

UNE INTRODUCTION À LA FONCTION DE BERNOULLI

PETER H. N. LUSCHNY

(trad. : Denise Vella-Chemla, 3.11.2020)¹

RÉSUMÉ. La *fonction de Bernoulli* $B(s, v) = -s\zeta(1-s, v)$ interpole les nombres de Bernoulli mais elle peut être introduite indépendamment de la fonction zeta. Le point de départ est une modification des constantes de Stieltjes basée sur une représentation entière fournie par J. Jensen. L'équation fonctionnelle de $B(s, v)$ et sa relation à la fonction ζ de Riemann et la fonction ξ est explorée. Les résultats classiques de Hadamard, Worpitzky, et Hasse sont refondus en fonctions de $B(s, v)$. La *fonction de Bernoulli étendue* définit les nombres de Bernoulli pour les indices impairs qui s'harmonisent avec les nombres rationnels étudiés par Euler en 1735 et qui sont le pont vers les nombres d'*Euler et André*. Les fonctions d'interpolation à la fois pour les cas signés et non signés sont fournies. Les *polynômes couteaux-suisse* permettent de calculer facilement les séquences entières appartenant à la famille d'Euler–Bernoulli.

Prologue : extension par interpolation

La question

André Weil raconte l'origine de la fonction gamma dans son exposé d'histoire de la théorie des nombres [66, p. 275] :

Même dès ses premiers jours à Saint-Petersbourg, Euler s'intéressait aux fonctions d'interpolation et les formules étaient fournies au départ seulement pour les valeurs entières de l'argument ; c'est ainsi qu'il a créé la théorie de la fonction gamma.

Les trois-cent années de succès de la fonction gamma d'Euler montrent combien cette question est fructueuse. Et c'est toute l'utilité d'une telle investigation qui n'est pas limitée par le fait qu'il y a un nombre infini de façons d'interpoler une séquence de nombres.

La question que nous explorerons dans cette note est : comment interpoler plus significativement les nombres de Bernoulli ?

La méthode

Les nombres de Bernoulli étaient connus depuis un certain temps au début du 18ème siècle et utilisés dans la formule de sommation (maintenant appelée formule d'Euler–Maclaurin) en analyse,

1. de l'article original en anglais ici : <https://arxiv.org/pdf/2009.06743.pdf>.

d’abord sans réaliser que ces nombres sont les mêmes dans les deux cas.

Alors, en 1755, Euler baptisa ces nombres *nombres de Bernoulli* dans son *Institutiones calculi differentialis* (suivant ainsi la direction de de Moivre). Après ça, les choses changèrent, comme le raconte Edward Sandifer [57] :

... pour la première fois les nombres de Bernoulli avaient un nom, leurs diverses occurrences purent être reconnues, organisées, manipulées et comprises. Ayant un nom, elles faisaient sens.

La fonction dont nous allons parler n’est pas nouvelle. Pourtant, elle n’est pas traitée comme une fonction de plein droit et avec son propre nom. Alors nous donnerons un nom à la bête. Nous appellerons cette fonction d’interpolation *fonction de Bernoulli*. S’il est vrai, comme l’explique Barry Mazur [50], que les nombres de Bernoulli “agissent comme une force unificatrice, faisant tenir ensemble des champs semblant disparates des mathématiques”, alors cela devrait se refléter d’autant plus dans cette fonction.

Qu’attendre ?

Cette note est plutôt à lire comme une collection de formules annotées, toutes les démonstrations sont dans les références bibliographiques.

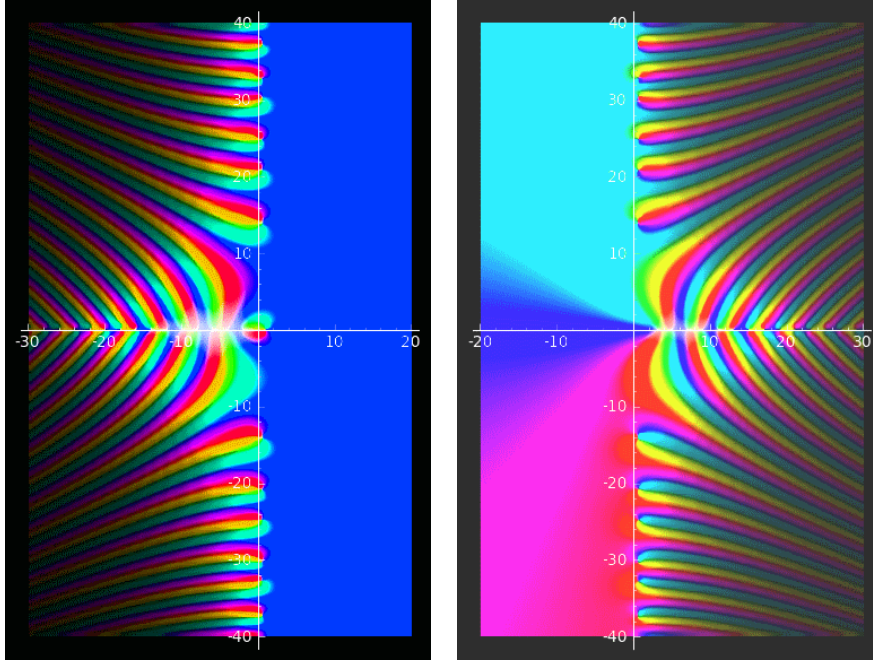
La fonction de Bernoulli et la fonction zeta de Riemann sont si profondément entremêlées que les propriétés de l’une peuvent être facilement dérivées des propriétés de l’autre. Par exemple, toutes les questions que Riemann associait à la fonction zeta peuvent aussi être discutées avec la fonction de Bernoulli.

L’introduction de la fonction de Bernoulli amène à une plus grande cohérence. Elle peut conseiller aux “génération-de-fonctions-gologistes” [67] quels nombres accrocher à leur fil à linge (voir aussi [41]) et dans de nombreux cas, cela amène à des représentations plus simples et plus naturelles.

Semblant être le premier à traiter la fonction de Bernoulli très concrètement à notre sens, on peut citer J. Jensen [32], qui donna une formule intégrale pour la fonction de Bernoulli d’une simplicité remarquable. Excepté en référençant le théorème de Cauchy, il ne développa pas la preuve.

La preuve est dans I. Blagouchine et F. Johansson [34].

		<i>n° de l'éq.</i>
$B(s, v) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v-1/2+iz)^s}{(e^{-\pi z} + e^{\pi z})^2} dz$	formule de Jensen	→ 30
$B(s) = B(s, 1) = -s \zeta(1-s)$	fonction de Bernoulli	→ 4
$B^c(s) = B(s, 1/2)$	fonction centrale de Bernoulli	→ 36
$B^*(s) = B(s)(1-2^s)$	fonction alternée de Bernoulli	→ 74
$B_n = B(n)$	nombres de Bernoulli	→ 6
$G(s, v) = 2^s \left(B\left(s, \frac{v}{2}\right) - B\left(s, \frac{v+1}{2}\right) \right)$	fonction de Genocchi généralisée	→ 82
$G(s) = G(s, 1) = 2^s (B^c(s) - B(s))$	fonction de Genocchi	→ 40
$E(s, v) = -\frac{G(s+1, v)}{s+1}$	fonction d'Euler généralisée	→ 83
$E(s) = E(s, 1)$	fonction d'Euler	→ 84
$E^c(s) = 2^s E(s, \frac{1}{2})$	fonction centrale d'Euler	→ 85
$E_n = E^c(n)$	nombres d'Euler	→ 87
$\tilde{\zeta}(s) = \zeta(s) + \frac{\zeta(s, \frac{1}{4}) - \zeta(s, \frac{3}{4})}{2^s - 2}$	fonction de zeta étendue	→ 89
$\mathcal{B}(s) = -s \tilde{\zeta}(1-s)$	fonction de Bernoulli étendue	→ 88
$\mathcal{E}(s) = \frac{4^{s+1} - 2^{s+1}}{(s+1)!} \mathcal{B}(s+1)$	fonction d'Euler étendue	→ 91
$\mathcal{A}(s) = s! \mathcal{E}(s) = (2^{s+1} - 4^{s+1}) \tilde{\zeta}(-s)$	fonction d'André	→ 92
$\mathcal{A}^*(s) = i(i^s \text{Li}_{-s}(-i) - (-i)^s \text{Li}_{-s}(i))$	fonction d'André non signée	→ 95
$\mathcal{B}^*(s) = \frac{s \mathcal{A}^*(s-1)}{4^s - 2^s}$	fonction de Bernoulli non signée étendue	→ 96
$\xi(s) = B(s) \frac{\sigma!}{\pi^\sigma}$ avec $\sigma = (1-s)/2$	fonction ξ de Riemann	→ 67
$\gamma = -B'(0)$ (Euler), $\gamma_{n-1} = -\frac{1}{n} B^{(n)}(0)$	constantes de Stieltjes	→ 44



La fonction zeta et la fonction de Bernoulli dans le plan complexe.

Constantes de Stieltjes

Les constantes d'Euler généralisées, aussi appelées *constantes de Stieltjes*, sont les nombres réels γ_n définis par les séries de Laurent dans un voisinage de $s = 1$ de la fonction zeta de Riemann ([56], [1]),

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n (s-1)^n, \quad (s \neq 1). \quad (1)$$

Comme cas particuliers, elles incluent la constante d'Euler $\gamma_0 = \gamma \approx \frac{228}{395}$. Une discussion complète avec de nombreuses notes historiques peut être trouvée dans [13]. Pour les valeurs numériques, consulter [40].

I. V. Blagouchine [12], après J. Franel [23], montre que

$$\gamma_n = -\frac{2\pi}{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{2} + iz\right)^{n+1}}{(e^{-\pi z} + e^{\pi z})^2} dz. \quad (2)$$

Récemment, on a observé que la représentation entière (2) peut être utilisée d'une manière particulièrement efficace pour approximer numériquement les constantes de Stieltjes selon une précision souhaitée [34].

Les constantes de Bernoulli

Les *constantes de Bernoulli* β_n sont définies pour $n \geq 0$ par

$$\beta_n = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{2} + iz\right)^n}{(e^{-\pi z} + e^{\pi z})^2} dz. \quad (3)$$

Nous écrivons $f(x)^n$ pour $(f(x))^n$ et prenons comme valeur principale le logarithme implicite dans l'exponentielle, ici et dans toutes les formules à venir.

La *fonction de Bernoulli* est définie par

$$B(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{s^n}{n!}. \quad (4)$$

Noter que $\beta_0 = 1$, ainsi en particulier $B(0) = 1$. De (2) et (3), nous voyons que $\gamma_n = -\beta_{n+1}/(n+1)$. Ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned} B(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{s^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{s^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n+1} \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \frac{s^{n+1}}{n!} \\ &= 1 - s \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \frac{s^n}{n!} \\ &= -s\zeta(1-s). \end{aligned} \quad (5)$$

Ici la singularité de $-s\zeta(1-s)$ en $s = 0$ est éliminée par $B(0) = 1$. Ainsi $B(s)$ est une fonction entière avec ses séries de définition qui convergent partout dans \mathbb{C} .

Les nombres de Bernoulli

Nous définissons les *nombres de Bernoulli* comme les valeurs de la fonction de Bernoulli pour les entiers non négatifs. Selon (4), cela signifie

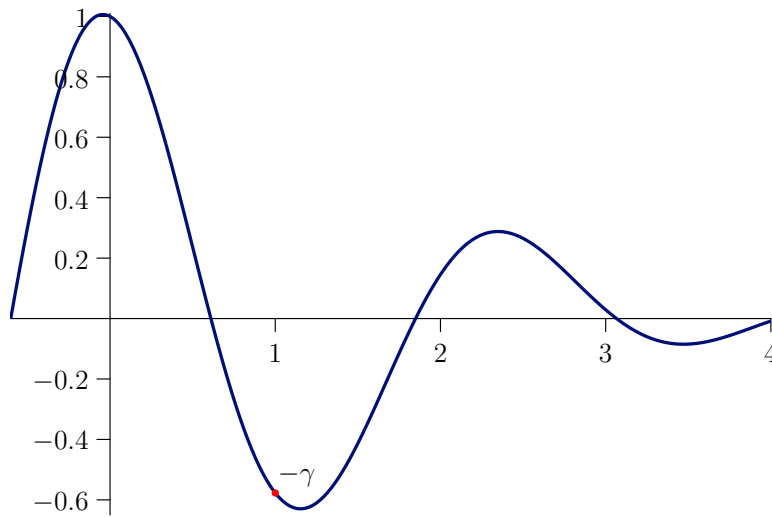
$$B_n = B(n) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \frac{n^j}{j!}. \quad (6)$$

Puisque pour $n > 1$ un entier impair $-n\zeta(1-n) = 0$, les nombres de Bernoulli s'évanouissent sur ces entiers et $B_n = 1 - n \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \frac{n^j}{j!}$ implique

$$\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \frac{n^j}{j!} = \frac{1}{n} \text{ et } \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \frac{n^j}{j!} = 0 \quad (n > 1 \text{ impair}). \quad (7)$$

r	$\beta(r)$
-1	-1.0967919991262275651322398023421657187190...
-1/2	0.3000952439768656513643742483305378454480...
0	1.0
1/2	0.2364079388130323148951169845913737350793...
1	-0.5772156649015328606065120900824024310421...
3/2	-0.4131520868458801199329318166967102536980...
2	0.1456316909673534497211727517498026382754...
5/2	0.2654200629584708272795102903586382709016...
3	0.0290710895786169554535911581056375880771...
7/2	-0.0845272473711484887663180676975841853310...
4	-0.0082153376812133834646401861710135371428...

TABLE 1 – Les constantes de Bernoulli pour quelques rationnels r .



Les constantes de Bernoulli vues comme valeurs d'une fonction réelle.

