e. $\psi_p^{(x)}$ est un vecteur propre R_p^{-s} avec comme valeur propre associée $|x|^s$.

En prenant $y = 0$ dans cette formule, nous avons pour $s \in (0, \infty)$:

$$|x|^s = \int_{\mathbb{Q}_p^*} (1 - \operatorname{Re} \psi_p(xz)) \left\{ \frac{\zeta_p(1+s)}{\zeta_p(-s)} \frac{dz}{|z|^{1+s}} \right\}$$

où la mesure entre les crochets $\{\ldots\}$ est positive. Nous déduisons de cela, par la représentation de Levy-Khinchin [1], que la fonction $|x|^s$ est définie négative pour $s \in (0, \infty)$, et par conséquent nous obtenons un semi-groupe de convolution de mesures de probabilité $\mu_{p,t}^s$, (l'analogue p-adique du) “semi-groupe stable symétrique d'ordre s”, donné par (cf. [2], p. 549) :

$$\mu_{p,t}^s(y) = \mathscr{F} e^{-t|x|^s} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{\zeta_p(1+ns)}{\zeta_p(-ns)} |y|^{-(1+ns)} dy.$$

Il a un générateur infinitésimal $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \mu_{p,t}^s = R_p^{-s}$, et pour $s \in (0,1)$, il est transitoire avec un noyau de potentiel donné par $\int_0^\infty \mu_{p,t}^s dt = R_p^s$.

Car une fonction localement constante à support compact φ sur $\mathbb{Q}_p$, $R_p^s * \varphi$ est aussi localement constante et car de plus $R_p^s * \varphi(y) = cons. |y|^{s-1}$ pour $|y| \gg 1$, par conséquent, nous pouvons former $R_p^{s'} * (R_p^s * \varphi)$ pour $\operatorname{Re}(s'+s) < 1$. Pour s, s' tels que $0 < \operatorname{Re} s, \operatorname{Re} s', \operatorname{Re}(s+s') < 1$, l'équation $R_p^{s'} * (R_p^s * \varphi)$ est immédiate en prenant la transformée de Fourier, et puisque tout est holomorphe dans s, s', nous obtenons la “formule de reproduction” de M. Riesz :

$$R_p^s * R_p^{s'} = R_p^{s+s'} \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re}(s+s') < 1.$$

En particulier, R_p^{-s} car Re $s \geq 0$, forme un semi-groupe holomorphe d'opérateurs avec un générateur infinitésimal $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{s=0} R_p^{-s}$ que nous calculerons ensuite.

La formule locale

Pour $f \in \mathscr{S}$, une fonction lisse à support compact sur $\mathbb{R}^+$, nous dénotons par $f|_p(x_p) = f(|x_p|)$ la fonction symétrique associée sur $\mathbb{Q}_p^*$ obtenue par restriction.

Formule locale

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} R_p^{-s} * f|_p(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \mathscr{M}^s(f) d\log\frac{\zeta_p(s)}{\zeta_p(1-s)}.$$

Preuve. Considérons d'abord le cas $p < \infty$,

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} R_p^{-s} * f|_p(1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\Big\{\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-(1+s)}} f|_p(1) + \frac{1-p^{s}}{1-p^{-(1+s)}}\Big[\int_{|x_p|>1} f|_p(1-x_p)\frac{dx_p}{|x_p|^{1+s}}$$

$$+ \int_{|x_p|\le 1} f|_p(1-x_p) - f|_p(1))\frac{dx_p}{|x_p|^{1+s}}\Big]\Big\}$$

$$= -(1-p^{-1})^{-1}\log\, p\Big[p^{-1} f|_p(1) + \int_{|x_p|>1} f|_p(1-x_p)\frac{dx_p}{|x_p|}$$

$$+ \int_{|x_p|\le 1} f|_p(1-x_p) - f|_p(1))\frac{dx_p}{|x_p|}\Big]\Big\}$$

$$= -(1-p^{-1})^{-1}\log\, p\Big[p^{-1} f|_p(1) + \int_{|x_p|>1} f|_p(x_p)\frac{dx_p}{|1-x_p|}$$

