Traduction d'un article de G. Polya (Denise Vella-Chemla, décembre 2020)

Sur les valeurs propres de membranes vibrantes

G. Pólya

15 juin 1960

(in memoriam Hermann Weyl)

1. Notations

Dénotons par D un domaine plan simplement connecté délimité et C sa courbe frontière. Nous considérons deux problèmes classique de valeurs aux bornes :

(1.1) $$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ dans } D \ (u = 0 \text{ sur } C),$$

(1.2) $$\Delta u + \mu u = 0 \text{ dans } D \ (\tfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } C)\,;$$

Δ est l'opérateur de Laplace, n la normale à C, (1) est le problème de la membrane vibrante ; nous pourrions appeler (2) le problème de la membrane vibrante libre. Dénotons par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ les valeurs propres de (1), $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ les valeurs propres de (2), en ordre croissant de telle façon que

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \ldots,$$
$$0 = \mu_1 < \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \mu_4 \leqslant \ldots.$$

Nous dirons que D est un *domaine couvrant le plan* si une infinité de domaines congruents à D (nous admettons la congruence par symétrie) couvrent la totalité du plan sans trous ni chevauchements, c'est-à-dire complètement et sans points intérieurs. Tout triangle est un domaine couvrant le plan, il en est de même de tout quadrilatère, ainsi que de tout hexagone ayant un centre de symétrie. On peut apporter des décorations (variations) de différentes sortes à une forme originale dont dépendra la façon dont ce domaine couvre le plan [1].

2. Objectif

Dénotons par A l'aire de D. Je vais démontrer le théorème :

Si D est un domaine couvrant le plan,

(2.1) $$\lambda_k \geqslant 4\pi k A^{-1}$$

et si D recouvre le plan régulièrement,

(2.2) $$\mu_k \leqslant 4\pi(k-1)A^{-1}\,;$$

toutes les inégalités sont vérifiées avec $k = 1, 2, 3, \ldots$

Reportons à plus tard la définition de l'expression "recouvrant régulièrement le plan" (voir § 4). Il suffit d'observer que la preuve de (2.2) nécessite une hypothèse plus stricte que celle de (2.1).

---

référence de l'article : Proc. London Math. Soc. (3) 11 (1961), 419-33.
Recherche financée par l'Office de la Recherche navale.

1. Voir, par exemple, (7), vol. 1, p. 89.

Que le côté gauche de l'équation (2.1) soit, pour k grand, asymptotiquement égal au côté droit pour tout domaine, et que la même chose soit vraie des deux côtés de l'équation (2.2) est un résultat classique dû à H. Weyl.[2] Le théorème de Weyl traite le cas $k \to \infty$ et donc il ne fournit pas d'information définie sur des petites valeurs données de k, comme $k = 1$ ou $k = 2$, tandis que les inégalités (2.1) et (2.2) fournissent une telle information.

Les preuves de (2.1) et (2.2) qui seront données dans la suite font un usage essentiel de la supposition selon laquelle le domaine considéré couvre le plan. Cette supposition peut parfois être artificielle et il est possible, même alors, que (2.1) et (2.2) soient valides pour un domaine arbitraire[3].

Les choses sont telles à présent que les inégalités (2.1) et (2.2) traitent des domaines particuliers (ceux couvrant le plan) et elles fournissent des estimations de leurs valeurs propres λ_k, et μ_k, qui ne semblent pas faciles à obtenir par d'autres moyens. Si nous considérons des domaines encore plus particuliers (les domaines couvrant une bande ou les quasi-trapézoïdes), nous pouvons obtenir des estimations plus précises ; voir § 6, 7, et 8. La dernière section contient des remarques supplémentaires[4].

3. Preuve pour la membrane

En plus de D, nous considèrerons d'autres domaines $D', D'', D^{(i)}, \ldots$. De la même façon que les λ_k, μ_k, A sont liés à D, les λ'_k, μ'_k, A' sont liés à D', les $\lambda''_k, \mu''_k, A''$ sont liés à D'', les $\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, A^{(i)}$ à $D^{(i)}$, et etc.

Si le domaine D' contient n sous-domaines congruents ne se chevauchant pas avec D'', j'écrirai $D' \supset nD''$; si ces n sous-domaines couvrent conjointement D', c'est-à-dire le couvrent sans trous, j'écrirai $D' = nD''$.

Lemme 1. *Si $D' \supset nD''$ alors $\lambda'_{kn} \leqslant \lambda''_k$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$.*

On liste, sur une première ligne, les λ-valeurs propres rangées dans l'ordre croissant des n sous-domaines ne se chevauchant pas de D' qui sont congruents avec D'' ; chaque valeur propre apparaît autant de fois qu'il y a de sous-domaines auxquels elle appartient. Sur une seconde ligne, on liste les λ-valeurs propres de D', en ordre croissant :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \lambda''_1, & \ldots, & \lambda''_1, & \lambda''_2, & \ldots, & \lambda''_2, & \ldots, & \lambda''_k, & \ldots, & \lambda''_k, & \ldots \\ \lambda'_1, & \ldots, & \lambda'_n, & \lambda'_{n+1}, & \ldots, & \lambda'_{2n}, & \ldots, & \lambda'_{(k-1)n+1}, & \ldots, & \lambda'_{kn}, & \ldots \end{array}$$

Par un théorème découvert par Weyl qui peut être intuitivement démontré[5], toute valeur propre dans la seconde ligne est inférieure ou égale à la valeur propre correspondante dans la première ligne, et ceci est notre assertion.

Dans le but de démontrer l'inégalité (2.1), nous considérons un domaine donné D et nous appliquons le Lemme 1 à des domaines adéquatement choisis D' et D''.

D' est un carré de côté unité et donc

2. Voir (10, 11) ; ainsi que (2) 429-45.
3. J'ai énoncé cette conjecture avant de prouver le présent résultat ; voir (7), vol. 2, p. 51-53.
4. Le contenu du présent article a été esquissé dans deux notes, (5) et (6).
5. Voir (11) ; cf. (2) 408, Théorème 2.

$$A' = 1, \tag{3.1}$$

$$\lim_{m\to\infty} \lambda'_m m^{-1} = 4\pi. \tag{3.2}$$

La relation (3.2) est un cas particulier du théorème de Weyl, même si nous n'avons pas besoin de connaître le théorème de Weyl pour établir (3.2) ; il suffit de connaître la forme explicite qu'on peut obtenir à partir des λ-valeurs propres pour le carré (qui sera mentionnée au § 7).