Le prolongement de la fonction de Bernoulli

La fonction de Bernoulli $B(s) = -s\zeta(1-s)$ peut être prolongée en utilisant les constantes généralisées d'Euler–Stieltjes

$$B(s) = 1 - \gamma s - \gamma_1 s^2 - \frac{\gamma_2}{2} s^3 - \frac{\gamma_3}{6} s^4 \dots, \quad (8)$$

ou dans sa forme plus naturelle en utilisant les constantes de Bernoulli

$$B(s) = 1 + \beta_1 s + \frac{\beta_2}{2} s^2 + \frac{\beta_3}{6} s^3 + \frac{\beta_4}{24} s^4 \dots. \quad (9)$$

Bien que nous fassions toujours référence aux propriétés bien connues de la fonction zeta en utilisant (5), notre définition de la fonction de Bernoulli et des nombres de Bernoulli ne se réfère qu'à (3) et (4).

L'indice n dans (3) n'est pas restreint aux valeurs entières. Comme illustration, la fonction β_r est visualisée dans la figure ci-dessus, où l'indice r de β est compris comme étant un nombre réel.

La table ci-dessus montre quelques valeurs numériques des constantes de Bernoulli.

Formules entières pour les constantes de Bernoulli

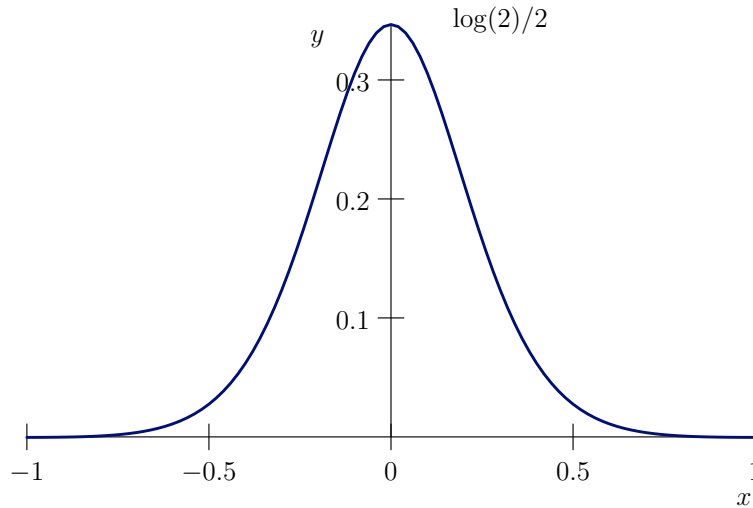
Revenons à la définition de β_n fournie dans (3). L'apparition de l'unité imaginaire force à faire une intégration complexe ; d'un autre côté, seule la partie réelle du résultat est utilisée. Heureusement, la définition peut être simplifiée de telle façon que le résultat du calcul reste dans les réels en supposant que n est un entier non négatif.

En utilisant la symétrie de l'intégrale par rapport à l'axe des y et $(e^{-\pi z} + e^{\pi z})^2 = 4 \cosh(\pi z)^2$ nous obtenons de la définition (3)

$$\beta_n = \pi \int_0^\infty \frac{\Re(\log(\frac{1}{2} + iz)^n)}{\cosh(\pi z)^2} dz. \quad (10)$$

Pour le numérateur de l'intégrale, nous posons pour $n \geq 0$

$$\sigma_n(z) = \Re(\log(\frac{1}{2} + iz)^n). \quad (11)$$



Représentation entière de $\gamma/\pi f(z) = -\log((z^2 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{4}})(\pi z)^2$ avec $\int_{-\infty}^\infty f(z) dz = \frac{\gamma}{\pi}$.

Par induction, on voit que

$$\sigma_n(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} a(z)^{n-2k} b(z)^{2k}, \quad (12)$$

où $a(z) = \log(z^2 + \frac{1}{4})/2$ et $b(z) = \arctan(2z)$.

De ce fait, les constantes peuvent être calculées par des intégrales réelles,

$$\beta_n = \pi \int_0^\infty \frac{\sigma_n(z)}{\cosh(\pi z)^2} dz. \quad (13)$$

De façon similaire, pour les constantes de Stieltjes,

$$\gamma_n = -\frac{\pi}{n+1} \int_0^\infty \frac{\sigma_{n+1}(z)}{\cosh(\pi z)^2} dz. \quad (14)$$

Quelques formules d'intégrales spéciales

La formule (14) se lit pour $n = 0$

$$\gamma = -\pi \int_0^\infty \frac{\log(z^2 + \frac{1}{4})}{2 \cosh(\pi z)^2} dz. \quad (15)$$

Cela découle du fait que pour z réel

$$\sigma_1(z) = \Re \log\left(\frac{1}{2} + iz\right) = \log\left(\frac{1}{2}\sqrt{4z^2 + 1}\right) = \frac{1}{2} \log\left(z^2 + \frac{1}{4}\right).$$

En utilisant la symétrie de l'intégration par rapport à l'axe des y , cela peut être reformulé en : gamma d'Euler est π fois l'intégrale de $-\log((z^2 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{4}})(\pi z)^2$ sur la ligne des réels (voir la figure ci-dessus). Les chiffres de la constante γ/π sont fournis dans la séquence A301813 de l'encyclopédie OEIS.

En utilisant les abréviations $a = \log(z^2 + \frac{1}{4})/2$, $b = \arctan(2z)$ et $c = \cosh(\pi z)$, quelques-unes des premières constantes de Bernoulli sont selon (12) :

$$\beta_1 = \pi \int_0^\infty \frac{a}{c^2} dz, \quad (16)$$

$$\beta_2 = \pi \int_0^\infty \frac{a^2 - b^2}{c^2} dz, \quad (17)$$

$$\beta_3 = \pi \int_0^\infty \frac{a^3 - 3ab^2}{c^2} dz, \quad (18)$$

$$\beta_4 = \pi \int_0^\infty \frac{a^4 - 6a^2b^2 + b^4}{c^2} dz, \quad (19)$$

$$\beta_5 = \pi \int_0^\infty \frac{a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4}{c^2} dz. \quad (20)$$

Constantes généralisées de Stieltjes et Bernoulli

Nous rappelons que $\gamma_n/n!$ est le coefficient de $(1-s)^n$ dans le prolongement de Laurent de $\zeta(s)$ à proximité de $s = 1$ et que $\gamma_n(v)/n!$ est le coefficient de $(1-s)^n$ dans le prolongement de Laurent de $\zeta(s, v)$ à proximité de $s = 1$. En d'autres termes, avec les *constantes généralisées de Stieltjes* $\gamma_n(v)$, nous avons la *fonction zeta de Hurwitz* $\zeta(s, v)$ de la forme

$$\zeta(s, v) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n(v) (s-1)^n, \quad (s \neq 1). \quad (21)$$

Les constantes généralisées de Stieltjes peuvent être calculées pour $n \geq 0$ et $\Re(v) > \frac{1}{2}$ par un prolongement de la représentation intégrale (2), voir [34] [formule 2].

$$\gamma_n(v) = -\frac{\pi}{2(n+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\left(v - \frac{1}{2} + iz\right)^{n+1}}{\cosh(\pi x)^2} dz. \quad (22)$$

Les constantes généralisées de Bernoulli sont définies ainsi :

$$\beta_s(v) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log\left(v - \frac{1}{2} + ix\right)^s}{(e^{-\pi x} + e^{\pi x})^2} dx. \quad (23)$$

Noter que $\beta_0(v) = 1$ pour tout v et $\beta_n(v) = -n\gamma_{n-1}(v)$ pour $n \geq 1$.

La fonction de Bernoulli généralisée

Alors nous introduisons la fonction de Bernoulli généralisée $B(s, v)$, qui est l'analogie de la fonction zeta de Hurwitz. Le nouveau paramètre v peut être n'importe quel nombre complexe qui n'est pas un entier non positif. La *fonction de Bernoulli généralisée* est définie par

$$B(s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(v) \frac{s^n}{n!}. \quad (24)$$

Lorsque $v = 1$, c'est la fonction ordinaire de Bernoulli (4). En utilisant les équations de la dernière section, on obtient

$$B(s, v) = 1 - s \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(v) \frac{s^n}{n!}. \quad (25)$$

Ainsi la fonction généralisée de Bernoulli peut être représentée par

$$B(s, v) = -s \zeta(1 - s, v), \quad (s \neq 1). \quad (26)$$

Cela englobe aussi les *polynômes de Bernoulli* puisque

$$B_n(x) = B(n, x) \quad (n \geq 0, n \text{ entier}). \quad (27)$$

Cela découle de (26) (voir par exemple [4, Th. 12.13]) et le fait que $B(0, x) = 1$.

Formules intégrales pour la fonction de Bernoulli

Les formules intégrales pour les constantes de Bernoulli peuvent être transférées à la fonction de Bernoulli elle-même. Dans la première étape, nous reproduisons une formule de J. L. Jensen [32], qu'il a donnée dans une réponse à E. Cesàro dans l'*L'Intermédiaire des mathématiciens*.

$$(s - 1)\zeta(s) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} + iy\right)^{1-s}}{(e^{\pi y} + e^{-\pi y})^2} dy. \quad (28)$$

Jensen commente :

“... [cette formule] est remarquable par sa simplicité et peut être facilement démontrée à l'aide du théorème de Cauchy.”

La manière dont Jensen a effectivement calculée $(s - 1)\zeta(s)$ n'est pas claire, puisque la formule pour les coefficients c_v , qu'il établit, diverge rapidement. Cela a été observé par V. Kotěšovec (communication personnelle).

Dans un exemple numérique, Jensen utilise les constantes de Bernoulli dans la forme

$$c_v = (-1)^v \beta_v / v!$$

Appliquée à la fonction de Bernoulli, la *formule de Jensen* s'écrit ainsi

$$B(s) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} + iz)^s}{(e^{\pi z} + e^{-\pi z})^2} dz. \quad (29)$$

Cette formule peut être vue comme un cas particulier de la première formule du théorème 1 dans Johansson et Blagouchine [34], [61, p. 92], [60].

P. Hadjicostas [26] remarque qu'à partir de ce théorème, on peut également dériver la représentation correspondante de la fonction généralisée de Bernoulli : pour tout $s \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}$ avec $\Re(v) \geq 1/2$

$$B(s, v) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v - \frac{1}{2} + iz)^s}{(e^{-\pi z} + e^{\pi z})^2} dz. \quad (30)$$

La fonction de Hurwitz–Bernoulli

La *fonction de Hurwitz–Bernoulli* est définie par

$$H(s, v) = e^{-i\pi s/2} L(s, v) + e^{i\pi s/2} L(s, 1 - v), \quad (31)$$

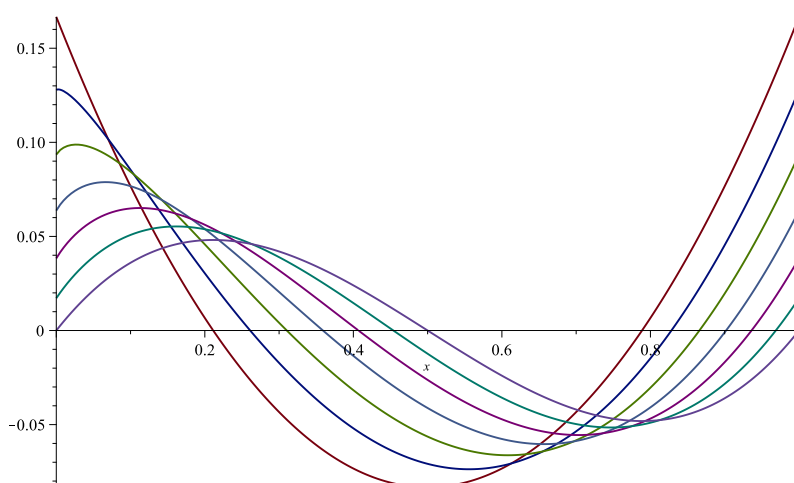
$$L(s, v) = -\frac{s!}{(2\pi)^s} \text{Li}_s(e^{2\pi i v}). \quad (32)$$

Ici, $\text{Li}_s(v)$ dénote le polylogarithme. La proposition

$$B_s(v) = B(s, v) = H(s, v), \text{ pour } 0 \leq v \leq 1 \text{ et } s > 1, \quad (33)$$

est attribuée à Adolf Hurwitz. Dans le cas correspondant pour la fonction zeta, (33) est appelée *formule de Hurwitz* [4, p. 71].

Avec la fonction de Hurwitz–Bernoulli, les polynômes de Bernoulli peuvent être déformés continuellement les uns dans les autres (voir la figure ci-dessous).

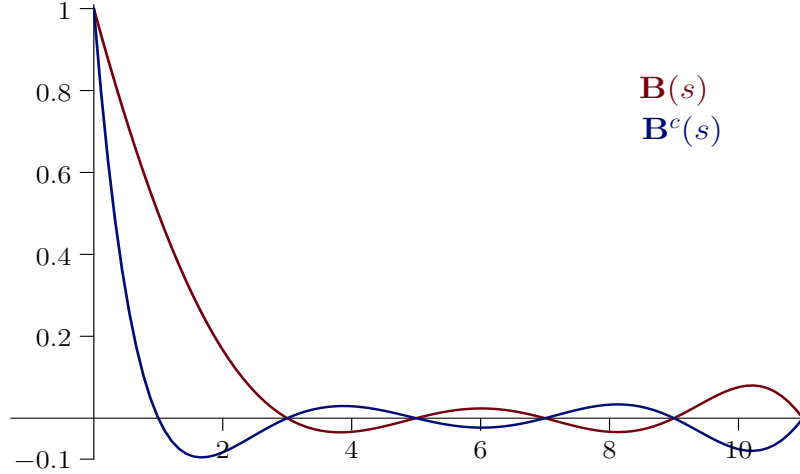


La fonction de Hurwitz–Bernoulli avec $s = 2 + k/6$,
 $(0 \leq k \leq 6)$, déforment $B_2(x)$ en $B_3(x)$.