$$+ \int_{|x_p|<1} f|_p(x_p) - f|_p(1))\frac{dx_p}{|1-x_p|}\Big]\Big\}$$

$$= -(1-p^{-1})^{-1}\log p\Big[\int_{|x_p|\neq 1} f|_p(x_p)\frac{dx_p}{|1-x_p|}\Big]$$

$$= -\log p\sum_{n\neq 0} f(p^n)\min(1,p^n)$$

$$= -\log p\sum_{n\neq 0}\min(1,p^n)\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathscr{M}^s(f)p^{-ns}ds \qquad \text{par inversion de Mellin}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathscr{M}^s(f)\Big[-\log\, p\sum_{n\ge 1}p^{-ns} - \log\, p\sum_{n\ge 1}p^{-n(1-s)}\Big]ds \qquad \text{pour tout } c\in(0,1)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathscr{M}^s(f)[d\log\zeta_p(s) - d\log\zeta_p(1-s)].$$

Ensuite, pour $p = \infty$, nous avons, en omettant des calculs triviaux,

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} R_\infty^{-s} * f|_\infty(1) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \Big\{ \pi^{-(\frac{1}{2}+s)} \frac{\Gamma(\frac{1+s}{2})}{\Gamma(1-\frac{s}{2})} f|_\infty(1) + \pi^{-(\frac{1}{2}+s)} \frac{\Gamma(\frac{1+s}{2})}{\Gamma(-\frac{s}{2})} \Big[\int\limits_{|x|>1} f|_\infty(1-x) \frac{dx}{|x|^{1+s}} + \int\limits_{|x|\le 1} (f|_\infty(1-x) - f|_\infty(1)) \frac{dx}{|x|^{1+s}} \Big]$$

$$= -(\gamma + \log 2\pi) f|_\infty(1) - \frac{1}{2} \Big[\int\limits_{|x|>1} f|_\infty(1-x) \frac{dx}{|x|} + \int\limits_{|x|\le 1} (f|_\infty(1-x) - f|_\infty(1)) \frac{dx}{|x|} \Big]$$

$$= -\Big[(\gamma + \log \pi) f(1) + \int_1^2 \frac{dx}{x} f(1) + \frac{1}{2} \int\limits_{|1-x|>1} f(|x|) \frac{dx}{|1-x|} + \frac{1}{2} \int\limits_{|1-x|\le 1} (f(|x|) - f(1)) \frac{dx}{|1-x|} \Big]$$

$$= -\Big[(\gamma + \log \pi) f(1) + \int_1^\infty \frac{x^2 f(x) - f(1)}{x^2 - 1} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{f(x) - x f(1)}{1 - x^2} dx \Big]$$

$$= -\Big[(\gamma + \log \pi) f(1) + \int_1^\infty f(x) \frac{dx}{x} + \sum_{n\ge 1} \int_1^\infty (f(x) - f(1)) x^{-2n} \frac{dx}{x} + \int_0^1 f(x) dx + \sum_{n \ge 1} \int_0^1 (f(x) - f(1)) x^{-2n} \frac{dx}{x} \Big]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathscr{M}^s(f) \Big[-\frac{1}{2}(\gamma + \log\ \pi) - \frac{1}{s} + \sum_{n\ge 1} \Big(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+s} \Big) - \frac{1}{2}(\gamma + \log \pi) - \frac{1}{1-s} + \sum_{n \ge 1} \Big(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1-s} \Big) \Big] ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathscr{M}^s(f) [d \log \zeta_\infty(s) - d \log \zeta_\infty(1-s)] \qquad \text{pour tout } c \in (0,1).$$

La formule globale

Nous “renormaliserons” ensuite les générateurs infinitésimaux R_p^{-s} et les “collerons” ensemble pour nous donner un opérateur défini sur S.