D'' est similaire à D, au sens élémentaire du terme ; la longueur de tout segment dans D'' est à la longueur du segment correspondant dans D dans le même rapport que h est à 1 (h petit) et donc

$$A'' = h^2 A, \tag{3.3}$$

$$\lambda''_k = h^{-2}\lambda_k. \tag{3.4}$$

D'' est, comme D, un domaine couvrant le plan. Sans laisser de trous, nous remplissons le plan avec des domaines congruents ne se chevauchant pas dont l'un est D''. Dénotons par n le nombre de ceux parmi ces domaines congruents qui est dans D' ; n varie avec h, de telle façon que $n \to \infty$ quand $h \to 0$. Alors nous avons les deux relations

$$\lim_{n\to\infty} nA'' = A', \tag{3.5}$$

$$\lambda'_{kn} \leqslant \lambda''_k, \tag{3.6}$$

dont la première est familière et évidente ; la seconde est le résultat du Lemme 1.

En combinant (3.1), (3.3), et (3.5), nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} nh^2 = A^{-1}. \tag{3.7}$$

En utilisant (3.4) et (3.6), nous obtenons

$$\lambda_k \geqslant \lambda'_{kn}(kn)^{-1}knh^2. \tag{3.8}$$

En vertu de (3.2) et (3.7), le côté droit de (3.8) tend vers $4\pi kA^{-1}$ lorsque n tend vers ∞, et cela établit l'équation désirée (2.1).

4. Lemmes et définitions

Nous conservons les notations expliquées au début du § 3 et établissons la contraposée naturelle au Lemme 1.

Lemme 2. *Si $D' = nD''$ alors $\mu''_k \leqslant \mu'_{(k-1)n+1}$.*

On liste les μ-valeurs propres de D dans l'ordre croissant et les μ-valeurs propres des sous-domaines congruents qui remplissent D', également en ordre croissant et avec leur multiplicité propre sur une seconde ligne :

$$\begin{array}{llllllllll} \mu'_1, & \ldots, & \mu'_n, & \mu'_{n+1}, & \ldots, & \mu'_{2n}, & \mu'_{2n+1}, & \ldots, & \mu'_{(k-1)n+1}, & \ldots, \\ \mu''_1, & \ldots, & \mu''_1, & \mu''_2, & \ldots, & \mu''_2, & \mu''_3, & \ldots, & \mu''_k, & \ldots. \end{array}$$

Toute valeur propre dans la seconde ligne est inférieure ou égale à la valeur propre correspondante dans la première ligne [6], ce qui est notre assertion.

Le Lemme 2 semble entretenir la même relation à l'inégalité (2.2) que le lemme 1 à (2.1). En fait, la preuve de (2.2) est plus compliquée que celle pour (2.1) et nous avons besoin d'une base plus complexe pour l'établir.

LEMME 3. *Nous supposons que les $r+n$ domaines ne se chevauchant pas, $D^{(1)}, D^{(2)}, \ldots, D^{(r)}$ et les n domaines congruents, dont l'un est D'', sont contenus dans et remplissent sans trous le domaine D' ; cette supposition est exprimée par l'équation*

$$D' = D^{(1)} + D^{(2)} + \ldots + D^{(r)} + nD'' \tag{4.1}$$

Nous supposons de plus que

$$\mu_2^{(i)} > mu''_k \text{ pour } i = 1, 2, \ldots r. \tag{4.2}$$

Les suppositions (4.1) et (4.2) impliquent

$$\mu''_k \leqslant \mu'_{r+(k-1)n+1.} \tag{4.3}$$

Nous listons les μ-valeurs propres de D' sur une première ligne, et les μ-valeurs propres des $r+n$ domaines remplissant D' sur une seconde ligne, dans l'ordre croissant et avec leur multiplicité propre.

$$\begin{array}{lllllllllll} \mu'_1, & \mu'_2, & \ldots, & \mu'_r, & \mu'_{r+1}, & \ldots, & \mu'_{r+n}, & \mu'_{r+n+1}, & \ldots, & \mu'_{r+(k-1)n+1}, & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \mu''_1, & \ldots, & \mu''_1, & \mu''_2, & \ldots, & \mu''_k, & \ldots \end{array}$$

Le même théorème sur lequel nous avons basé notre lemme précédent [7] démontre l'inégalité souhaitée (4.3).

LEMME 4. *Soit D un polygone et L un nombre positif donné (grand). Alors nous pouvons subdiviser D en un nombre fini de polygones ne se chevauchant pas $D^{(1)}, D^{(2)}, \ldots, D^{(s)}$ de telle façon que*

$$\mu_2^{(i)} > L \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, s.$$

Symboliquement, la subdivision est montrée par l'équation

$$D = D^{(1)} + D^{(2)} + \ldots + D^{(s)}.$$

Par le terme polygone, nous entendons un polygone à un nombre fini de côtés. Nous subdivisons le polygone D en un nombre fini de triangles, et ainsi nous voyons qu'il est suffisant de prouver le Lemme 4 dans le cas particulier où D est un triangle. Par des parallèles équidistantes à ses côtés, nous subdivisons un triangle donné D en n^2 triangles congruents similaires au D donné pour chacun desquels $n^2\mu_2$, est la seconde *mu*-valeur propre, et cela rend le Lemme 4 trivial.

6. Voir (2) 409, Théorème 4.
7. Voir (2) 409, Théorème 4.

Pour compléter nos préparations pour la preuve de (2.2), nous avons besoin de quelques définitions.

Appelons $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux (vecteurs de) translations indépendantes (non parallèles). Leurs combinaisons linéaires $m\mathbf{u}+n\mathbf{v}$, où m et n couvrent les entiers indépendamment $\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ forment un groupe. Nous disons le domaine $\overline{D}$ *couvrant le plan translationellement* si, en appliquant toutes les translations $m\mathbf{u}+n\mathbf{v}$ d'un tel groupe (avec $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$) appropriés pour $\overline{D}$, nous obtenons une infinité de domaines satisfaisant deux conditions : conjointement, ils couvrent tout le plan, et deux d'entre eux ne se chevauchent jamais.