La fonction centrale de Bernoulli

En posant $v = 1$ dans (33), la fonction de Hurwitz–Bernoulli se simplifie en

$$B_s(1) = -2 s! \text{Li}_s(1) \cos(s\pi/2)/(2\pi)^s, \quad (s > 1). \quad (34)$$



La fonction de Bernoulli et la fonction centrale de Bernoulli

Pour $s > 1$, on peut remplacer le polylogarithme par la fonction zeta et alors appliquer l'équation fonctionnelle de la fonction zeta pour obtenir

$$B_s(1) = -s\zeta(1-s), \quad (s > 1).$$

Ainsi la fonction de Bernoulli est une portion verticale de la fonction de Hurwitz–Bernoulli, $B(s) = B_s(1)$, de la même façon que les nombres de Bernoulli sont des cas particuliers des polynômes de Bernoulli, $B_n = B_n(1)$.

Poser $v = 1/2$ dans la fonction de Hurwitz–Bernoulli amène à un second cas remarquable. Alors (33) se réduit à

$$B_s(1/2) = -2 s! \text{Li}_s(-1) \cos(s\pi/2)/(2\pi)^s, \quad (s > 1). \quad (35)$$

Pour $s > 1$, nous pouvons remplacer le polylogarithme par l'opposée de la fonction zeta alternée. Nous appelons $B^c(s) = B_s(1/2)$ la *fonction centrale de Bernoulli*. $B^c(s)$ a les mêmes zéros triviaux que la fonction de Bernoulli, plus un zéro au point $s = 1$. (voir le graphique ci-dessus).

Une représentation entière de la fonction centrale de Bernoulli découle de (30). Pour tout $s \in \mathbb{C}$

$$B^c(s) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(iz)^s}{(e^{-\pi z} + e^{\pi z})^2} dz. \quad (36)$$

Les polynômes centraux de Bernoulli

Les *nombres centraux de Bernoulli* sont définis par

$$B_n^c = 2^n B_n(1/2). \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
& 1 \\
& x \\
& -\frac{1}{3} + x^2 \\
& -x + x^3 \\
& \frac{7}{15} - 2x^2 + x^4 \\
& \frac{7}{3}x - \frac{10}{3}x^3 + x^5 \\
& -\frac{31}{21} + 7x^2 - 5x^4 + x^6 \\
& -\frac{31}{3}x + \frac{49}{3}x^3 - 7x^5 + x^7 \\
& \frac{127}{15} - \frac{124}{3}x^2 + \frac{98}{3}x^4 - \frac{28}{3}x^6 + x^8 \\
& \frac{381}{5}x - 124x^3 + \frac{294}{5}x^5 - 12x^7 + x^9
\end{aligned}$$

TABLE 2 – Les polynômes centraux de Bernoulli $B_n^c(x)$.

Fournissons quelques-uns des premiers d’entre eux, pour $n \geq 0$:

$$1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{7}{15}, 0, -\frac{31}{21}, 0, \frac{127}{15}, 0, -\frac{2555}{33}, 0, \frac{1414477}{1365}, \dots$$

Sans surprise, Leonhard Euler en 1755 dans ses *Institutiones* a lui aussi calculé quelques nombres centraux de Bernoulli (Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 10, p. 351).

Les *polynômes centraux de Bernoulli* sont définis comme les polynômes de Bernoulli, par une séquence de Appell.

$$B_n^c(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k^c x^{n-k}. \quad (38)$$

La parité de n est égale à la parité de $B_n^c(x)$ (les polynômes de Bernoulli ne possèdent pas cette propriété).

Malgré leur signifiante systématique, les polynômes centraux de Bernoulli n’étaient pas dans la base de données de l’OEIS au moment où nous avons écrit ces lignes (ils sont maintenant recensés dans la séquence A335953).

Dans le contexte d’“aller à moitié” aussi, l’identité suivante vaut la peine d’être mentionnée (nous y reviendrons ultérieurement) :

$$2^n B_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k B_k\left(\frac{1}{2}\right). \quad (39)$$

La fonction de Genocchi

De combien la fonction centrale de Bernoulli dévie-t-elle de la fonction de Bernoulli ? La *fonction de Genocchi* donne une réponse à cette question (à un facteur d’échelle près).

$$G(s) = 2^s \left(B_s\left(\frac{1}{2}\right) - B_s(1) \right). \quad (40)$$

Des identités (34) et (35), il s'ensuit que la fonction de Genocchi peut être représentée d'abord pour $s > 1$ et ensuite, par prolongement analytique en général par

$$G(s) = 2(1 - 2^s)B(s). \quad (41)$$

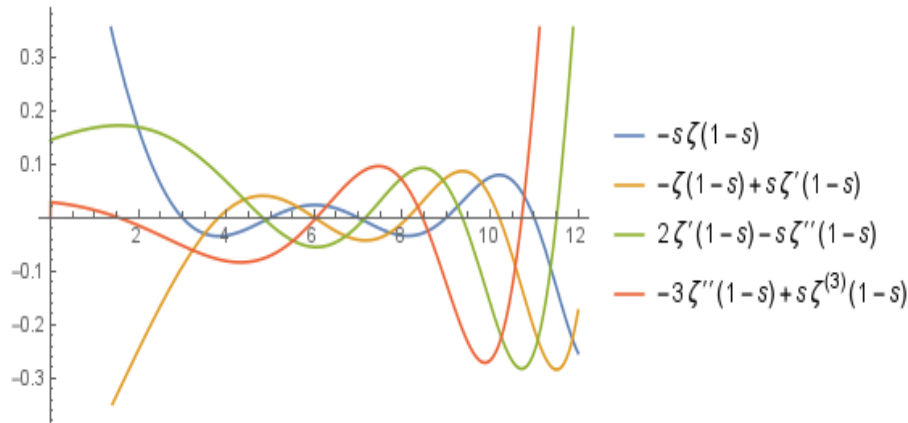
Une propriété utile de la fonction de Genocchi est qu'elle prend des valeurs entières pour des arguments entiers non négatifs. Les nombres $G_n = G(n)$ sont connus comme les *nombres de Genocchi* (A226158).

Les *polynômes de Genocchi* sont définis ainsi

$$G_n(x) = 2^n \left(B_n \left(\frac{x}{2} \right) - B_n \left(\frac{x+1}{2} \right) \right). \quad (42)$$

Ils décrivent la différence entre les polynômes de Bernoulli et les polynômes centraux de Bernoulli, à un facteur d'échelle près. Les coefficients entiers de ces polynômes sont enregistrés dans la séquence A333303 de l'OEIS. La fonction de Genocchi est intimement liée à la fonction alternée de Bernoulli comme nous le verrons ultérieurement.

Dérivées de la fonction de Bernoulli



Les dérivées de la fonction de Bernoulli $B^{(n)}(s)$, $0 \leq n \leq 3$.

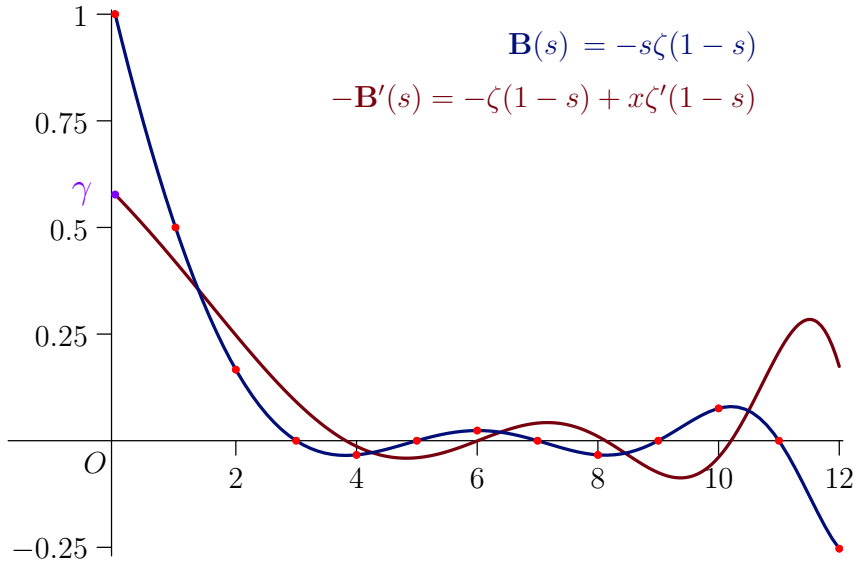
Les constantes de Bernoulli sont reliées aux dérivées de la fonction de Bernoulli. Avec la fonction zeta de Riemann, on a

$$B^{(n)}(s) = (-1)^n \left(n \zeta^{(n-1)}(1-s) - s \zeta^{(n)}(1-s) \right). \quad (43)$$

Ici $B^{(n)}(s)$ dénote la n -ième dérivée de la fonction de Bernoulli.

En prenant $\lim_{s \rightarrow 0}$ du côté droit de (43) nous obtenons

$$B^{(n)}(0) = \beta_n = -n \gamma_{n-1} \quad (n \geq 1). \quad (44)$$



Les nombres de Bernoulli sont les points rouges sur lesquels $-\mathbf{B}'(s)$ égale γ d'Euler.

La n -ième dérivée de la fonction ζ de Hurwitz relativement à s est

$$\zeta^{(n)}(s, v) = \frac{\partial^n}{\partial s^n} \zeta(s, v) \quad (45)$$

et la n -ième dérivée de la fonction généralisée de Bernoulli est

$$\mathbf{B}^{(n)}(s, v) = (-1)^n (n \zeta^{(n-1)}(1-s, v) - s \zeta^{(n)}(1-s, v)), \quad (46)$$

en utilisant la valeur limite si $s = 0$. En réécrivant (46), nous avons pour $n \geq 1$

$$\frac{\gamma_n(v)}{\Gamma(v)} = (-1)^n \lim_{s \rightarrow 0} (n \zeta^{(n-1)}(1-s, v) - s \zeta^{(n)}(1-s, v)). \quad (47)$$

En comparant cela avec la représentation des constantes de Stieltjes, nous voyons que $\gamma_n(1) = \gamma_n$ et que la relation (44) se généralise en

$$\mathbf{B}^{(n)}(0, n) = -n \gamma_{n-1}(n) \quad (n \geq 1). \quad (48)$$

La visualisation ci-dessus résume la plupart des choses qui ont été dites : elle montre la fonction de Bernoulli ainsi que les nombres de Bernoulli et l'inverse additive de la dérivée de la fonction de Bernoulli qui égale la fonction γ d'Euler à l'origine.

Des livres entiers [28] ont été écrits à propos de l'émergence de la fonction gamma d'Euler dans la théorie des nombres. L'identité $-\mathbf{B}'(0) = \gamma$ est l'un des beaux contextes dans lesquels elle se manifeste.

La dérivée logarithmique

La dérivée logarithmique d'une fonction F sera notée par

$$\mathcal{L}F(s) = \frac{F'(s)}{F(s)}.$$

En particulier, nous écrivons $\mathcal{L}B(s)$, $\mathcal{L}\zeta(s)$ et $\mathcal{L}\Gamma(s)$ pour la dérivée logarithmique de la fonction de Bernoulli, la fonction ζ et la fonction Γ (aussi connue sous le nom de fonction digamma notée ψ).

Nous utiliserons aussi la notation $\rho(s)$ pour la fonction

$$\rho(s) = \frac{1}{s} + \frac{\pi}{2} \cot(s) - \log(2\pi).$$

En termes de la fonction zeta, $\mathcal{L}B(s)$ peut aussi s'écrire

$$\mathcal{L}B(s) = \frac{1}{s} - \mathcal{L}\zeta(1-s). \quad (49)$$

Le cas $s = \frac{1}{2}$ est particulièrement intéressant. Il est bien connu que la vérité de la proposition

$$\mathcal{L}B\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \log \left| \frac{\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)} \right| \frac{dt}{t^2} \quad (50)$$

est équivalent à l'*hypothèse de Riemann* (voir [30, Th. 7.26]²)

Noter que $\mathcal{L}B\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \pi/4 - \gamma/2 - \log(8\pi)/2$, (cf. également A335263).

De (49), on peut inférer, par les relations bien connues (voir [30]),

$$\mathcal{L}B(s) = \mathcal{L}\Gamma(s) + \mathcal{L}\zeta(s) + \rho(s). \quad (51)$$

En exprimant la fonction ζ par un produit eulérien, on peut dériver de (51) et de la *fonction de von Mangoldt* Λ pour $\Re(s) > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \mathcal{L}\Gamma(s) - \mathcal{L}B(s) + \rho(s). \quad (52)$$

Cumulants de Bernoulli

Le développement en série $\mathcal{L}B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^{n-1}$ en $s = 0$ commence par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}B(s) &= \beta_1 + (\beta_2 - \beta_1^2) s + (\beta_3 - 3\beta_1\beta_2 + 2\beta_1^3) s^2/2 \\ &\quad + (\beta_4 - 3\beta_2^2 - 4\beta_1\beta_3 + 12\beta_1^2\beta_2 - 6\beta_1^4) s^3/6 + O(s^4). \end{aligned}$$

Les coefficients b_n sont donnés par

$$b_n = [s^n] \log \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{s^n}{n!} \right). \quad (53)$$

2. Dans cette référence, on trouve
L'*hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \log |\zeta_0(it)| \frac{dt}{t^2} = \frac{\pi}{8} + \frac{\gamma}{4} + \frac{1}{4} \log 8\pi - 2.$$

avec une référence à Hu, P.C., *An application of the Carleman formula, Hunan Annals of Mathematics (Chinese) 10 (1-2)(1990), 152-156.*

En d'autres termes, les coefficients sont les *polynômes logarithmiques* engendrés par les constantes de Bernoulli (Comtet [9], p. 140).

On peut appeler ces polynômes les *cumulants de Bernoulli*, à la suite d'une dénomination similaire par A. Voros [65, 3.16].

Les valeurs numériques apparaissant dans ce prolongement, listées dans un triangle irrégulier, sont A263634, en inversant les lignes :

[0]	1										
[1]	1,	-1									
[2]	1,	-3,	2								
[3]	1,	[-3,	-4],	12,	-6						
[4]	1,	[-10,	-5],	[30,	20],	-60,	24				
[5]	1,	[-10,	-15,	-6],	[30,	120,	30],	[-270,	-120],	360,	-120

Les nombres de Worpitzky

Les nombres dans le triangle ci-dessus sont des précisions (indiquées entre crochets) des *nombres de Worpitzky* signés $W(n, k)$ ([69], [64], A163626, A028246).

$$W(n, k) = (-1)^k k! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}. \quad (54)$$

Ici $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ dénote les nombres de l'ensemble de Stirling.