Nous avons pour $p < \infty$, par un calcul simple,

$$c_p^s \stackrel{\text{def}}{=} R_p^{-s} * \phi_p^*(1) = 1 + \frac{(p^s - 1)(1 - p^{-s})}{(p - p^{-s})} = 1 + O(s^2)$$

et nous obtenons $c_\infty^s = 1$.

Posons $\Delta_p^s f_p = \dfrac{1}{c_p^s} R_p^{-s} * f_p$ et $\Delta_{\mathbb{A}^*}^s = \otimes_p \Delta_p^s$ qui est un opérateur défini sur $\mathscr{S}(\mathbb{A}^*)$.

Pour $\tilde{f}(x) = \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}^*} f(qx) \in \mathscr{S}$, nous posons :

$$\Delta^s \tilde{f}(x) = \sum_{q\in\mathbb{Q}^*} \Delta_{\mathbb{A}^*}^s f(qx).$$

Il est facile de voir que la somme ci-dessus converge pour Re $s \gg 1$, et nous donne un opérateur bien défini sur $\mathscr{S}$. Nous ne nous étendrons pas ici, cependant, sur son prolongement analytique et noterons simplement que $\Delta^0 \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x)$. Notre but principal ici sera de prouver ci-dessous la

Formule globale

$$\sum_{q\in\mathbb{Q}^*} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \Delta_{\mathbb{A}^*}^s f(q) = \sum_{\zeta(s)=0} \mathscr{M}^s(f) - \mathscr{M}^0(f) - \mathscr{M}^1(f)$$

où la somme du côté droit est étendue sur tous les zéros de $\zeta(s)$.

Preuve. Par linéarité, il suffit de considérer les $f = \otimes_p f_p$ élémentaires symétriques, de telle façon que $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}^*} \dfrac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \Delta_{\mathbb{A}^*}^s f(q) = \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}^*} \dfrac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \Delta_p^s f_p(q)$

$$= \sum_{q\in\mathbb{Q}^*} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \prod_p \Delta_p^s(f_p(qx_p))(1) \text{ puisque } \Delta_p^s f_p(q) = |q|_p^{-s}.\Delta_p^s(f_p(qx_p))(1) \text{ et } \prod_p |q|_p^{-s} = 1$$

$$= \sum_{q\in\mathbb{Q}^*} \sum_{q\in\mathbb{Q}^*} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \Delta_p^s(f_p(qx_p))(1). \prod_{p'\neq p} f_{p'}(q) \text{ puisque } \Delta_{p'}^0 f_{p'} = f_{p'},$$

$$= \sum_{q\in\mathbb{Q}^*} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \Delta_p^s(\tilde{f}|_p)(1) \text{ puisque } \tilde{f}|_p(x_p) = \sum_{q\in\mathbb{Q}^*} f_p(qx_p) \prod_{p'\neq p} f_{p'}(q),$$

$$= \sum_{q\in\mathbb{Q}^*} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} R_p^{-s} * \tilde{f}|_p(1) \text{ puisque } c_p^0 = 1,\ \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} c_p^s = 0,$$

$$= \sum_p \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \mathscr{M}^s(\tilde{f}) d\log \frac{\zeta_p(s)}{\zeta_p(1-s)} \qquad \text{par la formule locale,}$$

$$= \sum_p \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathscr{M}^s(\tilde{f}) d\log \zeta_p(s) - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathscr{M}^{1-s}(\tilde{f}) d\log \zeta_p(s) \qquad \text{pour tout c>0,}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathscr{M}^s(\tilde{f}) d\log \zeta(s) - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathscr{M}^{1-s}(\tilde{f}) d\log \zeta(s) \qquad \text{pour tout c>1,}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} + \int_{1-c+i\infty}^{1-c-i\infty} \mathscr{M}^s(\tilde{f}) d \log \zeta(s) \qquad \text{par l'équation fonctionnelle} : \zeta(s) = \zeta(1-s),$$

$$= \sum_{\zeta(s)=0} \mathscr{M}^s(\tilde{f}) - \mathscr{M}^0(\tilde{f}) - \mathscr{M}^1(\tilde{f}) \qquad \text{par le théorème des résidus.}$$

Références

[1] Berg. C., Forst, G. : Potential theory on locally compact abelian groups. Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1975.