Nous disons qu'un domaine D *couvre régulièrement le plan* s'il existe un domaine $\overline{D}$ qui couvre translationnellement le plan et s'il existe un entier naturel l tel que

(4.4)
$$\overline{D} = lD.$$

Tous les domaines particuliers couvrant le plan, présentés comme exemples dans cet article (§ 1, § 9.2), recouvrent régulièrement le plan (Existe-t-il un domaine couvrant le plan qui ne recouvre pas régulièrement le plan ? La réponse à cette question ne semble pas évidente.).

Soit p un point intérieur *fixé* de $\overline{D}$. Dessinons les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ à partir de p comme point initial ; ces deux vecteurs sont les côtés adjacents d'un parallélogramme P. Les opérations $m\mathbf{u}+n\mathbf{v}$ du groupe associé à $\overline{D}$ engendrent à partir de P une infinité de parallélogrammes ne se chevauchant pas *équivalents* à P qui couvrent conjointement le plan sans chevauchement. Si P' est un parallélogramme équivalent à P qui a un point intérieur commun avec $\overline{D}$, la partie de P' qui est extérieure à $\overline{D}$ est un membre de la *suite* de $\overline{D}$. Ainsi, la suite de $\overline{D}$ est un ensemble fini de domaines ; ces domaines ne se chevauchent pas deux à deux et chaque domaine est un sous-ensemble *propre* d'un parallélogramme équivalent à P.

5. Preuve pour la membrane libre

Nous allons démontrer l'inégalité (2.2) dans le cas particulier dans lequel le domaine D recouvrant régulièrement le plan est un *polygone* ; le cas général découle de ce cas particulier par continuité. Nous gardons les notations du § 4. Ainsi le domaine $\overline{D} = lD$, qui recouvre le plan translationnellement, est un polygone et les domaines appartenant à la retenue (au complémentaire) de $\overline{D}$ sont aussi des polygones.

Notre preuve sera une variation plus élaborée du thème simple développé au § 3.

D' est un parallélogramme d'aire unité semblable à P ;

(5.1)
$$A' = 1,$$

(5.2)
$$\lim \mu'_m m^{-1} = 4\pi;$$

la dernière relation est un cas particulier du théorème de Weyl.

D'', P'', $\overline{D}''$ et les éléments de la retenue (du complémentaire) de $\overline{D}''$ sont semblables à D, P, $\overline{D}$ et les éléments correspondant de la retenue de $\overline{D}$, respectivement ; le rapport de similarité est dans tous ces cas le même, de h à 1 pour les segments correspondants,

$$A'' = h^2 A, \tag{5.3}$$

$$\mu_k'' = h^{-2}\mu_k. \tag{5.4}$$

Bien sûr, $\overline{D}'' = lD''$ et il y a un point intérieur p'' de $\overline{D}''$ qui correspond par similarité au point intérieur p de $\overline{D}$.

Notre démonstration dépend de la dissection appropriée du parallélogramme D' en sous-domaines, dissection qui doit être expliquée avec précaution.

Par des parallèles à ses côtés, nous découpons D' en q^2 parallélogrammes congruents semblables à D', en appelant l'un d'entre eux P''. Faisons coïncider l'un des quatre coins de P'' avec le point intérieur p'' de $\overline{D}''$; par les translations du groupe engendré par les vecteurs $\mathbf{u}q^{-1}$ et $\mathbf{v}q^{-1}$, le domaine $\overline{D}''$ est amené sur une infinité de domaines couvrant le plan sans trous et sans chevauchements. Parmi ces domaines congruents à $\overline{D}''$, prenons j domaines complètement contenus dans l'intérieur du (grand) parallélogramme D'. Appelons J l'union de ces j domaines.

Découpons chacun de ces j domaines congruents à $\overline{D}''$ en l domaines congruents à D'' ; nous obtenons $lj = n$ tels domaines. Faisons tendre q vers l'infini ; puisque les j domaines contenus dans J remplissent D' excepté pour une étroite couronne,

$$j \sim q^2,$$

$$\mathrm{n} = \mathrm{lj} \sim lq^2 \tag{5.5}$$

(5.6) et
$$\lim nA'' = A'.$$

La couronne, qui est le sous-domaine de D' complémentaire à J, consiste en des polygones dont chacun est congruent à un élément de la retenue de $\overline{D}''$, il y a donc *seulement un nombre fini de polygones non congruents* parmi eux. k étant donné, on peut subdiviser, en vertu du lemme 4, chacun de ce nombre fini de polygones en sous-polygones satisfaisant (4.2) ; en étendant par des translations cette subdivision à tous les polygones constituant la couronne, nous obtenons les domaines $D^{(1)}, \ldots, D^{(r)}$, vérifiant (4.1), (4.2) et

$$r < O(q^2 - j),$$

où C est un nombre fixé ; alors, par (5.5),

$$\lim \frac{r}{n} = 0. \tag{5.7}$$

Par le Lemme 3,

(5.8) $$\mu_k'' \leqslant \mu'_{r+(k-1)n+1}.$$

De (5.1), (5.3), et (5.6)

(5.9) $$\lim nh^2 = A^{-1}$$

De (5.4) et (5.8)

$$\mu_k = h^2 \mu_k'' \leqslant h^2 n \frac{r+(k-1)n+1}{n} \frac{\mu'_{r+(k-1)n+1}}{r+(k-1)n+1}$$

et maintenant, de (5.9), (5.7), et (5.2) découle l'égalité (2.2) désirée.

6. Quasi-trapézoïdes : définitions

Considérons deux droites parallèles p et p' et le domaine D contenu dans la bande infinie entre p et p'. La frontière C de D consiste en quatre parties : P, Q, P', et Q', dénommées dans cet ordre en tournant ; P et P' sont des segments de droites appartenant à p et p', respectivement, et chacun des deux arcs Q et Q' relie un point terminal de P avec un point terminal de P'. Nous disons que D est un *quasi-trapézoïde* si l'une des situations suivantes est rencontrée.

(I) Une translation parallèlement aux segments P et P', qui sont de la même longueur m, amène l'arc Q sur l'arc Q'.

(II) Une translation parallèle aux segments P et P' suivie d'une réflexion selon une ligne parallèle à la même direction amène Q sur Q' ; la somme des longueurs de P et P' est $2m$.

(III) Chacun des arcs Q et Q' a un centre de symétrie ; la distance entre ces deux centres est m, chacun des centres est équidistant des parallèles p et p' ; la somme des longueurs de P et P' est $2m$.