Des généralisations basées sur les différences centrales nulles de Joffe sont les séquences de l'OEIS A318259 et A318260.

La *transformation de Worpitzky* envoie une séquence a_0, a_1, a_2, \dots sur une séquence b_0, b_1, b_2, \dots ,

$$b_n = \sum_{k=0}^n W(n, k) a_k. \quad (55)$$

Si a a une fonction génératrice ordinaire $a(x)$, alors b a une fonction génératrice exponentielle $a(1 - e^x)e^x$. Merlini et al. [49] appellent cette transformation la transformation de Akiyama–Tanigawa; dans l'OEIS, le terme de transformation de Bernoulli–Stirling est utilisé.

Julius Worpitzky a prouvé en 1883 : si nous choisissons $a_k = \frac{1}{k+1}$ et appliquons la transformation (55), la séquence résultante donne les nombres de Bernoulli. Cette approche peut être généralisée.

La transformation de Worpitzky généralisée

La *transformation de Worpitzky généralisée* (56) envoie une séquence d'entiers a_0, a_1, a_2, \dots vers une séquence de polynômes $W_m(a)$, $m \geq 0$.

Plus formellement : $W : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{Z}[x]^{\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $W(a)$ est une séquence de polynômes, dont le m -ième terme est le polynôme $W_m(a)$.

$$W_m(a) = \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m}{n} x^{m-n} \sum_{k=0}^n W(n, k) a_k. \quad (56)$$

Ici la somme intérieure est la transformation de Worpitzky (55) de a . Fournissons quelques-uns des premiers polynômes :

$$\begin{aligned} & a_0 \\ & a_0 x - (a_0 - a_1) \\ & a_0 x^2 - 2(a_0 - a_1) x + (a_0 - 3a_1 + 2a_2) \\ & a_0 x^3 - 3(a_0 - a_1) x^2 + 3(a_0 - 3a_1 + 2a_2) x - (a_0 - 7a_1 + 12a_2 - 6a_3) \\ & a_0 x^4 - 4(a_0 - a_1) x^3 + 6(a_0 - 3a_1 + 2a_2) x^2 - 4(a_0 - 7a_1 + 12a_2 - 6a_3) x \\ & \qquad \qquad \qquad + (a_0 - 15a_1 + 50a_2 - 60a_3 + 24a_4) \end{aligned}$$

La définition (56) peut être réécrite en

$$W_m(a) = \sum_{n=0}^m a_n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x - k - 1)^m. \quad (57)$$

Comme la lectrice l'aura probablement anticipé, nous obtenons les polynômes de Bernoulli si nous posons $a_n = 1/(n+1)$. En évaluant en $x = 1$, nous arrivons à la représentation bien connue des nombres de Bernoulli :

$$B_m = (-1)^m \sum_{n=0}^m \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^m, \quad m \geq 0. \quad (58)$$

La représentation de Hasse

Entre en jeu Helmut Hasse [27] en 1930, qui réalise l'étape suivante dans le développement de la formule (58) et prouve le :

THÉORÈME : La série infinie

$$B(s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (k+v)^s \quad (59)$$

converge pour tout complexe s et représente la fonction entière $-s\zeta(1-s, v)$, la fonction de Bernoulli.

COROLLAIRE : Les constantes de Bernoulli $\beta_s(v)$ peuvent être obtenues par la série infinie

$$\beta_s(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln(k+v)^s. \quad (60)$$

Pour les démonstrations, voir [10], pour des variantes et des notes historiques concernant le théorème, voir [14].

La constante τ et la fonction $\tau(s)$

Comme prochain sujet, nous pourrions considérer l'équation fonctionnelle de la fonction de Bernoulli, qui généralise une formule d'Euler que Knuth et al. ([24], eq. 6.89) ont décrite comme *presque miraculeuse*.

Mais avant de faire cela, introduisons encore une autre fonction et citons une remarque de Terence Tao [63].

Il se peut que $2\pi i$ soit une constante encore plus fondamentale que 2π ou π . C'est, après tout, le générateur de $\log(1)$. Le fait que tant de formules faisant intervenir π^n dépendent de la parité de n est un autre indice de ce fait.

En prenant en compte cette remarque, nous utiliserons la notation $\tau = 2\pi i$ et la fonction

$$\tau(s) = \tau^{-s} + (-\tau)^{-s}. \quad (61)$$

Nous utilisons la branche principale du logarithme lorsque nous prenons les puissances de τ .

L'équation fonctionnelle

Cela nous permet d'écrire l'équation fonctionnelle de la fonction zeta de Riemann [56] comme le produit de trois fonctions,

$$\zeta(1-s) = \zeta(s) \tau(s) \Gamma(s) \quad (s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}). \quad (62)$$

En utilisant (62) et $B(s) = -s\zeta(1-s)$, nous obtenons la représentation

$$B(s) = -\zeta(s) \tau(s) s!. \quad (63)$$

À partir de $B(1-s) = (s-1)\zeta(s)$, nous obtenons une représentation auto-référente de la fonction de Bernoulli, qui est l'équation fonctionnelle

$$B(s) = \frac{B(1-s)}{1-s} \tau(s) s!. \quad (64)$$

Cette équation fonctionnelle a aussi une *variante symétrique*, qui signifie que le côté gauche de (65) est inchangé par la substitution $s \leftarrow 1-s$.

$$B(1-s) \left(\frac{s}{2}\right)! \pi^{-s/2} = B(s) \left(\frac{1-s}{2}\right)! \pi^{-(1-s)/2}. \quad (65)$$

Représentation de la fonction ξ de Riemann

Le côté droit (ou le côté gauche) de (65) s'avère être la *fonction ξ de Riemann*,

$$\xi(s) = \left(\frac{s}{2}\right)! \pi^{-s/2} (s-1)\zeta(s). \quad (66)$$

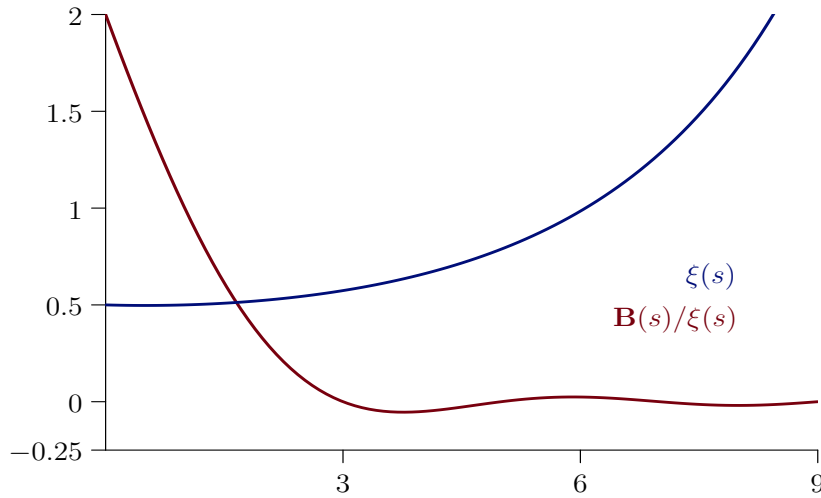
Pour une discussion au sujet de cette fonction, voir par exemple Edwards [15]. Notre notation suit Landau, car c'est la notation habituelle actuellement.

Ainsi nous obtenons une seconde représentation de la fonction de Bernoulli en fonction d'une fonction de Riemann :

$$B(s) = \frac{\pi^{(1-s)/2}}{((1-s)/2)!} \xi(s). \quad (67)$$

Par l'équation fonctionnelle de ξ , $\xi(s) = \xi(1-s)$, nous obtenons aussi

$$B(1-s) = \frac{\pi^{s/2}}{(s/2)!} \xi(s). \quad (68)$$



La décomposition de Hadamard de la fonction de Bernoulli.

C'est une bonne occasion de tester la valeur de $B(-1)$.

$$B(-1) = \pi \xi(-1) = \frac{\pi^2}{6} = \pi \xi(2). \quad (69)$$

Dans cette ligne d'égalités, les noms de Bernoulli, d'Euler (résolvant le problème de BÅle en 1734) et de Riemann se retrouvent.

La décomposition de Hadamard

Nous notons le produit infini de Hadamard sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ par

$$H_{\zeta}(s) = \frac{1}{2} \prod_{\Im(\rho) > 0} \left(\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \left(1 - \frac{s}{1-\rho}\right) \right). \quad (70)$$

Le produit est calculé sur les zéros tels que $\Im(\rho) > 0$. La convergence absolue du produit est garantie car les termes sont pris par paires $(\rho, 1-\rho)$. L'expansion du produit infini de Hadamard de $\zeta(s)$ est

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{(s/2)!} \frac{H_{\zeta}(s)}{s-1}, \quad s \notin \{1, -2, -4, \dots\}. \quad (71)$$

Appliquer la formule de Jensen (28) amène à la représentation

$$H_{\zeta}(s) = \frac{2(s/2)!}{\pi^{s/2-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} + ix)^{1-s}}{(e^{\pi x} + e^{-\pi x})^2} dx. \quad (72)$$

Puisque les zéros de $\zeta(s)$ et de $B(s)$ sont identiques dans la bande critique par (63), cette représentation amène directement au cas de Bernoulli. En écrivant $\sigma = (1 - s)/2$, nous obtenons

$$B(s) = \frac{\pi^{\sigma}}{\sigma!} H_{\zeta}(s), \quad s \notin \{3, 5, 7, \dots\}. \quad (73)$$

C'est la *décomposition de Hadamard de la fonction de Bernoulli*.

Les zéros de $B(s)$ avec $\Im(\rho) = 0$ sont en $3, 5, 7, \dots$ (faisant s'évanouir les nombres de Bernoulli en ces indices), cela étant dû au terme factorielle du dénominateur. Cette représentation sépare les zéros non triviaux sur la droite critique des zéros triviaux de l'axe réel. (Voir la visualisation ci-dessus et pour les nombres complexes s l'appendice).

Ici nous pouvons voir une autre raison pour laquelle $B_1 = \frac{1}{2}$. Le facteur oscillant a la valeur $\frac{\pi^0}{0!} = 1$ et le facteur de Hadamard a la valeur $H_{\zeta}(1) = -\zeta(0) \cdot 1$. La valeur de Bernoulli découle de $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

Si nous comparons les identités (67) et (73), nous obtenons comme corollaire que $\xi = H_{\zeta}$. C'est précisément la proposition que Hadamard a démontrée dans son article de 1893 [25].

La fonction alternée de Bernoulli

La *fonction alternée de Bernoulli* est définie comme

$$B^*(s) = B(s) (1 - 2^s). \quad (74)$$

Nous pouvons exprimer la fonction alternée de Bernoulli en fonction de la fonction zeta en utilisant l'identité (63) ainsi

$$B^*(s) = s! \zeta(s) \tau(s) (2^s - 1). \quad (75)$$

Les *nombres alternés de Bernoulli* sont les valeurs que prend la fonction alternée de Bernoulli aux entiers non négatifs,

$$B_n^* = B^*(n). \quad (76)$$

Comme les nombres de Bernoulli, les nombres alternés de Bernoulli sont des nombres rationnels. Réduits aux plus petits dénominateurs, ils ont comme dénominateur 2, $B_0^* = 0$ et $B_1^* = -\frac{1}{2}$. Dans la form $G_n = 2B_n^*$, on retrouve les nombres de Genocchi introduits ci-dessus comme les valeurs de la fonction de Genocchi sur les entiers non négatifs.

La *fonction zeta alternée de Riemann*, aussi connue sous le nom de *fonction eta de Dirichlet*, est définie comme

$$\zeta^*(s) = \zeta(s)(1 - 2^{1-s}), \quad (s \neq 1). \quad (77)$$

La fonction alternée de Bernoulli peut être représentée par la fonction zeta alternée comme la fonction de Bernoulli peut l'être par la fonction zeta :

$$B^*(s) = -s\zeta^*(1-s), \quad (s \neq 0). \quad (78)$$

Les polynômes alternés de Bernoulli

Pour un nombre réel positif x , on définit la *fonction zeta alternée de Hurwitz* comme

$$\zeta^*(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^s}, \quad \text{pour } \Re(s) > 0, \quad (79)$$

et pour les autres valeurs de s par prolongement analytique. Elle est liée à la fonction Zeta de Hurwitz par

$$\zeta^*(s, x) = 2^{-s} \left(\zeta \left(s, \frac{x}{2} \right) - \zeta \left(s, \frac{x+1}{2} \right) \right). \quad (80)$$

Les *polynômes rationnels alternés de Bernoulli* sont définis par

$$B_n^*(x) = -n\zeta^*(1-n, x). \quad (81)$$

Cette définition est en analogie avec notre introduction aux polynômes de Bernoulli (27). Les nombres alternés de Bernoulli sont selon (42) égaux à la moitié des nombres de Genocchi correspondants :

$$B_n^* = 2^{n-1} \left(B_n \left(\frac{1}{2} \right) - B_n(1) \right) = G_n/2.$$

Le lien avec la fonction d'Euler

Les polynômes d'Euler sont intimement liés aux polynômes de Bernoulli. Dans les encyclopédies des fonctions mathématiques, ils sont souvent traités à côté les uns des autres et on montre comment on peut exprimer les uns en fonction des autres.

Notre perspective est un peu différente. Nous rappelons que l'interpolation de séquences rationnelles est notre thème central. Pourtant, les deux cas diffèrent déjà concernant le fait que les nombres soient les valeurs des polynômes respectifs : dans le cas de Bernoulli, c'en sont, alors que ce n'en sont pas dans le cas d'Euler.

