Théorie modulaire de Tomita-Takesaki
Stephen J. Summers

Résumé

Nous fournissons un bref survol de la théorie modulaire de Tomita-Takesaki et de quelques unes de ses applications à la physique mathématique. Ceci est un article commandé par l'*Encyclopédie de physique mathématique*, éditée par J.-P. Françoise, G. Naber et T.S. Tsun, pour être publiée par la maison d'édition Elsevier.

1. Structure de base

Les origines de la théorie modulaire de Tomita-Takesaki consistent en deux articles non publiés de M. Tomita en 1967 et un fin volume [9] par M. Takesaki. Elle s'est développée en l'un des plus importants outils dans la théorie des algèbres d'opérateurs et elle a trouvé de nombreuses applications en physique mathématique.

Bien que la théorie modulaire ait été formulée en un paradigme plus général, elle sera présentée sous la forme sous laquelle elle trouve le plus souvent ses applications en physique mathématique [1]. Soit $\mathcal{M}$ une algèbre de von Neumann sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ contenant un vecteur Ω qui est cyclique et séparateur pour $\mathcal{M}$. Définissons l'opérateur S_0 sur $\mathcal{H}$ comme suit :

$$S_0 A\Omega = A^*\Omega, \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{M}.$$

Cet opérateur se développe en un opérateur fermé anti-linéaire S défini sur un sous-ensemble dense de $\mathcal{H}$. Soit Δ l'unique opérateur auto-adjoint positif, et J l'unique opérateur anti-unitaire intervenant dans la décomposition polaire

$$S = J\Delta^{1/2} = \Delta^{-1/2}J.$$

Δ est appelé l'*opérateur modulaire* et J la *conjugaison modulaire* (ou l'*involution modulaire*) associée à la paire $(\mathcal{M}, \Omega)$. Notons que J^2 est l'opérateur identité et que $J = J^*$. De plus, le calcul spectral peut être appliqué à Δ de telle façon que Δ^{it} est un opérateur unitaire pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\{\Delta^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$ forme un groupe unitaire fortement continu. Dénotons par $\mathcal{M}'$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{M}$. La théorie modulaire commence avec le théorème remarquable suivant.

Théorème 1.1. Soit $\mathcal{M}$ une algèbre de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparateur Ω. Alors $J\Omega = \Omega = \Delta\Omega$ et les égalités suivantes sont vérifiées :

$$J\mathcal{M}J = \mathcal{M}' \quad \text{et} \quad \Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} = \mathcal{M}, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Notons que si l'on définit $F_0 A'\Omega = A'^*\Omega$, pour tout $A' \in \mathcal{M}'$, et que l'on prend sa fermeture F, alors on a les relations

$$\Delta = FS, \quad \Delta^{-1} = SF, \quad F = J\Delta^{-1/2}.$$

Département de Mathématiques, Université de Floride, Gainesville FL 32611, USA

traduction Denise Vella-Chemla, en janvier 2021, de l'article https://arxiv.org/pdf/math-ph/0511034.pdf.

1. Le lecteur est renvoyé aux références [6,7,8,10] pour y trouver des généralisations, des détails et des références concernant le contenu des quatre premières sections.

2. Groupe d'automorphismes du groupe modulaire

Par le Théorème 1.1, les unitaires $\Delta^{it}, t \in \mathbb{R}$, induisent un groupe d'automorphismes à un paramètre $\{\sigma_t\}$ de $\mathcal{M}$ par

$$\sigma_t(A) = \Delta^{it} A \Delta^{-it}, \quad A \in \mathcal{M}\,,\, t \in \mathbb{R}.$$

Ce groupe est appelé le *groupe d'automorphismes du groupe modulaire* de $\mathcal{M}$ (relativement à Ω). Dénotons par ω l'état normal fidèle sur $\mathcal{M}$ induit par Ω :

$$\omega(A) = \frac{1}{\|\Omega\|^2}\langle \Omega, A\Omega\rangle, \quad A \in \mathcal{M}.$$

Du Théorème 1.1, il découle que ω est invariant sous $\{\sigma_t\}$, i.e. $\omega(\sigma_t(A)) = \omega(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Le groupe d'automorphismes du groupe modulaire contient de l'information à la fois à propos de $\mathcal{M}$ et à propos de ω. Par exemple, le groupe modulaire d'automorphismes est un automorphisme intérieur sur $\mathcal{M}$ si et seulement si $\mathcal{M}$ est semi-finie. Il est évident si et seulement si ω est un état de la trace sur $\mathcal{M}$. En effet, on a pour tout $B \in \mathcal{M}$ que $\sigma_t(B) = B$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\omega(AB) = \omega(BA)$ pour tout $A \in \mathcal{M}$. Dénotons par $\mathcal{M}^\sigma$ l'ensemble de tous ces $B \in \mathcal{M}$.