Dans les cas (I) et (II), les arcs Q et Q' sont congruents, dans le cas (III), chacun de ces arcs est constitué de deux moitiés congruentes. Si Q et Q' s'avèrent être des droites, le quasi-trapézoïde D s'avère être un parallélogramme, un trapézoïde isocèle, ou un trapézoïde quelconque selon qu'on est dans le cas (I), (II), ou (III). Appelons h la distance entre les deux parallèles p et p' ; nous appelons h la *hauteur* du quasi-trapézoïde D et m sa *largeur moyenne* ; l'aire de D est mh.

La bande infinie entre les parallèles p et p' peut être remplie avec une infinité de domaines congruents, dont l'un est le quasi-trapézoïde donné D, sans trous ni chevauchement. Ces domaines congruents sont obtenus à partir de D par des translations successives, des réflexions glissantes, ou des rotations de 180°, selon nos trois cas. Et ainsi un quasi-trapézoïde pourrait être adéquatement appelé “domaine couvrant une bande”[8].

Si nous incluons les cas limites dans notre modèle, les deux figures suivantes devraient être regardées comme des quasi-trapézoïdes avec hauteur h et largeur moyenne m :

(a) un triangle de hauteur h et de base $2m$ (P' est réduit à un point), et

8. Il y a sept différent types de groupes de symétrie pour décorer une frise [cf. (7), vol. 1, p. 88-89], mais le domaine fondamental de chacun appartient à l'un de nos trois cas.

(b) un parallélogramme de hauteur $\frac{1}{2}h$ et de base $2m$ (une moitié de Q coincïde avec une certaine fraction de Q').

Ces cas limites, et d'autres, seront inclus dans notre théorème, pour l'établissement duquel nous avons encore besoin de deux définitions.

Nous utiliserons l'abréviation $x_+ = \dfrac{x+|x|}{2} = \begin{cases} x \text{ quand } x \geqslant 0, \\ 0 \text{ quand } x \leqslant 0. \end{cases}$

L'expression

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} (y - j^2)_+^{\frac{1}{2}} \tag{6.1}$$

définit une fonction strictement croissante de y pour $y \geqslant 1$. Nous considérons la fonction inverse

$$y = L(x) \tag{6.2}$$

qui est aussi strictement croissante et continue, et est complètement définie par cette assertion : pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 1$ les deux relations (6.1) et (6.2) ont précisément la même signification [9].

Les deux relations suivantes

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} (y - j^2)_+^{\frac{1}{2}}, \tag{6.3}$$

$$\text{y=M(x)} \tag{6.4}$$

sont aussi équivalentes, c'est-à-dire qu'elles ont explicitement la même signification pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Cela définit la fonction $M(x)$ qui est, inversement à (6.3), strictement croissante et continue. Nous démontrerons le théorème :

Si D est un quasi-trapézoïde :

$$\lambda_k \geqslant \frac{\pi^2}{h^2} L\left(\frac{kh}{m}\right), \tag{6.5}$$

$$\mu_k \leqslant \frac{\pi^2}{h^2} M\left(\frac{(k-1)h}{m}\right), \qquad \text{pour } k = 1, 2, 3 \ldots. \tag{6.6}$$

7. Les quasi-trapézoïdes : le cas du rectangle

Les valeurs propres d'un rectangle de côtés a et b sont de la forme $\pi^2 \left(\dfrac{i^2}{a^2} + \dfrac{j^2}{b^2}\right)$, avec $i, j = 1, 2, 3, \ldots$ pour λ_n, et $i, j = 0, 1, 2, 3 \ldots$, pour μ_n. Dénotons par N le nombre de ces λ-valeurs propres qui sont $\leqslant \lambda_k$, une valeur propre donnée. Si aucune λ-valeur propre avec un indice différent de k est égale à λ_k, alors $N = k$.

Si, pourtant, nous souhaitons couvrir le cas de valeurs propres multiples, nous pouvons seulement

9. Pour la signification géométrique de (6.1) voir § 9.1.

supposer que

$$k \leqslant N \tag{7.1}$$

Pour trouver N, nous devons compter ces points du réseau (i, j) qui vérifient les inégalités

$$\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \leqslant \frac{\lambda_k}{\pi^2} \qquad (i \geqslant 1, j \geqslant 1); \tag{7.2}$$

ces points appartiennent à un quadrant d'une certaine ellipse, possiblement à la partie courbée, mais non pas à la partie droite, de sa frontière. Il découle de (7.2) que $i \leqslant \frac{a}{b}\left(\frac{b^2\lambda_k}{\pi^2} - j^2\right)_+^{\frac{1}{2}}$

et ainsi nous pouvons voir que le nombre de ceux parmi nos N points du réseau qui ont une ordonnée donnée j est

$$\left[\frac{a}{b}\left(\frac{b^2\lambda_k}{\pi^2} - j^2\right)_+^{\frac{1}{2}}\right]; \tag{7.3}$$

nous écrivons, comme d'habitude, $[x]$ pour la partie entière de x. En sommant (7.3), qui est valide pour $j = 1, 2, 3, \ldots,$, sur toutes ces valeurs, nous obtenons N, et ainsi, nous transformons (7.1) en

$$k \leqslant N = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{a}{b}\left(\frac{b^2\lambda_k}{\pi^2} - j^2\right)_+^{\frac{1}{2}}\right].$$

Nous concluons que,

$$\frac{kb}{a} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{b^2\lambda_k}{\pi^2} - j^2\right)_+^{\frac{1}{2}} \tag{7.4}$$

Puisque la fonction $L(x)$, définie par l'équivalence entre (6.1) et (6.2), est strictement croissante, nous pouvons réécrire (7.4) sous la forme

$$L\left(\frac{kb}{a}\right) \leqslant \frac{b^2\lambda_k}{\pi^2}$$

qui, avec $a = m$ et $b = h$, prouve l'égalité souhaitée (6.5) dans le cas particulier du rectangle.