[2] Feller, W. : An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. 2, New York : John Wiley and Sons 1970.

[3] Haran, S. : Index theory, Potential Theory, and the Riemann hypothesis, In : Proc. LMS Symp. on “L-functions and Arithmetic”, Durham, 1989 (to appear).

[4] Haran, S. : Analytic Potential Theory over the p-Adics (Preprint).

[5] Landkof, N.S. : Foundations of Modern Potential Theory. Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1972.

[6] Taibleson, M.H. : Fourier Analysis on Local Fields, Princeton University Press 1975.

[7] Weil, A. : Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. Paris : Hermann (1948).

[8] Weil, A. : Sur les formules explicites de la théorie des nombres premiers. Proc. R. Physiogr. Soc. Lund **21**, 252-265 (1952).

[9] Weil, A. : Sur les formules explcites de la théorie des nombres, Izv. Mat. Nauk. **36**, 3-18 (1972).

Oblatum 3-XII-1989

Traduction d'un extrait d'un article de Shai M. J. Haran (Technion- Israel Institute of Technology), Denise Vella-Chemla, décembre 2020

Nombres premiers et spectres

1. Idéaux maximaux et nombres premiers

Nous disons qu'un idéal d'équivalence $\varepsilon \in eq(A)$ est *propre* si $(1,0) \notin \varepsilon$, ou de façon équivalente, $\varepsilon_X \subsetneq A_X \times A_X$ pour quelques / tous les $X \in \mathbb{F}_\bullet$, ou de façon équivalente $A/\varepsilon \neq 0$.

Nous disons qu'un idéal, ou un h-idéal, a est *propre* si $1 \notin \mathrm{a}$, ou de façon équivalente $\mathrm{a}_{[1]} \subsetneq A_{[1]}$.

Puisqu'une union de chaîne d'idéaux propres est encore un h-idéal propre, une application du lemme de Zorn donne la

(1.1) **Proposition :** Pour $A \in \mathcal{GR}$, il existe un h-idéal propre maximal.

Nous notons $Max(A) \subseteq h\text{-}il(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux.

(1.2) **Définition :** Un h-idéal (propre) $\mathrm{p} \in h\text{-}il(A)$ est dit être un *premier* si $A_{[1]} \setminus \mathrm{p}$ est fermé relativement à la multiplication, i.e. si pour tout $a, b \in A_{[1]}$,

$$a \circ b \in \mathrm{p} \quad \text{implique} \quad a \in \mathrm{p} \quad \text{ou} \quad b \in \mathrm{p}$$

Nous notons $spec(A) \subseteq h\text{-}il(A)$ l'ensemble des premiers de A.

(1.3) **Proposition :** $Max(A) \subseteq spec(A)$.

2. La topologie de Zariski

Les *ensembles fermés* dans $spec(A)$ sont définis comme étant les ensembles de la forme

$$V(\mathrm{a}) = \{\mathrm{p} \in spec(A), \mathrm{p} \supseteq \mathrm{a}\}, \tag{0.1}$$

avec $\mathrm{a} \subseteq A_{[1]}$, que nous pouvons prendre comme étant un h-idéal $\mathrm{a} \in il(A)$.

On a (2.2)

$$(i) \quad V(\sum_i \mathrm{a}_i) = \bigcap_i V(\mathrm{a}_i),$$

$$(ii) \quad V(\mathrm{a} \cdot \mathrm{a}') = V(\mathrm{a}) \cup V(\mathrm{a}'),$$

$$(iii) \quad V(0) = spec(A), \qquad V(1) = \varnothing$$

Cela montre que les ensembles $V(\mathrm{a})$ définissent une topologie sur $spec(A)$, la *topologie de Zariski*.