La fonction d'Euler généralisée est définie comme une version décalée de la fonction généralisée de Genocchi.

$$G(s, v) = 2^s \left(B\left(s, \frac{v}{2}\right) - B\left(s, \frac{v+1}{2}\right) \right), \quad (82)$$

$$E(s, v) = -\frac{G(s+1, v)}{s+1}. \quad (83)$$

Les *polynômes d'Euler* sont $E_n(x) = E(n, x)$ pour les entiers $n \geq 0$. La fonction d'Euler à un paramètre correspond au cas particulier où $v = 1$.

$$E(s) = E(s, 1). \quad (84)$$

Les nombres rationnels $E(n)$ pour les entiers $n \geq 0$ sont

$$1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{17}{8}, 0, \frac{31}{2}, 0, -\frac{691}{4}, 0, \frac{5461}{2}, \dots$$

Pourtant, ces nombres *n'héritent pas*, contrairement au cas des nombres de Bernoulli, de leur nom à cause de leur fonction de définition. Les *nombres d'Euler* sont les valeurs en les entiers de la fonction d'Euler généralisée (83) en $v = \frac{1}{2}$, mise à l'échelle avec une puissance de 2.

$$E^c(s) = 2^s E\left(s, \frac{1}{2}\right). \quad (85)$$

Ce sont les équivalents des nombres centraux de Bernoulli (37).

Rassemblons les deux cas particuliers les plus importants de la fonction d'Euler.

Pour les *polynômes d'Euler*, on a

$$E_n(x) = 2\zeta^*(-n, x) = -2 \frac{B_{n+1}^*(x)}{n+1} = -\frac{G_{n+1}(x)}{n+1}. \quad (86)$$

Comme cas particulier, on a $2B_n^* = -nE_{n-1}(1)$ pour $n \geq 1$.

Pour les *nombres d'Euler*, on a

$$E_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right) = -2^{n+1} \frac{B_{n+1}^*\left(\frac{1}{2}\right)}{n+1} = -2^n \frac{G_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)}{n+1}. \quad (87)$$

Les nombres de Bernoulli étendus

L'arbre généalogique des nombres d'Euler est subdivisé en trois branches : les *nombres sécants d'Euler*, les *nombres tangents d'Euler* et les *nombres d'André*. Les nombres d'André sont un mélange entre les nombres sécants et les nombres tangents, c'est à dire l'addition terme à terme des séquences

des nombres sécants et des nombres tangents.

La façon traditionnelle de les dénommer réserve habituellement les termes nombres d'Euler pour les nombres sécants d'Euler, alors que les spécialistes de combinatoire préfèrent utiliser la dénomination nombres d'Euler pour les nombres d'André non signés [59].

L'introduction des termes "nombres d'André" a été proposée en l'honneur de Désiré André qui a étudié l'interprétation combinatoire des permutations 2-alternées en 1879 [2] et qui en 1881 [3] a résolu cette ambiguïté.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
E_{tan}	0	1	0	-2	0	16	0	-272	0
E_{sec}	1	0	-1	0	5	0	-61	0	1385
A	1	1	-1	-2	5	16	-61	-272	1385

nombres d'Euler et d'André

Essayons d'appliquer la procédure de prolongement ci-dessus pour les nombres d'Euler vers les nombres de Bernoulli en quelque sorte. D'abord, nous appelons les nombres de Bernoulli d'indices pairs les *nombres tangents de Bernoulli* et ceux d'indice impair (provisoirement) les *nombres perdus de Bernoulli*.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$B_?$	1	?	1/6	?	-1/30	?	1/42	?	-1/30

Les nombres perdus de Bernoulli

La prochaine table montre ce que sera le résultat du choix que nous définirons dans la prochaine section.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B_{tan}	1	0	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$
B_{sec}	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{56}$	0	$\frac{25}{992}$	0	$-\frac{427}{16256}$	0
B	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{56}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{25}{992}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{427}{16256}$	$-\frac{1}{30}$

Les nombres de Bernoulli étendus

La fonction de Bernoulli étendue

La *fonction étendue de Bernoulli* est définie par

$$\mathcal{B}(s) = -s\tilde{\zeta}(1-s) \quad (88)$$

pour $s \neq 0$ et la valeur limite $\mathcal{B}(0) = 1 + \pi/\log(4)$, où

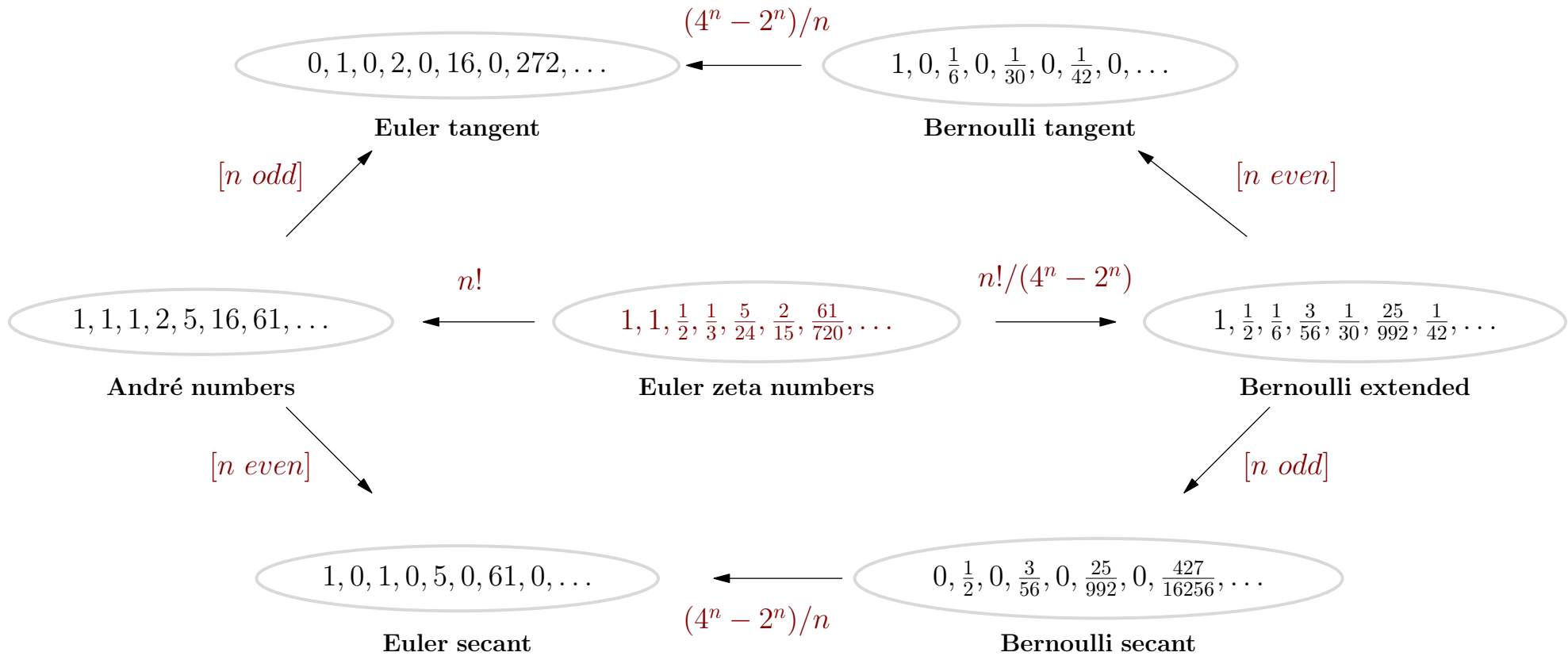
$$\tilde{\zeta}(s) = \zeta(s) + \frac{\zeta\left(s, \frac{1}{4}\right) - \zeta\left(s, \frac{3}{4}\right)}{2^s - 2}. \quad (89)$$

Une forme d'écriture alternative est (88)

$$\mathcal{B}(s) = B(s) + s \frac{2^{s-1}}{2^s - 1} \left(\zeta \left(1 - s, \frac{1}{4} \right) - \zeta \left(1 - s, \frac{3}{4} \right) \right). \quad (90)$$

Les *nombre étendus de Bernoulli* sont les valeurs de la fonction de Bernoulli étendue aux entiers positifs pour $n \geq 2$ et par convention $B_n = B(n)$ pour $n \in \{0, 1\}$ (voir la table ci-dessus).

La question perdue : pourquoi avons-nous choisi les nombres étendus de Bernoulli de cette façon-là ? La réponse est : à cause de leur relation aux nombres zeta d'Euler, que nous introduirons après. La figure ci-dessus indique la relation entre ces six séquences de nombres en montrant comment ils dérivent tous d'une septième séquence, les nombres zeta d'Euler.



La famille des nombres d'Euler-Bernoulli (version non signée)

La fonction d'Euler étendue

Les nombres de Bernoulli et les nombres d'Euler ont une colonne vertébrale commune : les *nombres zeta d'Euler* définis comme les valeurs prises pour les entiers positifs par la fonction

$$\mathcal{E}(s) = \frac{4^{s+1} - 2^{s+1}}{(s+1)!} \mathcal{B}(s+1). \quad (91)$$

172888; unde deducitur $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$
 $= \frac{1}{9450}$. Observandum autem est de his seriebus in po-
 tentiis exponentium imparium signa terminorum alter-
 nari, pro potestatibus paribus vero esse aequalia; hocque
 in causa est, quod huius generalis seriei $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n}$
 $+$ etc. iis tantum casibus summa possit exhiberi, quibus
 n est numerus par. Praeterea quoque notandum est, si
 seriei $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{24}, \frac{2}{15}, \frac{61}{720}, \frac{17}{315}, \frac{277}{8064}, \frac{62}{2835}$ etc. quos valores pro lit-
 teris P, Q, R, S etc. inuenimus, terminus generalis pos-
 set assignari, tum eo ipso quadraturam circuli exhibitum

L. Euler, De summis serierum reciprocarum, 1735.

Ces nombres, dans leur forme non signée, furent introduits par Leonhard Euler en 1735 dans *De summis serierum reciprocarum* [19]. Pour $n \geq 0$, ce sont les nombres

$$1, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{24}, \frac{2}{15}, -\frac{61}{720}, -\frac{17}{315}, \frac{277}{8064}, \frac{62}{2835}, \dots$$

La *fonction d'André* $\mathcal{A}(s)$ qui interpole les nombres d'André est

$$\mathcal{A}(s) = s! \mathcal{E}(s) \quad (92)$$

$$= (4^{s+1} - 2^{s+1}) \frac{\mathcal{B}(s+1)}{s+1} \quad (93)$$

$$= (2^{s+1} - 4^{s+1}) \tilde{\zeta}(-s). \quad (94)$$

Quand s est un entier positif, ces identités sont bien connues, mais elles sont moins connues dans leur forme générale fournie ici, comme identités entre des fonctions complexes.

Les fonctions étendues non signées

La *fonction non signée d'André* a comme représentation

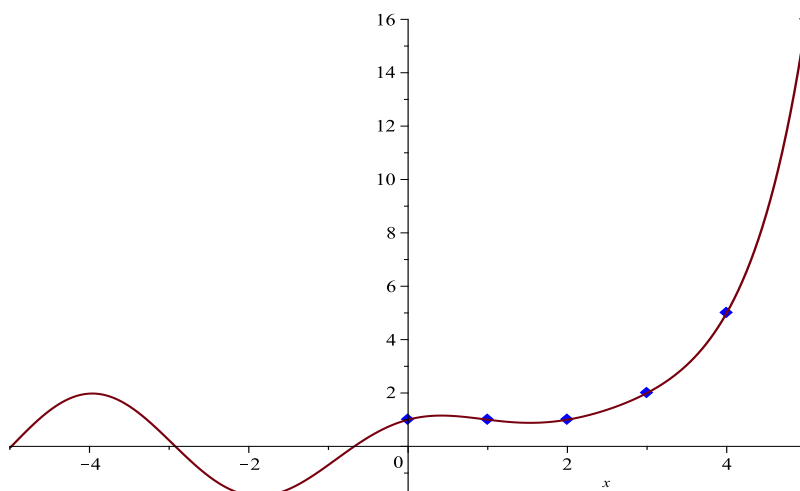
$$\mathcal{A}^*(s) = i(i^s \text{Li}_s(-i) - (-i)^s \text{Li}_s(i)) \quad (95)$$

où i est l'unité imaginaire, $\text{Li}_s(v)$ est le polylogarithme et où la branche principale du logarithme est utilisée pour les puissances.

Les *nombres non signés d'André* sont les valeurs en les entiers non négatifs, $\mathcal{A}_n^* = \mathcal{A}^*(n)$. Son homologue, la *fonction de Bernoulli étendue non signée*, est définie comme

$$\mathcal{B}^*(s) = \frac{s \mathcal{A}^*(s-1)}{4^s - 2^s} \quad (s \neq 0). \quad (96)$$

Pour $s = 0$, la fonction \mathcal{B}^* est complétée par la valeur limite qui, de façon surprenante, vaut -1 . Par conséquent, \mathcal{B}^* interpole les nombres non signés étendus de Bernoulli seulement pour $n \geq 1$.