Supposons maintenant que μ_k n'est pas une valeur propre multiple. Par des considérations similaires aux précédentes, nous obtenons

$$k = \sum_{j=0}^{J}\sum_{j=0}^{J}\left[\frac{a}{b}\left(\frac{b^2\lambda_k}{\pi^2} - j^2\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right]$$

où J dénote la plus grande valeur de l'entier j pour laquelle la quantité élevée à la puissance $\frac{1}{2}$ est non-négative. Par conséquent

$$\frac{kb}{a} > \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{b^2\lambda_k}{\pi^2} - j^2\right)_+^{\frac{1}{2}} \tag{7.5}$$

et de plus, par l'équivalence entre (6.3) et (6.4),

$$M\left(\frac{kb}{a}\right) \geqslant \frac{b^2\mu_k}{\pi^2}; \tag{7.6}$$

même $>$ en découlerait, mais $\geqslant$ est suffisant pour notre objectif. Nous pouvons poser $a = m$ et $b = h$ dans (7.6) et alors ce que nous obtenons est plus faible que le cas particulier de (6.6) traitant du rectangle, pour deux raisons. D'abord, (7.6) contient k alors que dans (6.6) intervient $k - 1$. Deuxièmement, (7.6) a été dérivée sous la restriction que μ_k n'est pas une valeur propre multiple. On voit facilement, pourtant, que cette restriction peut être écartée : si a^2b^{-2} est irrationnel, le rectangle de côtés a et b n'a pas de valeurs propres multiples, et, en ayant démontré (7.6) pour les valeurs irrationnelles a^2b^{-2}, nous l'étendons à tous les rectangles par continuité.

8. Quasi-trapézoïdes : le cas général

Nous utilisons le cas particulier du rectangle comme pierre de touche.

Soit D un quasi-trapézoïde de largeur moyenne m et de hauteur h, et D' un rectangle de base $mn - c$ et de hauteur h. Si c est convenablement choisi (son choix dépend de D, mais *non* de n), D' contient n domaines ne se chevauchant pas congruents dont l'un est D et, par conséquent, par le lemme 1,

$$\lambda_k \leqslant \lambda'_{kn}. \tag{8.1}$$

Le résultat (7.5) prouvé dans la section précédente est encore applicable au rectangle D' avec $mn + c, h, kn, \lambda'_{kn}$ pour $a, b, k, \lambda_k,$ respectivement, et ainsi

$$\lambda'_{k,n} \leqslant \frac{\pi^2}{h^2} L\left(\frac{knh}{mn+c}\right). \tag{8.2}$$

En combinant (8.1) et (8.2) et en faisant tendre n vers l'∞, nous obtenons la relation désirée (6.5).

La relation non encore prouvée (6.6) est dans la même relation à (6.5) que (2.2) l'est à (2.1) et donc le lecteur peut trouver la preuve de (6.6) par une sorte de règle de trois.

9. Commentaires, applications, extensions

9.1. Un quadrant d'un cercle, de rayon $y^{\frac{1}{2}}$ et centré à l'origine, est dans le quadrant positif d'un système de coordonnées. Nous divisons ce quart de cercle en bandes de largeur 1 par ordonnées équidistantes ; il y a cependant une exception : la largeur de la dernière bande est $y^{\frac{1}{2}} - [y^{\frac{1}{2}}]$. Nous procédons à une construction similaire à celle qui définit l'intégrale de Riemann : nous circonscrivons chaque bande, et inscrivons dans chacune un rectangle de base 1 : la dernière bande est exceptionnelle : elle a un rectangle circonscrit mais pas de rectangle inscrit. La somme des aires des rectangles est précisément le côté droit de (6.1) ou $L^{-1}(y)$, la somme des aires des rectangles circonscrits est le côté droit de (6.3) ou $M^{-1}(y)$; nous utilisons là l'exposant -1 pour dénoter la fonction inverse. Alors l'aire du quart de cercle est contenue entre ces deux sommes d'aires rectangulaires, et ainsi $L^{-1}(y) < \frac{1}{4}\pi y < M^{-1}(y)$.

En passant aux fonctions inverses, nous obtenons $M\left(\frac{1}{4}\pi y\right) < y < L\left(\frac{1}{4}\pi y\right)$ et par conséquent

$$M(x) < \frac{4x}{\pi} < L(x). \tag{9.1}$$

9.2. Un quasi-trapézoïde, comme domaine couvrant une bande est trivialement aussi un domaine couvrant le plan (et même un domaine recouvrant régulièrement le plan). Par conséquent, à la fois les paires d'inégalités, (2.1), (2.2), et (6.5), (6.6), s'appliquent aux valeurs propres d'un quasi-trapézoïde. À nouveau, l'estimation par la dernière paire est plus juste. En fait, (6.5) et (9.1) amènent à

$$\lambda_k \geqslant \frac{\pi^2}{h^2} L\left(\frac{kh}{m}\right) > \frac{\pi^2}{h^2}\frac{4\pi h}{\pi m} = \frac{4\pi k}{A}$$

puisque $mh = A$ est l'aire du quasi-trapézoïde. Le lecteur peut passer de la même façon de (6.6) à (2.2).

9.3. Des définitions par (6.1) et (6.2) ou (6.3) et (6.4), nous obtenons par de l'algèbre simple

$$L(x) = x^2 + 1 \qquad \text{quand } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3},$$

$$L(x) = \left(\frac{x^2+3}{2x}\right)^2 + 1 \qquad \text{quand } \sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8} + \sqrt{5},$$

$$M(x) = x^2 \qquad \text{quand } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$M(x) = \left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2 \qquad \text{quand } 1 \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{3}.$$

Les fonctions $L(x)$ et $M(x)$ sont algébriques par morceaux. Pour des grandes valeurs de x, pourtant, il est plus rapide de calculer ces fonctions numériquement en calculant les valeurs de leurs fonctions inverses d'abord.

9.4. Dans certaines circonstances, le cas de l'égalité peut être atteint par les inégalités (6.5) et (6.6). Nous discutons ici seulement des plus simples de telles circonstances.

Si

$$\frac{h}{m} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{k} \tag{9.2}$$

nous obtenons de (6.5), en utilisant l'évaluation appropriée de la fonction $L(x)$ donnée par la sous-section 9.3 à venir, que

$$\lambda_k \geqslant \pi^2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{k^2}{m^2}\right). \tag{9.3}$$

À nouveau, sous la condition (9.2) $\dfrac{4}{h^2} + \dfrac{1}{m^2} > \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{k^2}{m^2}$

et ainsi le côté droit de (9.3) est précisément la k-ième λ-valeur propre du rectangle de base m et de hauteur h. C'est-à-dire que, *sous la condition (9.2), de tous les quasi-trapézoïdes de hauteur h et de largeur moyenne m, le rectangle de base m a la plus petite λ_k.*

La condition (9.2) restreint h/m, c'est-à-dire la forme du rectangle. Sans une restriction de cette sorte, l'assertion suivante serait incorrecte. Pour $k = 1$, la restriction (9.2) est sévère. Comparer les deux figures, toutes deux des quasi-trapézoïdes avec la même hauteur et la même largeur moyenne :

- le rectangle de base m et hauteur h ;
- le triangle isocèle de base $2m$ et de hauteur h.