Pour un sous-ensemble $C \subseteq spec(A)$, on a le h-idéal,

$$I(C) = \bigcap_{\mathrm{p} \in I} \mathrm{p} \tag{0.2}$$

Il y a une correspondance de Galois

$$h\text{-}il(A) \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \{C \subseteq spec(A)\} \tag{0.3}$$

Les fonctions V, I sont monotones

$$\begin{array}{l} \mathrm{a}_1 \subseteq \mathrm{a}_2 \Rightarrow V(\mathrm{a}_1) \supseteq V(\mathrm{a}_2) \\ C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow I(C_1) \supseteq I(C_2) \end{array} \tag{0.4}$$

et on a

$$\mathrm{a} \subseteq IV(\mathrm{a}), \qquad C \subseteq VI(C) \tag{0.5}$$

Il en découle qu'on a

$$V(\mathrm{a}) = VIV(\mathrm{a}) \quad \text{et} \quad I(C) = IVI(C) \tag{0.6}$$

et les fonctions V, I induisent des bijections inverses

$$\{\mathrm{a} \in h\text{-}il(A), \mathrm{a} = IV(\mathrm{a})\} = \{I(C), C \subseteq spec(A)\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \{C \subseteq spec(A), C = VI(C)\} = \{V(\mathrm{a}), \mathrm{a} \in h\text{-}il(A)\}$$

(2.9) **Lemme :** Pour $\mathrm{a} \in h\text{-}il(A)$, on a

$$IV(\mathrm{a}) = \{a \in A_{[1]}, a^n \in \mathrm{a}\, \text{pour un certain}\, n > 0\} \overset{def}{=} \sqrt{\mathrm{a}}$$

(2.11) **Lemme :** Pour un sous-ensemble $C \subseteq spec(A)$, $VI(C) = \overline{C}$ la fermeture de C.

3. Ensembles ouverts de base

Une base d'ensembles ouverts de $spec(A)$ est donnée par les *ensembles ouverts de base*, ceux-ci sont définis pour $a \in A_{[1]}$ par

$$D_a = spec(A) \setminus V(a) = \{\mathrm{p} \in spec(A, a \notin \mathrm{p}\} \tag{0.8}$$

On a

$$\begin{array}{l} D_{a_1} \cap D_{a_2} = D_{a_1 \circ a_2} \\ D_1 = spec(A), \qquad D_0 = \varnothing \end{array} \tag{0.9}$$

Le fait que tout ensemble ouvert est l'union d'ensembles ouverts de base est démontré par

$$spec(A) \setminus V(\mathrm{a}) = \bigcup_{a \in \mathrm{a}} D_a \tag{0.10}$$

Notons qu'on a

$$D_a = spec(A) \Leftrightarrow a \circ A_{[1]} = \{a\}_A = (1) \Leftrightarrow \text{ il existe un (unique)}\, a^{-1} \in A_{[1]}, a \circ a^{-1} = 1$$

Nous disons qu'un tel a est *inversible*, et nous notons par A^* l'ensemble des éléments inversibles.

Notons que A^* est un groupe abélien (avec involution), et que $A \mapsto A^*$ est un foncteur $\mathcal{GR} \to Ab$ (= groupes abéliens).

Notons que l'on a

$$D_a = \varnothing \Leftrightarrow a \in \bigcap_{\mathrm{p} \in spec(A)} \mathrm{p} = \sqrt{0} \Leftrightarrow \text{il existe}\, n > 0\, \text{avec}\, a^n = 0$$

Nous disons qu'un tel a est *nilpotent*.

(3.6) **Lemme :** Soit $\mathrm{a} = \sqrt{\mathrm{a}} \in h\text{-}il(A)$ soit un h-ideal racine. Alors $V(\mathrm{a})$ est irréductible si et seulement si a est premier.

(3.9) **Proposition :** Pour $a \in A_{[1]}$, l'ensemble ouvert de base D_a est compact.

En particulier, $D_1 = spec(A)$ est compact.

