Traduction d'un article "classique" de John Milnor (Denise Vella-Chemla, 16.11.2020)

Valeurs propres de l'opérateur de Laplace sur certaines variétés

J. Milnor
Université de Princeton
Communiqué le 6 février 1964

À chaque variété Riemannienne compacte correspond une séquence $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ de valeurs propres pour l'opérateur de Laplace sur M. On ne sait pas combien d'information au sujet de M peut être extraite de cette séquence [1]. Cette note montrera que la séquence ne caractérise pas M complètement, en exhibant deux tores de dimension 16 qui sont distincts en tant que variétés mais ont la même séquence de valeurs propres.

Par *tore plat*, on entend une variété Riemannienne quotient de la forme R^n/L, où L est un réseau (= un sous-groupe additif discret) de rang n. Appelons L^* le réseau dual, consistant en tous les $y \in L^*$ tels que $x.y$ est un entier pour tout $x \in L$. Alors chaque $y \in L^*$ détermine une fonction propre $f(x) = exp(2\pi i x.y)$ pour l'opérateur de Laplace sur R^n/L. La valeur propre correspondante λ est égale à $(2\pi)^2 y.y$. Par conséquent, le nombre de valeurs propres inférieures ou égales à $(2\pi r)^2$ est égal au nombre de points de L^* appartenant à une sphère de rayon r autour de l'origine.

Selon Witt [2], il existe deux réseaux self-duaux $L_1, L_2 \subset R^{16}$ qui sont distincts, au sens où aucune rotation de R^{16} n'amène L_1 sur L_2, de telle manière que toute sphère autour de l'origine contient exactement autant de points de L_1 que de L_2. Il s'ensuit de cela que les variétés Riemanniennes R^{16}/L_1 et R^{16}/L_2, ne sont pas isométriques, mais ont la même séquence de valeurs propres.

Pour tenter de distinguer R^{16}/L_1 de R^{16}/L_2, on peut considérer les valeurs propres de l'opérateur de Hodge-Laplace $\Delta = d\delta + \delta d$, appliqué à l'espace des p-formes différentielles. Pourtant, les deux variétés sont plates et parallélisables, de telle sorte que l'identité

$$\Delta(f\ dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = (\Delta f) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

montre qu'on obtient simplement les anciennes valeurs propres, chacune étant répétée $\binom{16}{p}$ fois.

1. Compare Avakumović, V., "Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten", *Math. Zeits.* **65**, 327-344 (1956).
2. Witt, E., "Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **14**, 323-337 (1941). Voir p. 324. Je remercie K. Ramanathan pour avoir fourni cette référence.