Pour $h/m = \sqrt{3}$, quand le triangle devient équilatéral, les deux figures ont la même première λ-valeur propre, ou la même fréquence principale. La fréquence principale du rectangle est inférieure quand $h/m < \sqrt{3}$ et celle du triangle est inférieure quand $h/m > \sqrt{3}$ [10]

Si m et h satisfont la condition (9.2) pour une certaine valeur de k, ils la satisfont *a fortiori* pour des valeurs plus petites de k. Par conséquent nous pouvons reformuler notre résultat :

Sous la condition (9.2), les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, du rectangle de base m et de hauteur h sont les bornes inférieures des valeurs propres correspondantes de n'importe quel quasi-trapézoïde de largeur moyenne m et de hauteur h.

Une preuve similaire et des commentaires similaires s'appliquent au corollaire correspondant de (6.6) :

Sous la condition $\dfrac{h}{m} \leqslant \dfrac{1}{k-1}$ parmi tous les quasi-trapézoïdes de hauteur h et de largeur moyenne m, le rectangle de base m a la plus grande μ_k.

9.5. Dénotons par D le losange de côtés de longueur 1 et d'angles 60° et 120°. Par sa plus courte diagonale, D est divisé en deux triangles équilatéraux dont on nomme l'un D'. Les valeurs propres $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \ldots$ du triangle D ont été trouvées par Lamé [11] mais les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, du losange D ne sont pas complètement connues. Chaque λ'_k est aussi une valeur propre pour D et là subvient un curieux problème : *celui de déterminer la localisation exacte des λ'_k dans la séquence $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$. Nous résoudrons ce problème pour les trois premières valeurs propres du triangle D',*

$$\lambda'_1 = \frac{16\pi^2}{3}, \qquad \lambda'_2 = \lambda'_3 = \frac{112\pi^2}{9}. \tag{9.4}$$

Il n'est pas difficile de trouver des formes plausibles pour les lignes nodales des premières λ et de deviner par conséquent la localisation de ces valeurs propres, mais il est plus difficile de solidifier une telle supposition sous la forme d'une preuve. La preuve qui suit est basée sur (6.5). En voyant l'équivalence de (6.1) et (6.2), on peut écrire (6.5) sous la forme suivante qui est plus adaptée à notre présupposé présent :

$$k \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{h^2 \lambda_k}{\pi^2} - j^2 \right)_+^{\frac{1}{2}}. \tag{9.5}$$

Pour le losange D, $m = 1$, $h^2 = \frac{3}{4}$ et donc il découle de (9.4) et (9.5) que

10. Cela découle aisément d'un cas très spécial du théorème général 2, (8) 292. Pour plus de détails sur les membranes triangulaires, voir (3).

11. La complétude de la solution de Lamé est prouvée dans (3).

$$(9.6) \qquad k \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(4 - j^2\right)_+^{\frac{1}{2}} = 2 \qquad \text{si } \lambda_k = \lambda'_1,$$

$$(9.7) \qquad \mathrm{k} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{28}{3} - j^2\right)_+^{\frac{1}{2}} = \frac{20}{3} \qquad \text{si } \lambda_k = \lambda'_3,$$

c'est-à-dire que les valeurs $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \ldots$ sont inacceptables pour λ'_1 et $\lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \ldots$ pour λ'_3. D'un autre côté, $D = 2D'$, et ainsi, en vertu du Lemme 1,

$$(9.8) \qquad \lambda_{2k} \leqslant \lambda'_k.$$

Les inégalités (9.6), (9.7), et (9.8) amènent suffisamment d'information pour affirmer que

$$(9.9) \qquad \lambda_2 = \lambda'_1 < \lambda_3, \qquad \lambda_6 = \lambda'_3 < \lambda_6;$$

nous savons également, de la théorie générale que

$$(9.10) \qquad \lambda_1 < \lambda_2,$$

et ainsi, nous avons réussi à localiser λ'_1 et λ'_3. Pour localiser λ'_2, nous avons besoin d'une inégalité supplémentaire :

$$(9.11) \qquad \lambda_4 < \lambda'_2$$

qui n'est pas contenue dans (9.8). Nous pouvons, cependant, obtenir (9.11) de différentes autres sources, la façon la plus pratique (nécessitant peu de calculs numériques) étant d'utiliser une estimation explicite supérieure pour λ_4 donnée dans le cas le plus général ailleurs [12]. Pour résumer, grâce à (9.4), (9.9), (9.10), et (9.11), nous avons

$$\lambda_1 < \lambda'_1 = \lambda_2 < \lambda_3 \leqslant \lambda_4 < \lambda'_2 = \lambda_5 = \lambda'_3 = \lambda_6 < \lambda_7.$$

Il vaut la peine de mentionner que dans le cas du losange que nous venons de considérer, l'égalité dans (6.5) est obtenue pour $k = 2$ mais non pour $k = 1$.

9.6. Il n'y a pas de difficulté à étendre la méthode utilisée aux analogues en trois dimensions (ou plus) du problème de la membrane. Je souhaite mentionner un cas plus intéressant.