4. Fonctorialité

Pour un homomorphisme d'anneaux généraux $\varphi \in \mathcal{GR}(A, B)$, le pull-back d'un premier est un premier, et nous avons l'application

$$\begin{array}{rll} \varphi^* = spec(\varphi) : & spec(B) & \to spec(A) \\ & \mathrm{q} & \mapsto \varphi^*(\mathrm{q}) = \varphi_{[1]}^{-1}(\mathrm{q}) \end{array} \tag{0.11}$$

L'image inverse selon φ^* d'un ensemble fermé est un ensemble fermé, nous avons

$$\varphi^{*-1}(V_A(\mathrm{a})) = \{\mathrm{q} \in spec(B), \varphi_{[1]}^{-1}(\mathrm{q}) \supseteq \mathrm{a}\} = \{\mathrm{q} \in spec(B), \mathrm{q} \supseteq \varphi_{[1]}(\mathrm{a})\} = V_B(\varphi_{[1]}(\mathrm{a}))$$

De plus, l'image inverse selon φ^* d'un ensemble ouvert de base est un ensemble ouvert de base, nous avons

$$\varphi^{*-1}(D_a) = \{\mathrm{q} \in spec(B), \varphi_{[1]}^{-1}(\mathrm{q}) \not\ni a\} = \{\mathrm{q} \in spec(B), \varphi_{[1]}(a) \notin \mathrm{q}\} = D_{\varphi_{[1]}(a)}$$

Par conséquent, l'application $\varphi^* = spec(\varphi)$ est continue, et nous voyons que *spec* est un foncteur contravariant de $\mathcal{GR}$ vers la catégorie Top, dont les objets sont des espaces topologiques (compacts, sobres), et les applications continues

$$spec : (\mathcal{GR})^{op} \to Top \tag{0.12}$$

(4.5) **Lemme :** Pour $\varphi \in \mathcal{GR}(A, B)$, et pour $\mathrm{b} \in h\text{-}il(B)$, on a $V_A(\varphi_{[1]}^{-1}(\mathrm{b})) = \overline{\varphi^*(V_B(\mathrm{b}))}$.

5. Le spectre stable

Dans cette section, supposons que $A \in \mathcal{GR}^+$ est self-adjoint.

Une application du lemme de Zorn, en remarquant que $0 \in E\text{-}[1]\text{-}il(A)$, et que pour une chaîne $\mathrm{a}_i \in E\text{-}[1]\text{-}il(A)$ également, l'union est stable, $\bigcup \mathrm{a}_i \in E\text{-}[1]\text{-}il(A)$, donne la

(5.1) **Proposition :** Il existe des h-idéaux propres maximaux *stables*.

Plus généralement, pour un h-idéal stable $\mathrm{a} \in E\text{-}[1]\text{-}il(A)$, et pour $f \in A_{[1]}$, tel que $f^n \notin \mathrm{a}$ pour tout n, une application du lemme de Zorn permet d'affirmer qu'il existe un élément maximal m dans l'ensemble

$$\{\mathrm{b} \in E\text{-}[1]\text{-}il(A), \mathrm{b} \supseteq \mathrm{a}, f^n \notin \mathrm{b} \,\text{pour tout}\, n\} \tag{0.13}$$

(5.3) **Assertion :** Un tel m maximal est premier, $\mathrm{m} \in Spec(A)$.

(5.4) **Corollaire :** Pour un h-idéal *stable* $\mathrm{a} \in E\text{-}[1]\text{-}il(A)$, on a

$$\sqrt{\mathrm{a}} = \bigcap_{\mathrm{a} \subseteq \mathrm{p} \in ESpec(A)} \mathrm{p}$$

l'intersection prise sur tous les premiers *stables* contenant a.

On a $ESpec(A) \subseteq spec(A)$, le sous-ensemble des premiers stables, et on lui donne la topologie induite de Zariski.