La fonction non signée d'André \mathcal{A}^*

Les polynômes couteaux-suisse

La lectrice, épuisée d'étudier toutes ces fonctions hautement transcendentes, peut se demander si les nombreux nombres considérés ici sont aussi faciles à calculer. Heureusement, la réponse est "oui", et de façon surprenante, une seule méthode suffit.

$$\kappa_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(k+1)}{2^{\lfloor k/2 \rfloor}} \sum_{v=0}^k (-1)^v \binom{k}{v} (x+v+1)^n. \quad (97)$$

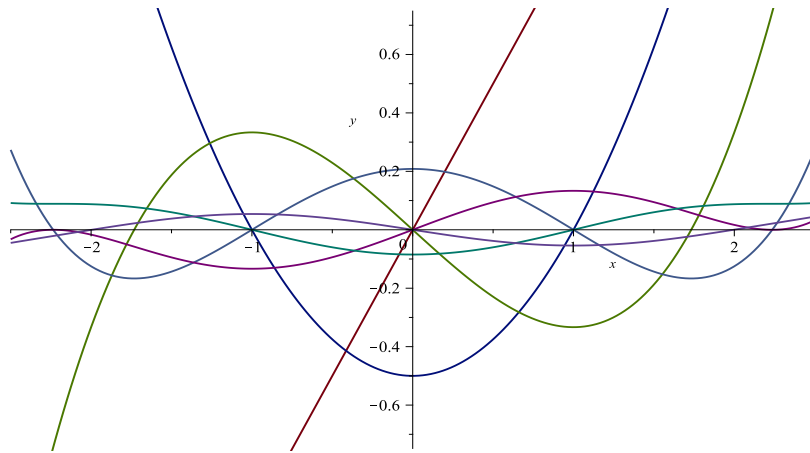
Ici α est la séquence répétitive $(0, 1, 1, 1, 0, -1, -1, -1)$. L'auteur a adoué les $\kappa_n(x)$ comme faisant partie de la classe des *polynômes couteaux-suisse* parce qu'ils permettent de calculer les familles de nombres d'Euler–Bernoulli très efficacement. Ils ont été introduits dans la séquence A153641 de l'OEIS et discutés dans [47].

Les coefficients de ces polynômes sont entiers, contrairement à ceux des polynômes d'Euler et de Bernoulli, qui sont des nombres rationnels. Les nombres d'Euler, de Bernoulli, de Genocchi, la fonction zeta d'Euler, les nombres tangents ainsi que les nombres d'André et les nombres de Springer sont des valeurs échelonnées de ces polynômes, voir la table ci-dessous.

Les polynômes montrent un beau comportement sinusoidal si on les met à l'échelle adéquate, ce qui peut être expliqué par l'analyse de Fourier de la fonction zeta généralisée.

$$\begin{aligned}
&1 \\
&x \\
&x^2 - 1 \\
&x^3 - 3x \\
&x^4 - 6x^2 + 5 \\
&x^5 - 10x^3 + 25x \\
&x^6 - 15x^4 + 75x^2 - 61 \\
&x^7 - 21x^5 + 175x^3 - 427x \\
&x^8 - 28x^6 + 350x^4 - 1708x^2 + 1385 \\
&x^9 - 36x^7 + 630x^5 - 5124x^3 + 12465x
\end{aligned}$$

TABLE 3 – Les polynômes couteaux-suissees $\kappa_n(x)$



Les polynômes couteaux-suissees $\kappa_n(x)/n!$

<i>zeta d'Euler pairs</i>	$\kappa_n(0) / n!$
<i>zeta d'Euler impairs</i>	$\kappa_n(1) / n!$
<i>zeta d'Euler</i>	$(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \kappa_n(n \bmod 2) / n!$
<i>sécante d'Euler</i>	$\kappa_n(0)$
<i>tangente d'Euler</i>	$\kappa_n(1)$
<i>prolongement d'Euler</i>	$(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \kappa_n(n \bmod 2)$
<i>tangente de Bernoulli</i>	$\kappa_{n-1}(1) n / (4^n - 2^n)$
<i>sécante de Bernoulli</i>	$\kappa_{n-1}(0) n / (4^n - 2^n)$
<i>prolongement de Bernoulli</i>	$\kappa_{n-1}((n-1) \bmod 2) n / (4^n - 2^n)$
<i>Genocchi</i>	$\kappa_n(-1)(n+1) / 2^n$
<i>Springer</i>	$\kappa_n(1/2) 2^n$

Quelques applications des polynômes couteaux-suissees

Comportement asymptotique de la fonction de Bernoulli

Le prolongement asymptotique de la fonction de Bernoulli résulte directement de

$$B(s) = -\zeta(s)\tau(s)s!$$

en utilisant la formule de Stirling et les nombres harmoniques généralisés.

Pour un *nombre pair positif* n , la fonction de Bernoulli a une approximation asymptotique efficace [44],

$$|B(n)| \sim 4\pi \left(\frac{n}{2\pi e}\right)^{n+1/2} \exp\left(\frac{1}{2} + \frac{n^{-1}}{12} - \frac{n^{-3}}{360} + \frac{n^{-5}}{1260}\right). \quad (98)$$

Ici, nous utilisons les coefficients du prolongement de Stirling pour $\log(\Gamma(s))$, voir A046969.

Le nombre de chiffres décimaux exacts garantis par cette formule est apparemment $3 \log(3n)$ si $n \geq 50$. Cette approximation est utilisée dans la librairie [7] de programmes C++ pour les arguments n très grands.

En général, pour $s > 0$, le prolongement asymptotique est

$$\begin{aligned} B(s) &\sim -4\pi \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \left(\frac{s}{2\pi e}\right)^{s+1/2} R(s), \\ R(s) &= \exp\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(n+1)}{n+1} \frac{s^{-n}}{n}\right). \end{aligned} \quad (99)$$

Si on utilise la convention consistant à dire que $\frac{s^{-0}}{0} = 1$, alors on peut commencer la somme en $n = 0$ et procéder sans le terme constant $\frac{1}{2}$.

D'autres prolongements asymptotiques peuvent être basés sur différents développements de la fonction Gamma, par exemple sur la formule de Binet [18, p. 48] généralisée par Gergő Nemes [52, 4.2]. Des prolongements asymptotiques plus généraux et des limitations sur les erreurs découlent de ceux de la fonction zeta de Hurwitz que Nemes a établis dans [53].

Épilogue : fonctions génératrices

La valeur de $B(1)$ mérite une attention particulière.

Puisqu'il est bien connu que $\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j/j! = 1/2$, il s'ensuit de (8) que $B(1) = 1/2$. Malheureusement la fonction génératrice bien connue $z/(e^z - 1)$ rate cette valeur et la connexion entre les nombres de Bernoulli et la fonction ζ s'interrompt à cet endroit précis.

Pour ceux qui sont indifférents à la connexion avec la fonction zeta, nous ajoutons : même les relations les plus élémentaires entre les nombres de Bernoulli et les polynômes de Bernoulli sont interrompues par ce choix. Par exemple, considérons l'identité de base (39). Elle s'applique à tous les nombres de Bernoulli si $B_n = B_n(1)$ mais pas si l'on pose $B_n = B_n(0)$.

Utilisons plutôt une série de puissances $f(z)$ avec terme constant 1 telle que le coefficient de x^n dans $(f(x))^{n+1}$ est égal à 1 pour tout n . Il n'y a qu'une seule série de puissances satisfaisant cette condition, comme l'observe Friedrich Hirzebruch [29]. Cette série est la *fonction de Todd* (appelée du nom de John Arthur Todd)

$$T(z) = \frac{z}{1 - e^{-z}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{z}{1!} + \frac{1}{6} \frac{z^2}{2!} - \frac{1}{30} \frac{z^4}{4!} + \dots \quad (100)$$

et générons les nombres de Bernoulli dont les valeurs coïncident avec la fonction de Bernoulli pour les entiers non négatifs.

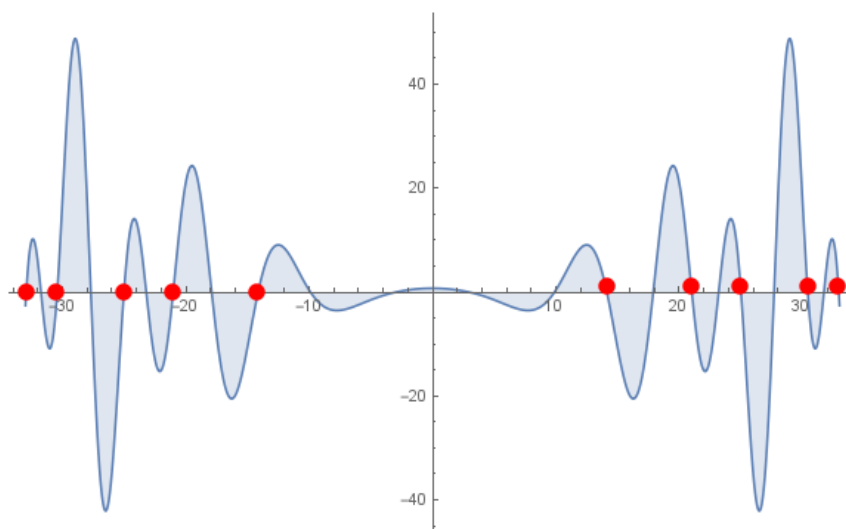
On trouve un exposé moderne basé sur la série de Todd dans la monographie [5]. Les auteurs adoptent cette définition “parce que c’est la définition originale de Seki et Bernoulli d’une part, et qu’elle est mieux adaptée pour les valeurs spéciales de la fonction zeta de Riemann d’autre part.” De façon similaire, J. Neukirch dans sa *Théorie algébrique des nombres* [54] écrit : La définition $f(z) = z/(1 - e^{-z})$ “est plus naturelle et mieux adaptée au développement ultérieur de la théorie.” On peut espérer que tous les mathématiciens utiliseront cette définition consistante un jour.



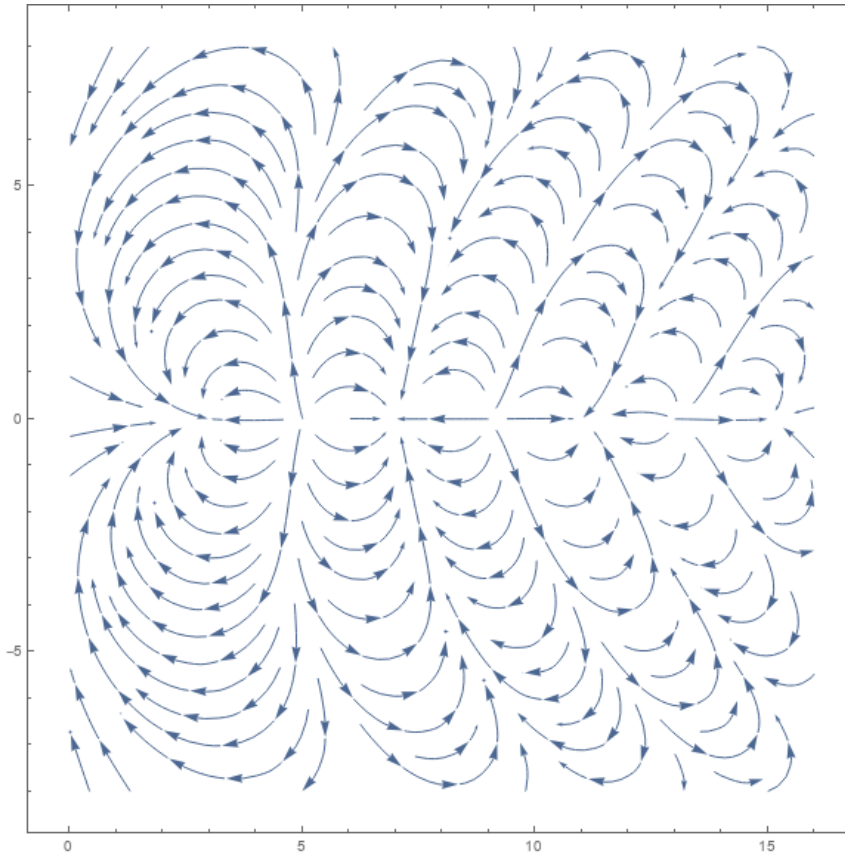
Une sympathique utilisation de “Don Quixote”, esquisse de Pablo Picasso.

Remerciements

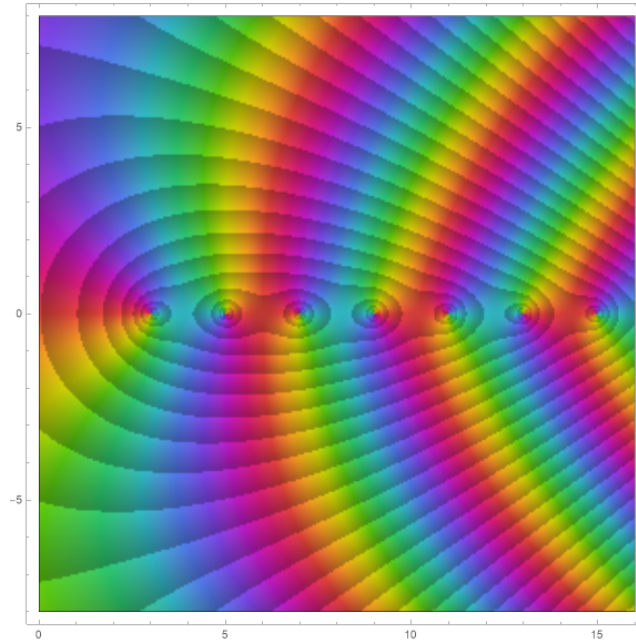
L’auteur remercie Jörg Arndt, Petros Hadjicostas, Václav Kotěšovec, Gergő Nemes et Michael Somos pour avoir lu et fourni un retour profitable sur une version précédente du manuscrit. Sans utiliser l’OEIS de Neil Sloane, cet essai aurait pu être écrit, mais l’écriture en aurait procuré deux fois moins de plaisir.



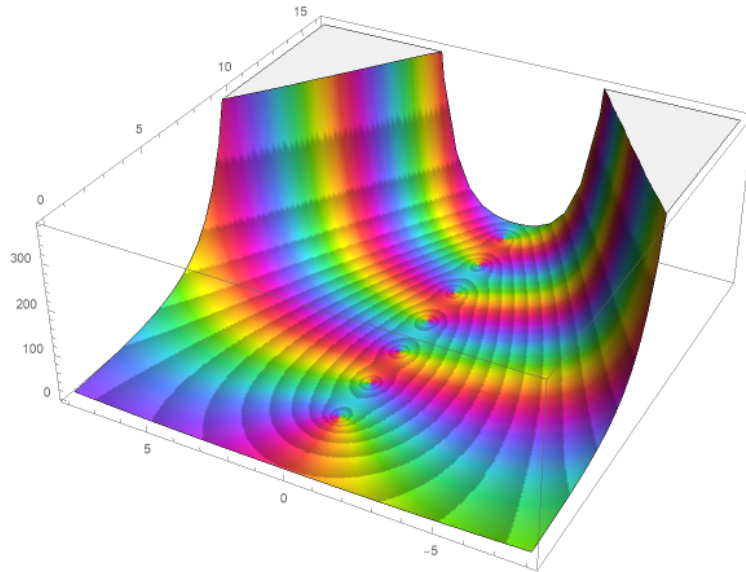
La fonction de Bernoulli et les zéros de la fonction zeta de Riemann sur la droite critique.