Dénotons par $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots$ les valeurs propres d'une plaque contrainte aux bords avec le domaine D. Nous pourrions utiliser la même méthode que celle que nous avons utilisée pour déduire (2.1) et (6.5), pour dériver des inégalités analogues pour κ_k. En fait, pourtant, il n'est pas nécessaire d'effectuer ces raisonnements puisque le résultat découle de (2.1) et (6.5) grâce à l'inégalité bien connue

12. Voir (4), p. 203-4.

(9.12) $$\lambda_k^2 \leqslant_k .$$

En fait, nous pouvons prouver (9.12) (et ses analogues) en suivant la remarque simple suivante (je ne sais si cela a été observé précédemment) : si

soit $$\phi = 0 \quad \text{sur } C,$$

soit $$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } C,$$

et si les intégrales doubles suivantes sont étendues au domaine D,

$$\iint (\phi_x^2 + \phi_y^2) dxdy = - \iint \phi \Delta \phi \, dxdy.$$

En appliquant l'inégalité de Schwartz au côté droit, nous obtenons

$$\left(\frac{\iint (\phi_x^2 + \phi_y^2) \, dxdy}{\iint \phi^2 \, dxdy} \right)^2 \leqslant \frac{\iint (\Delta phi)^2 \, dxdy}{\iint \phi^2 \, dxdy}.$$

Dans cette inégalité, du côté gauche et du côté droit, nous trouvons précisément ces rapports selon lesquels un certain minimax est, par définition, égal à λ_k et κ_k, respectivement, et cela rend (9.12) évidente.

9.7. Dénotons par P la rigidité de torsion d'un quasi-trapézoïde D de hauteur h et de largeur moyenne m. Alors

(9.13) $$P < mh^3/3$$

Si D et D' ont la même signification qu'au § 8, et si P' est la rigidité de torsion de D'. Puisque la rigidité de torsion est super-additive[13]

(9.14) $$P' > nP$$

D'un autre côté, il est bien connu que, pour $n \to \infty$,

(9.15) $$P' \sim (mn + c)h^2/3.$$

De la combinaison de (9.14) et (9.15), nous obtenons (9.13) avec un signe $\leqslant$ au lieu de $<$. Pour exclure le cas d'égalité, nous combinons deux quasi-trapézoïdes congruents de dimensions m, h en un seul de dimensions $2m$, h, nous utilisons un résultat déjà prouvé pour le dernier, et la super-additivité *stricte*[14].

13. On en sait davantage ; voir (1).
14. Un argument similaire amène à une estimation plus fine de la conduction d'un quasi-trapézoïde, même si un

Références

[1] Michael Aissen, A class of super-additive functions, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1951) 360-2.

[2] R. Courant and D. Hilbert, Methods of mathematical physics, I (Interscience : New York, 1953).

[3] G. C. Nooney, On the vibrations of triangular membranes, Techn. Report No. 35, Office of Naval Research Contract N6ori 106, Task Order 5 (Dissertation, Stanford University, 1954).

[4] G. Pólya, Estimates for eigenvalues, Studies in mathematics and mechanics presented to Richard von Mises (Academic Press : New York, 1954) 200-7.

[5] ________, Sur les fréquences propres des membranes vibrantes, C.R. Acad. Sci. Paris 242 (1956) 708-9.

[6] ________, Sur quelques membranes vibrantes de forme particulière, ibid. 243 (1956) 469-71.

[7] ________, Mathematics and plausible reasoning (Oxford University Press : London, 1954).

[8] ________, and M. Schiffer, Convexity of functionals by transplantation, J. Analyse Math. 3 (1954) 245-346.

[9] ________, and G. Szegö, Isoperimetric inequalities in mathematical physics (Annals of Mathematics Studies, No. 27. Princeton University Press ; Princeton, 1951).

[10] H. Weyl, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung), Math. Ann. 71 (1912) 441-79.

[11] ________, Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung, J. reine angew. Math, 141 (1912) 1-11.

Stanford University,
Stanford, California

résultat plus général est connu ; voir (9) 189, l'inégalité (4) et le texte qui suit.

Sur les zéros d'une fonction entière représentée par une intégrale de Fourier

G. Pólya.

Nous ne disposons pas d'une méthode générale pour discuter du caractère réel des zéros d'une fonction entière représentée par une intégrale de Fourier (une telle méthode devrait exister pour la fonction ξ de Riemann). Je présente ici un cas particulier où la discussion n'est pas évidente, mais où elle peut être menée à l'aide de résultats connus.

Considérons la fonction

$$F_\alpha(z) = \int_0^\infty e^{-t^\alpha} \cos zt\, dt \tag{1}$$

Si $0 < \alpha < 1$, alors $F_\alpha(z)$ est définie par cette formule seulement pour les valeurs réelles de z. On a

$$F_1(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

Pour $\alpha > 1$, on obtient

$$F_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\Gamma\left(\dfrac{2n+1}{\alpha}\right)}{\Gamma(2n+1)} z^{2n}. \tag{2}$$

Ce développement montre que $F_\alpha(z)$ est une fonction entière d'ordre $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$. En particulier,

$$F_2(z) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}z^2}. \tag{3}$$

En suivant la méthode employée par G. H. Hardy [1] pour prouver que la fonction $\xi(t)$ de Riemann a un nombre infini de zéros réels, F. Bernstein [2] a prouvé la même chose pour $F_4(z), F_6(z), F_8(z), \ldots$. Maintenant, il est facile d'aller plus avant dans le cas de $F_\alpha(z)$ [bien que ça ne soit naturellement pas possible dans le cas de $\xi(t)$], et de prouver les résultats suivants :

(I) *Si $\alpha = 2$, alors il n'y a pas de zéro du tout.*

(II) *Si $\alpha = 4, 6, 8, \ldots$, alors il y a un nombre infini de zéros réels mais pas de zéros complexes.*

(III) *Si $\alpha > 1$, et n'est pas un entier pair, alors il y a un nombre infini de zéros complexes et un nombre fini, non inférieur à $2\left[\frac{1}{2}\alpha\right]$, de zéros réels.*

L'assertion (I) n'a pas besoin de démonstration : la comparer à (3). La preuve de (II) est basée sur le cas particulier suivant d'un théorème de Laguerre [3] :

Si $\Phi(z)$ est une fonction entière d'ordre inférieur à 2, ce qui suppose des valeurs réelles le long de l'axe réel, et si elle ne possède que des zéros réels négatifs, alors les zéros de la fonction entière

$$\Phi(0) + \frac{\Phi(1)}{1!}z + \frac{\Phi(2)}{2!}z^2 + + \frac{\Phi(n)}{n!}z^n + \ldots$$

sont aussi tous réels et négatifs.

1. *Comptes-Rendus*, 6 avril 1914.
2. *Mathematische Annalen*, vol. lxxix. (1919), pp. 265-268.
3. *Œuvres*, vol. i. (Paris, 1898), p. 200-203.