Les ensembles fermés sont

$$\widetilde{V}(\mathrm{a}) = V(\mathrm{a}) \cap ESpec(A), \quad \mathrm{a} \subseteq A_{[1]} \tag{0.14}$$

Notons que cet ensemble dépend seulement de $ZE(\mathrm{a})_{[1]}$, et nous pouvons prendre $\mathrm{a} \in E\text{-}[1]\text{-}il(A)$.

Pour un sous-ensemble $C \subseteq ESpec(A)$, $I(C) = \bigcap\limits_{\mathrm{p} \in C} \mathrm{p}$ est stable, $I(C) \in E\text{-}[1]\text{-}il(A)$.

Les formules, et les lemmes du paragraphe 2 ramènent au modèle stable. On a une correspondance de Galois

$$E\text{-}[1]\text{-}il(A) \underset{I}{\overset{\widetilde{V}}{\rightleftarrows}} \{C \subseteq ESpec(A)\} \tag{0.15}$$

induisant une bijection.

$$\{\mathrm{a} \in E\text{-}[1]\text{-}il(A), \, \mathrm{a} = \sqrt{\mathrm{a}}\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \{C \subseteq ESpec(A), \, C = \overline{C} \,\text{closed}\} \tag{0.16}$$

Une base pour la topologie de $ESpec(A)$ est donnée par les *ensembles ouverts stables de base*,

$$\widetilde{D}_a = ESpec(A) \setminus \widetilde{V}(a) = \{\mathrm{p} \in ESpec(A), a \notin \mathrm{p}\} = D_a \bigcap ESpec(A) \tag{0.17}$$

Notons que nous avons $\widetilde{D}_a = ESpec(A) \Leftrightarrow ZE(a \circ A)_{[1]} = A_{[1]}$ si et seulement si il existe un chemin $1 = a_1, a_2, \ldots, a_l = 0$, avec $\{a_j, a_{j+1}\}$ de la forme $\{(b \circ c, d), (b \circ \overline{c}, d)\}$, avec $b, d \in A_{X_j \oplus Y_j}$, $c, \overline{c} \in \left(A_{[1]}\right)^{X_j \oplus Y_j}$, et $c^{(x)} = \overline{c}^{(x)}$ pour $x \in X_j$, $c^{(y)} = a$, $\overline{c}^{(y)} = 0$ pour $y \in Y_j$.

Nous disons que a est une *unité*, et nous notons $A^{(1)}$ l'ensemble des unités ; $A^* \subseteq A^{(1)} \subseteq A_{[1]}$.

Notons que d'un autre côté,

$$\widetilde{D}_a = \varnothing \Leftrightarrow a \in \bigcap_{\mathrm{p} \in ESpec(A)} \mathrm{p} = \sqrt{0} \Leftrightarrow a \,\text{est nilpotent} \, \Leftrightarrow D_a = \varnothing \tag{0.18}$$

Par conséquent, nous avons la

(5.11) **Proposition :** $ESpec(A)$ est dense dans $spec(A)$.

Pour un idéal stable radical, $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} \in E\text{-}[1]\text{-}il(A)$, et pour $a \in A_{[1]}$, nous avons, voir l'équation (3.7),

$$\widetilde{V}(\mathfrak{a}) \bigcap \widetilde{D}_a \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists \mathfrak{p} \in ESpec(A), \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{p} \not\ni a \Leftrightarrow a \notin \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$$

Ainsi (3.6) devient : $\widetilde{V}(\mathfrak{a})$ est irréductible si et seulement si $\mathfrak{a}$ est premier.

Par conséquent la bijection (0.16) induit une bijection

$$ESpec(A) \xleftrightarrow{\sim} \{C \subseteq ESpec(A), C \,\text{fermé et irréductible}\} \tag{0.19}$$

i.e. l'espace $ESpec(A)$ est également sobre.

(5.14) **Proposition :** Les ensembles de base ouverts stables $\widetilde{D}_a = D_a \bigcap ESpec(A)$ sont compacts.

En particulier, $\widetilde{D}_1 = ESpec(A)$ est compact.