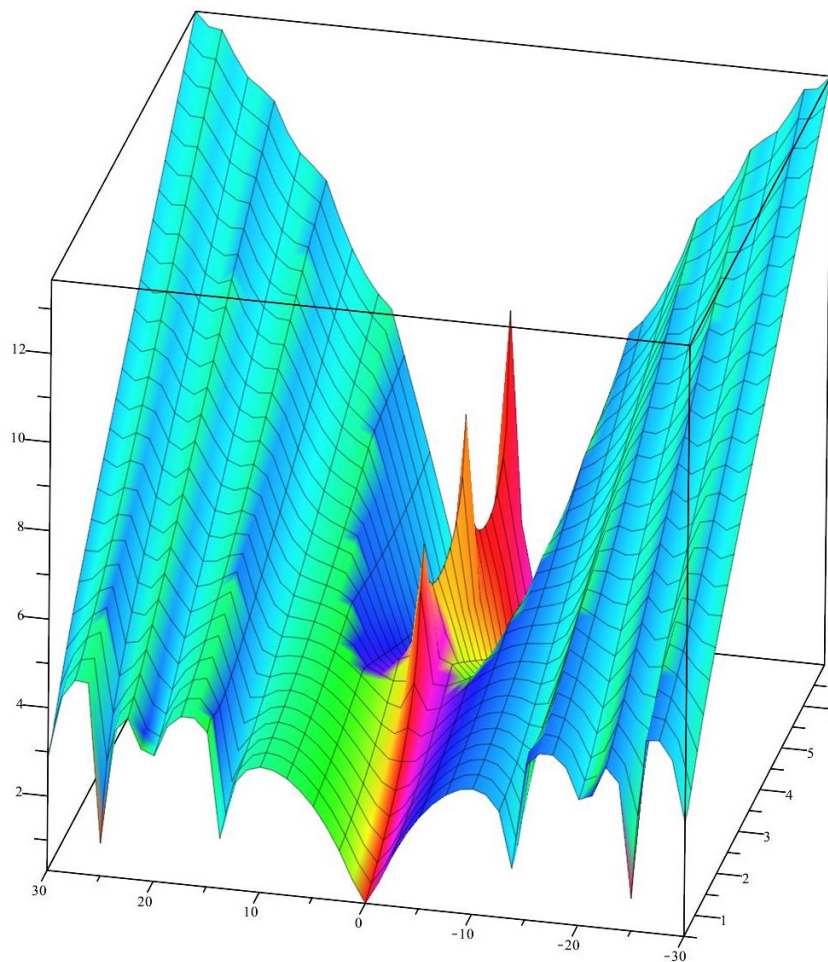
Représentation par portrait de phase de la fonction de Bernoulli sur la moitié droite du plan.



La fonction de Bernoulli sur le demi-plan droit, visualisation complexe.



La fonction de Bernoulli sur le demi-plan droit, visualisation en 3-dim.

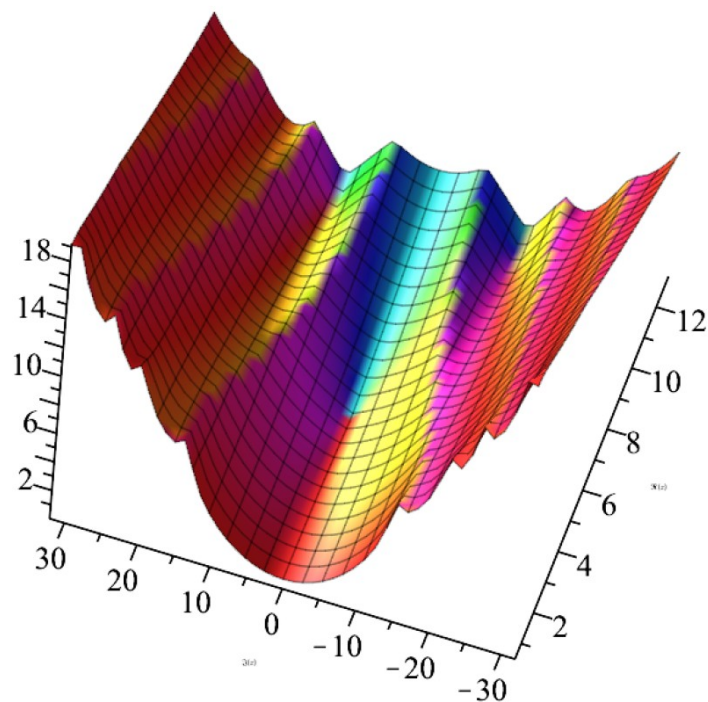


Logarithme de la fonction de Bernoulli sur le demi-plan droit.

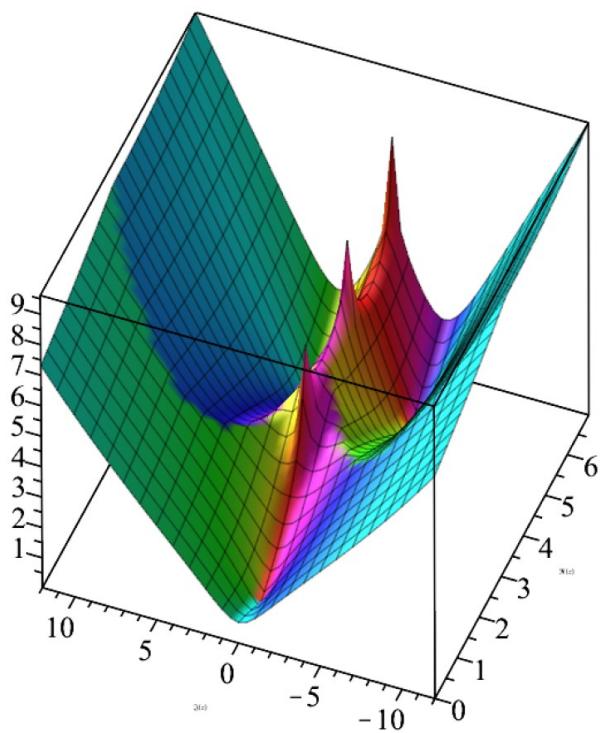
Les pics rouges sur l'axe des x correspondent aux zéros réels de la fonction de Bernoulli (l'évanouissement des nombres de Bernoulli impairs).

L'avant de la visualisation montre le logarithme de la fonction de Bernoulli sur la droite critique.

La décomposition de Hadamard de la fonction de Bernoulli est visualisée sur les deux graphiques ci-dessous.



La décomposition de Hadamard de $\log B$: le facteur ξ de Riemann.



La décomposition de Hadamard de $\log B$: le facteur de singularité.

TABLE 4 – Nombres non signés étendus de Bernoulli et nombres de zeta d’Euler

n	B_n^*	\mathcal{E}_n^*
0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	1
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{3}{56}$	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{24}$
5	$\frac{25}{992}$	$\frac{2}{15}$
6	$\frac{1}{42}$	$\frac{61}{720}$
7	$\frac{427}{16256}$	$\frac{17}{315}$
8	$\frac{1}{30}$	$\frac{277}{8064}$
9	$\frac{12465}{261632}$	$\frac{62}{2835}$
10	$\frac{5}{66}$	$\frac{50521}{3628800}$
11	$\frac{555731}{4192256}$	$\frac{1382}{155925}$
12	$\frac{691}{2730}$	$\frac{540553}{95800320}$
13	$\frac{35135945}{67100672}$	$\frac{21844}{6081075}$
14	$\frac{7}{6}$	$\frac{199360981}{87178291200}$
15	$\frac{2990414715}{1073709056}$	$\frac{929569}{638512875}$
16	$\frac{3617}{510}$	$\frac{3878302429}{4184557977600}$
17	$\frac{329655706465}{17179738112}$	$\frac{6404582}{10854718875}$
18	$\frac{43867}{798}$	$\frac{2404879675441}{6402373705728000}$
19	$\frac{45692713833379}{274877382656}$	$\frac{443861162}{1856156927625}$
20	$\frac{174611}{330}$	$\frac{14814847529501}{97316080327065600}$
21	$\frac{1111113564712575}{628292059136}$	$\frac{18888466084}{194896477400625}$
22	$\frac{854513}{138}$	$\frac{69348874393137901}{1124000727777607680000}$
23	$\frac{1595024111042171723}{70368735789056}$	$\frac{113927491862}{2900518163668125}$
24	$\frac{236364091}{2730}$	$\frac{238685140977801337}{9545360026665222144000}$
25	$\frac{387863354088927172625}{1125899873288192}$	$\frac{58870668456604}{3698160658676859375}$
26	$\frac{8553103}{6}$	$\frac{4087072509293123892361}{403291461126605635584000000}$
27	$\frac{110350957750914345093747}{18014398375264256}$	$\frac{8374643517010684}{1298054391195577640625}$
28	$\frac{23749461029}{870}$	$\frac{13181680435827682794403}{3209350995912777478963200000}$
29	$\frac{36315529600705266098580265}{288230375614840832}$	$\frac{689005380505609448}{263505041412702261046875}$
30	$\frac{8615841276005}{14322}$	$\frac{441543893249023104553682821}{265252859812191058636308480000000}$

Constantes de Bernoulli

[0]	+1.00000000000000000000e+00	+1.00000000000000000000e+00
[1]	-5.77215664901532860606512e-01	-5.77215664901532860606512e-01
[2]	+1.45631690967353449721173e-01	+7.28158454836767248605864e-02
[3]	+2.90710895786169554535912e-02	+4.84518159643615924226519e-03
[4]	-8.21533768121338346464019e-03	-3.42305736717224311026674e-04
[5]	-1.16268503273365002873409e-02	-9.68904193944708357278404e-05
[6]	-4.75994290380637621052001e-03	-6.61103181084218918127779e-06
[7]	+1.67138541801139726910695e-03	+3.31624090875277235933919e-07
[8]	+4.21831653646200836859278e-03	+1.04620945844791874221051e-07
[9]	+3.16911018422735558641847e-03	+8.73321810027379736116201e-09
[10]	+3.43947744180880481779146e-04	+9.47827778276235895555407e-11
[11]	-2.25866096399971274152095e-03	-5.65842192760870796637242e-11
[12]	-3.24221327452684232007482e-03	-6.76868986351369665586675e-12
[13]	-2.17454785736682251359552e-03	-3.49211593667203185445522e-13
[14]	+3.84493292452642224040106e-04	+4.41042474175775338023724e-15
[15]	+3.13813893088949918755710e-03	+2.39978622177099917550506e-15
[16]	+4.53549848512386314628695e-03	+2.16773122007268285496389e-16
[17]	+3.39484659125248617003234e-03	+9.54446607636696517342499e-18
[18]	-4.72986667978530060590399e-04	-7.38767666053863649781558e-20
[19]	-5.83999975483580370526234e-03	-4.80085078248806522761766e-20
[20]	-1.00721090609471125811119e-02	-4.13995673771330564126948e-21
[21]	-9.79321479174274843741249e-03	-1.91682015939912339496482e-22
[22]	-2.29763093463200254783750e-03	-2.04415431222621660772759e-24
[23]	+1.24567903906919471380695e-02	+4.81849850110735344392922e-25
[24]	+2.98550901697978987031938e-02	+4.81185705151256647946111e-26
[25]	+3.97127819725890390476549e-02	+2.56026331031881493660913e-27
[26]	+2.79393907712007094428316e-02	+6.92784089530466712388013e-29
[27]	-1.77336950032031696506289e-02	-1.62860755048558674407104e-30
[28]	-9.73794335813190698522061e-02	-3.19393756115325557604211e-31
[29]	-1.85601987419318254285110e-01	-2.09915158936342552768549e-32
[30]	-2.21134553114167174032372e-01	-8.33674529544144047562508e-34
[31]	-1.10289594522767989385320e-01	-1.34125937721921866750473e-35
[32]	+2.40426431930087325860325e-01	+9.13714389129817199794565e-37
[33]	+8.48223060577873259185100e-01	+9.76842144689316562821221e-38
[34]	+1.53362895967472747676942e+00	+5.19464288745573322360277e-39
[35]	+1.78944248075279625487765e+00	+1.73174959516100441594633e-40
[36]	+7.33429569739007257407068e-01	+1.97162023326628724184554e-42
[37]	-2.68183987622201934815062e+00	-1.94848008275558832944550e-43
[38]	-8.96900252642345710339731e+00	-1.71484028164349789185891e-44
[39]	-1.67295744090075569567376e+01	-8.20162325795024844398325e-46
[40]	-2.07168737077169487591557e+01	-2.53909617003982347034561e-47
[41]	-1.01975839351792340684642e+01	-3.04837480681247325379474e-49
[42]	+3.02221435698546147289327e+01	+2.15103288078139524274228e-50
[43]	+1.13468181875436585038896e+02	+1.87813767783170614584043e-51
[44]	+2.31656933743621048467685e+02	+8.71456987091534575015368e-53
[45]	+3.23493565027658727705394e+02	+2.70429325494165277375631e-54
[46]	+2.33327851136153134645751e+02	+4.24030297482975157602467e-56
[47]	-3.10666033627557393250479e+02	-1.20123014394335413203436e-57
[48]	-1.63390919914361991588774e+03	-1.31619164554817482023699e-58
[49]	-3.85544150839888666284589e+03	-6.33824832920169119558284e-60
[50]	-6.29221938159892345466820e+03	-2.06884990450560309799972e-61

$$\begin{aligned}
z \zeta(1+z) = & 1 + 0,57\ 72\ 15\ 66\ 49\ 02\ z \\
& + 0,07\ 28\ 15\ 84\ 54\ 84\ z^2 \\
& - 0,00\ 48\ 45\ 18\ 16\ \dots\ z^3 \\
& - 0,00\ 03\ 42\ 30\ 57\ \dots\ z^4 \\
& + 0,00\ 00\ 96\ 89\ \dots\ \dots\ z^5 \\
& - 0,00\ 00\ 06\ 61\ 10\ 3.\ z^6 \\
& - 0,00\ 00\ 00\ 33\ 16\ 24\ z^7 \\
& + 0,00\ 00\ 00\ 10\ 46\ 2.\ z^8 \\
& - 0,00\ 00\ 00\ 00\ 87\ 3.\ z^9 \\
& + \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

J.-L.-W.-V. JENSEN (Copenhagen).