Posons

$$\Phi(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{2z+1}{2k}\right)\Gamma(z+1)}{\Gamma(2z+1)}, \tag{4}$$

où k est un entier positif. Les pôles du numérateur

$$z = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}(2k+1), -\frac{1}{2}(4k+1), \ldots, z = -\frac{2}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{6}{2}, \ldots,$$

sont absorbés par ceux du dénominateur.

$$z = -\frac{1}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots.$$

Ainsi $\Phi(z)$ est une fonction entière satisfaisant les conditions requises par le théorème de Laguerre, et par conséquent les zéros de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} = 2kF_{2k}(i\sqrt{z})$$

sont tous réels et négatifs ; nous en déduisons que les zéros de $F_{2k}(z)$ sont tous réels.

L'ordre de la fonction entière $F_{2k}(z)$ est $\frac{2k}{2k-1}$; si $k = 2, 3, 4, \ldots$, alors $1 < \frac{2k}{2k-1} < 2$. Ainsi, $F_{2k}(z)$ n'est pas d'ordre entier et par conséquent, possède une infinité de zéros ; ils sont tous réels, et par conséquent, (II) est complètement démontrée.

Supposons que x est positif. Alors on a, par intégration par parties,

$$x^{\alpha+1}F_\alpha(x) = x^\alpha \int_0^\infty \sin xt.\alpha t^{\alpha-1}e^{-t^\alpha}\,dt.$$

Introduisons la nouvelle variable $u = x^\alpha t^\alpha$; alors on a

$$x^{\alpha+1}F_\alpha(x) = \Im \int_0^\infty \exp(iu^{1/\alpha} - ux^{-\alpha})du, \tag{5}$$

où $\Im A$ dénote la partie imaginaire de A. Choisissons comme chemin d'intégration, non pas l'axe réel positif, mais une ligne droite allant de 0 à l'∞ dans le demi-plan supérieur et faisant un angle suffisamment petit avec l'axe positif réel. Avec ce chemin, on a :

$$\lim_{x=+\infty} x^{\alpha+1}F_\alpha(x) = \Im \int_0^\infty e^{iu^{1/\alpha}}du.$$

En faisant pivoter le chemin d'intégration dans le sens positif jusqu'à ce qu'il atteigne la position dans laquelle $\arg z = \frac{1}{2}\pi\alpha$, on obtient finalement

$$\lim_{x=+\infty} x^{\alpha+1}F_\alpha(x) = \Im \int_0^\infty e^{-r^{1/\alpha}}e^{i\pi\alpha/2}dr \tag{6}$$

$$= \Gamma(\alpha+1)\sin(\pi\alpha/2).$$

Si la limite (6) est différente de 0, c'est-à-dire si α est différent de 2, 4, 6, …, alors $F_\alpha(z)$ possède

(a) un nombre fini de zéros réels et

(b) un nombre infini de zéros.

De ces assertions, (a) découle de façon évidente de (6). Pour prouver (b), nous utilisons le théorème qui énonce qu'une fonction entière d'ordre fini ayant un nombre de zéros fini est de la forme

$$P(z)e^{Q(z)}, \tag{7}$$

où $P(z), Q(z)$ sont des polynômes. Maintenant, $F_\alpha(z)$ n'est certainement pas de la forme (7), puisqu'elle converge vers 0 quand $z \to +\infty$ de la même manière qu'une puissance négative de z, comme on peut le voir à partir de (6). Les assertions (a), (b) qui viennent d'être démontrées contiennent les deux premières parties de (III).

De (1) découle, par le théorème de Fourier,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_\alpha(x)\cos xt\,dx = e^{-t^\alpha} = 1 - \frac{t^\alpha}{1!} + \ldots.$$

En différentiant $2m$ fois par rapport à t, où

$$2m < \alpha < 2m+2, \tag{8}$$

et en posant alors $t = 0$, nous obtenons

$$\int_0^\infty F_\alpha(x)x^2\,dx = \int_0^\infty F_\alpha(x)x^4\,dx = \ldots = \int_0^\infty F_\alpha(x)x^{2m}\,dx = 0 \tag{9}$$

La convergence des intégrales (9) est assurée par (6) et (8). Il découle de (9) que

$$\int_0^\infty F_\alpha(x)x^2 P(x^2)\,dx = 0, \tag{10}$$

où $P(z)$ dénote n'importe quel polynôme en z de degré ne dépassant pas $m-1$. Supposons, maintenant, si possible, que $F_\alpha(z)$ change de signe au plus $m-1$ fois pour $x > 0$, e.g. en les points $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ avec $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1}$ et posons

$$P(x^2) = (x_1^2 - x^2)(x_2^2 - x^2)\ldots(x_{m-1}^2 - x^2).$$

Alors l'intégrande dans (10) n'est jamais négatif et notre supposition amène à une contradiction. Par conséquent, $F_\alpha(x)$ change de signe au moins $m = \left[\frac{1}{2}\alpha\right]$ fois pour $x > 0$. Nous avons maintenant démontré l'entièreté du Théorème (III).

Les résultats que nous avons obtenus peuvent être complétés à de nombreux égards. Si $\alpha \geq 0$ et k est un entier non inférieur à 2, alors les zéros de la fonction entière de z

$$\int_0^\infty e^{\alpha t^2 - t^{2k}} \cos zt\,dt$$

sont tous réels ; la distribution asymptotique des zéros peut être calculée par des méthodes plus laborieuses et plus habituelles, et etc. La fonction $F_\alpha(z)$ a été considérée en relation avec des questions qui se posent en théorie des erreurs, spécialement par Cauchy [4], et P. Lévy [5] a démontré que $F_\alpha(x) \geq 0$ pour $0 < \alpha \leq 2$ et pour les valeurs réelles de x. Plus récemment, W. R. Burwell [6] a étudié l'expansion asymptotique de $F_\alpha(z)$ pour $\alpha = 3, 4, 5, \ldots$, et a montré en particulier que, quand $\alpha = 4, 6, \ldots$, le nombre de zéros complexes est fini. Ce résultat est inclus dans le Théorème (II) ci-dessus. Finalement, nous pouvons ajouter que $F_\alpha(z)$ est de la plus grande importance dans le problème de Waring [7].

4. *Comptes-Rendus*, vol. xxxvii. (1853), p. 202-206, et *passim.*
5. *Comptes-Rendus*, vol. clxxvi. (1923), p. 1118-1120.
6. *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), vol. xxii (1923), p. 57-72.
7. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Göttinger Nachrichten* (1990), p. 33-54.