J. Jensen calculant la fonction de Bernoulli $B(-z)$ en 1895.

Cumulants de Bernoulli

[0]	5.77215664901532860606512e-01	5.77215664901532860606512e-01
[1]	1.87546232840365224597203e-01	1.87546232840365224597203e-01
[2]	1.03377264066385787604016e-01	5.16886320331928938020082e-02
[3]	8.85099529527224643874814e-02	1.47516588254537440645802e-02
[4]	1.08587469323889089789907e-01	4.52447788849537874124612e-03
[5]	1.73615424543021976826038e-01	1.44679520452518314021698e-03
[6]	3.39511736293491636244455e-01	4.71544078185405050339520e-04
[7]	7.82108682587720478889760e-01	1.55180294164230253747968e-04
[8]	2.07023895260357186095142e+00	5.13452121181441433767714e-05
[9]	6.18396764525550941770221e+00	1.70413570471106410320277e-05
[10]	2.05609655822716770310295e+01	5.66605092104047537230752e-06
[11]	7.52770418698025254867191e+01	1.88584861185772720976429e-06
[12]	3.00839552402986587830834e+02	6.28055422785616139551170e-07
[13]	1.30294506447394086233815e+03	2.09240519073573812751380e-07
[14]	6.07848047275118529922938e+03	6.97247031236967546712980e-08
[15]	3.03866350907681039525268e+04	2.32371573798165201572008e-08
[16]	1.62043648652105132185893e+05	7.74483945590082160394406e-09
[17]	9.18184885317620501162217e+05	2.58143755665663419434431e-09
[18]	5.50888477406867075105888e+06	8.60444114522719419372965e-10
[19]	3.48887511550119854518536e+07	2.86807697455596821291504e-10
[20]	2.32588267070109667252423e+08	9.56011653113908225323882e-11
[21]	1.62810356589926860813867e+09	3.18667751404435348670453e-11
[22]	1.19393632362359042013562e+10	1.06222024071484413115002e-11
[23]	9.15348288139870681527169e+10	3.54072294392050811222228e-12
[24]	7.32277241973702388310021e+11	1.18023874334765961275615e-12
[25]	6.10230340797500863040914e+12	3.93412466914448230705943e-13
[26]	5.28865934416774000146351e+13	1.31137399472672361405551e-13
[27]	4.75979146079582837193300e+14	4.37124485922912446959546e-14
[28]	4.44247093871183417895415e+15	1.45708126178764844543513e-14
[29]	4.29438794111778364421710e+16	4.85693682340507565625935e-15
[30]	4.29438756134456760579530e+17	1.61897879796099259670507e-15

Références

- [1] *T. M. Apostol*, Zeta and related functions, chapitre 25 de la Digital Library of Mathematical Functions (DLMF), mise-à-jour 1.0.18 du 27.03.2018, <https://dlmf.nist.gov/25.11>.
- [2] *D. André*, Développement de $\sec x$ and $\tan x$, C. R. Math. Acad. Sci. Paris (88), 965–979, (1879).
- [3] *D. André*, Mémoire sur les permutations alternées, J. Math. pur. appl. (7), 167–184, (1881).
- [4] *T. M. Apostol*, Introduction to analytic number theory, Springer, 1976.
- [5] *T. Arakawa, T. Ibukiyama, M. Kaneko*, Bernoulli numbers and zeta functions, Springer, 2014.
- [6] *R. Ayoub*, Euler and the zeta function, Amer. Math. Monthly, 81 No.10, 1067–1086, (1974).
- [7] *Boost C++ libraries*, Version 1.73.0, April 2020, https://www.boost.org/doc/libs/1_73_0/libs/math/doc/html/math_toolkit/number_series/bernoulli_numbers.html.
- [8] *K. Chakraborty, S. Kanemitsu and H. Tsukada*, Vistas of Special Functions II, World Scientific Publishing, 2009.
- [9] *L. Comtet*, Advanced Combinatorics, Reidel Publishing, 1974.
- [10] *D. F. Connon*, Some series and integrals involving the Riemann zeta function, binomial coefficients and the harmonic numbers. Volume II(b), arXiv :0710.4024v2 [math.HO], (2007).
- [11] *D. Cvijović*, A note on convexity properties of functions related to the Hurwitz zeta and alternating Hurwitz zeta function, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 487(1), (2020).
- [12] *I. V. Blagouchine*, A theorem for the closed-form evaluation of the first generalized Stieltjes constant at rational arguments and some related summations, Journal of Number Theory, vol. 148, p. 537–592 et vol. 151, p. 276-277, (2015).
- [13] *I. V. Blagouchine*, Expansions of generalized Euler’s constants into the series of polynomials in π^{-2} and into the formal enveloping series with rational coefficients only, Journal of Number Theory, vol. 158, p. 365–396, (2016).
- [14] *I. V. Blagouchine*, Three Notes on Ser’s and Hasse’s Representations for the Zeta-Functions, Integers, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, vol. 18A, article #A3, p. 1–45, (2018).
- [15] *H. M. Edwards*, Riemann’s Zeta Function, Academic Press, 1974.
- [16] *N. Elezovic*, Asymptotic Expansions of Central Binomial Coefficients and Catalan Numbers, J. Int. Seq. 17 (2014).
- [17] *N. D. Elkies*, On the sums $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (4k+1)^{-n}$, Amer. Math. Monthly (110), 561–573, (2003).
- [18] *A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. Tricomi*, Higher Transcendental Functions, Vol. I, New York, 1953.
- [19] *L. Euler*, On the sums of series of reciprocals, §13, p.5. <https://arXiv.org/abs/math.HO/0506415/>
- [20] *L. Euler*, De summis serierum reciprocarum, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7 (1740), 12–134, [E41]. <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/41/>
- [21] *L. Euler*, Institutiones calculi differentialis, St. Petersburg Academy of Sciences, 1755. Reprinted in the Opera Omnia, Series 1, vol 10, [E212]. <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/212/>
- [22] *L. Euler*, De summis serierum numeros Bernoullianos involventium, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Volume 14, p. 129-167, 1768/1770. Reimprimé dans Opera Omnia, Série 1 vol 15, p. 91-130, [E393].
- [23] *J. Franel*, Note no. 245, L’Intermédiaire des mathématiciens, tome II, p. 153–154, (1895).
- [24] *R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik*, Concrete Mathematics : A Foundation for Computer Science, Addison-Wesley, 1989.

- [25] *J. Hadamard*, Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d’une fonction considérée par Riemann, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (58), 171–216, (1893).
- [26] *P. Hadjicostas*, communication personnelle.
- [27] *H. Hasse*, Ein Summierungsverfahren für die Riemannsche ζ -Reihe, *Math. Z.* (32), p. 458–464, (1930)
- [28] *J. Havil*, *Gamma, Exploring Euler’s Constant*, Princeton University Press, (2017).
- [29] *F. Hirzebruch*, The signature theorem : Reminiscences and recreation, In : *Prospects in mathematics. Annals of mathematics studies*, (70), p. 3–31, (1971).
- [30] *P. C. Hu, C. C. Yang*, *Value Distribution Theory Related to Number Theory*, Birkhäuser, (2006).
- [31] *A. Hurwitz*, Einige Eigenschaften der Dirichlet’schen Functionen $F(s) = \sum(D/n) \cdot 1/n^s$, die bei der Bestimmung der Classenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten, *Zeitschr. Math. Phys.* 27, 86–101, (1882).
- [32] *J. L. W. V. Jensen*, Remarques relatives aux réponses de MM. Franel et Kluyver. *L’Intermédiaire des mathématiciens*, tome II, Gauthier-Villars et Fils, p. 346–347, (1895).
- [33] *F. Johansson*, Rigorous high-precision computation of the Hurwitz zeta function and its derivatives, *Numer Algor* 69, 253-270 (2015).
- [34] *F. Johansson and I. V. Blagouchine*, Computing Stieltjes constants using complex integration, *Mathematics of Computation*, 88 :318 (2019), 1829-1850
- [35] *B. C. Kellner, J. Sondow*, The denominators of power sums of arithmetic progressions, arXiv :1705.05331, 2017; *Integers* 18, Article A95, (2018).
- [36] *W. Lang*, On Sums of Powers of Arithmetic Progressions, and Generalized Stirling, Eulerian and Bernoulli numbers, arXiv :1707.04451, (2017).
- [37] *J. C. Lagarias*, Euler’s constant : Euler’s work and modern developments, arXiv :1303.1856, (2013).
- [38] *D. H. Lehmer*, A new approach to Bernoulli polynomials, *The American Mathematical Monthly* 95.10, 905–911, (1988).
- [39] *E. Lindelöf*, *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1905.
- [40] *LMFDB*, The L-functions and Modular Forms Database, <https://beta.lmfdb.org/riemann/stieltjes/>.
- [41] *P. Luschny*, The Bernoulli Manifesto, online since 2013, <http://luschny.de/math/zeta/The-Bernoulli-Manifesto.html>.
- [42] *P. Luschny*, Generalized Bernoulli Numbers, (2013), http://oeis.org/wiki/User:Peter_Luschny/GeneralizedBernoulliNumbers.
- [43] *P. Luschny*, A sequence transformation and the Bernoulli numbers, (2010), https://oeis.org/wiki/User:Peter_Luschny/SeqTransformation.
- [44] *P. Luschny*, Computation and asymptotics of Bernoulli numbers, (2012), http://oeis.org/wiki/User:Peter_Luschny/ComputationAndAsymptoticsOfBernoulliNumbers.
- [45] *P. Luschny*, Eulerian polynomials, <http://www.luschny.de/math/euler/EulerianPolynomials.html>.
- [46] *P. Luschny*, Supplements for “Introduction to the Bernoulli Function”, (2020), <https://github.com/PeterLuschny/BernoulliFunction>.
- [47] *P. Luschny*, The Swiss-Knife polynomials and Euler numbers, (2010), https://oeis.org/wiki/User:Peter_Luschny/SwissKnifePolynomials.

- [48] *P. Luschny*, The lost Bernoulli numbers, (2011), https://oeis.org/wiki/User:Peter_Luschny/TheLostBernoulliNumbers.
- [49] *D. Merlini, R. Sprugnoli, M. C. Verri*, The Akiyama-Tanigawa transformation, *Integers* (5/A05), (2005).
- [50] *B. Mazur*, Bernoulli numbers and the unity of mathematics, manuscript, <http://people.math.harvard.edu/~mazur/papers/slides.Bartlett.pdf>.
- [51] *J. Musser*, Higher derivatives of the Hurwitz zeta function, Masters Theses and Specialist Projects, (2011), <http://digitalcommons.wku.edu/theses/1093>.
- [52] *G. Nemes*, Generalization of Binet's Gamma function formulas, *Integral Transforms and Special Functions*, 24 :8, 597–606, (2013).
- [53] *G. Nemes*, Error bounds for the asymptotic expansion of the Hurwitz zeta function, *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 473, (2017).
- [54] *J. Neukirch*, *Algebraic Number Theory*, Springer, 1999.
- [55] *J. L. Raabe*, Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jacob-Bernoullische Function, *J. Reine Angew. Math.* (42), 348–367, (1851).
- [56] *B. Riemann*, On the number of primes less than a given magnitude, (1859), <http://luschny.de/math/zeta/OnTheNumberOfPrimesLessThanAGivenMagnitude.html>.
- [57] *C. Sandifer*, Some Facets of Euler's Work on Series. *Studies in the History and Philosophy of Mathematics* (5), (2007). Also in : *Leonhard Euler : Life, Work and Legacy*, R. E. Bradley and E. Sandifer (Ed.), Elsevier, 2007.
- [58] *N. J. A. Sloane* et al., The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <https://oeis.org>.
- [59] *R. P. Stanley*, A survey of alternating permutations, *Contemp. Math.* (531), p. 165–196, (2010).
- [60] *J. Stopple (Q), H. Cohen (A), F. Johansson (A)*, On a certain integral representation for Hurwitz zeta functions, (2018), <https://mathoverflow.net/questions/304965/on-a-certain-integral-representation-for-hurwitz-zeta-functions>.
- [61] *H. M. Srivastava, J. Choi*, *Series Associated with the Zeta and Related Functions*, Springer, 2001
- [62] *T. Tao*, The Euler-Maclaurin formula, Bernoulli numbers, the zeta function, and real-variable analytic continuation, (2010), <https://terrytao.wordpress.com/2010/04/10/the-euler-maclaurin-formula-bernoulli-numbers-the-zeta-function-and-real-variable-analytic>
- [63] *T. Tao*, Comment on τ . <https://blog.computationalcomplexity.org/2007/08/is-pi-defined-in-best-way.html>.
- [64] *S. Vandervelde*, The Worpitzky Numbers Revisited, *The American Mathematical Monthly*, 125 :3, p. 198–206, (2018).
- [65] *A. Voros*, Zeta Functions over Zeros of Zeta Functions, *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana* Vol. 8, 2010.
- [66] *A. Weil*, *Number theory : an approach through history. From Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, 1983.
- [67] *H. S. Wilf*, *generatingfunctionology*, Academic Press, 1990.
- [68] *S. C. Woon*, Analytic continuation of Bernoulli numbers, a new formula for the Riemann zeta function, and the phenomenon of scattering of zeros. Preprint DAMTP-R-97/19, arXiv :physics/9705021.
- [69] *J. Worpitzky*, Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (94), p. 203–232, (1883).