Le groupe d'automorphismes du groupe modulaire satisfait une condition qui avait déjà été utilisée en physique mathématique pour caractériser les états de température à l'équilibre des systèmes quantiques en mécanique statistique et en théorie des champs - la condition *Kubo-Martin-Schwinger (KMS)*. Si $\mathcal{M}$ est une algèbre de von Neumann et $\{\alpha_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ est un groupe à un paramètre d'automorphismes σ-faiblement continu de $\mathcal{M}$, alors l'état ϕ sur $\mathcal{M}$ satisfait la condition KMS à la condition de (température inverse) β $(0 < \beta < \infty)$ par rapport à $\{\alpha_t\}$ si pour tout $A, B \in \mathcal{M}$, il existe une fonction complexe $F_{A,B}(z)$ qui est analytique dans la bande $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < \beta\}$ et continue sur la fermeture de la bande de telle façon que

$$F_{A,B}(t) = \phi(\alpha_t(A)B) \quad \text{et} \quad F_{A,B}(t + i\beta) = \phi(B\alpha_t(A)),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, $\phi(\alpha_{i\beta}(A)B) = \phi(BA)$, pour tout A, B dans une $*$-sous-algèbre $\mathcal{M}$ σ-faiblement dense, α-invariante. De tels états KMS sont α-invariants, i.e. $\phi(\alpha_t(A)) = \phi(A)$, pour tout $A \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbb{R}$, et sont stables et passifs (cf. le Chapitre 5 de [3] et [5]).

Tout état normal fidèle satisfait la condition KMS pour la valeur $\beta = 1$ (appelée désormais la condition modulaire) par rapport au groupe d'automorphismes du groupe modulaire correspondant.

Théorème 2.1. Soit $\mathcal{M}$ une algèbre de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparateur Ω. Alors l'état induit ω sur $\mathcal{M}$ satisfait la condition modulaire par rapport au groupe d'automorphismes du groupe modulaire $\{\sigma_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ associé à la paire $(\mathcal{M}, \Omega)$.

Le groupe d'automorphismes du groupe modulaire est alors équipé de l'analycité associée à la condition KMS, et ceci est un outil puissant dans de nombreuses applications de la théorie modulaire à la physique mathématique. De plus, les propriétés physiques et les interprétations des états KMS sont souvent invoquées quand on applique la théorie modulaire à la physique quantique.

Notons qu'alors que la non-trivialité du groupe d'automorphismes du groupe modulaire donne une mesure de nature non-traciale à l'état, la condition KMS pour le groupe d'automorphismes du groupe modulaire fournit le lien manquant entre les valeurs $\omega(AB)$ et $\omega(BA)$, pour tout $A, B \in \mathcal{M}$ (d'où l'utilisation de terme "modulaire", comme dans la théorie de l'intégration sur les groupes localement compacts).

La condition modulaire est assez restrictive. Seul le groupe modulaire peut satisfaire la condition modulaire pour $(\mathcal{M}, \Omega)$, et le groupe modulaire pour un état peut satisfaire la condition modulaire seulement dans les états différant de l'état original par l'action d'un élément dans le centre de $\mathcal{M}$.

Théorème 2.2. Soit $\mathcal{M}$ une algèbre de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparateur Ω, et appelons $\{\sigma_t\}$ le groupe d'automorphismes du groupe modulaire correspondant. Si l'état induit ω satisfait la condition modulaire par rapport au groupe $\{\alpha_t\}$ des automorphismes de $\mathcal{M}$, alors $\{\alpha_t\}$ doit coïncider avec $\{\sigma_t\}$. De plus, un état normal ψ sur $\mathcal{M}$ satisfait la condition modulaire par rapport à $\{\sigma_t\}$ si et seulement si $\psi(\cdot) = \omega(h\,\cdot) = \omega(h^{1/2}\,\cdot\,h^{1/2})$ pour un opérateur injectif unique positif h associé au centre de $\mathcal{M}$.

Par conséquent, si $\mathcal{M}$ est un facteur, deux états distincts ne peuvent pas partager le même groupe d'automorphismes du groupe modulaire. La relation entre les groupes d'automorphismes du groupe modulaire de deux états différents sera décrite plus en détails.

Une algèbre et deux états

Considérons une algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$ avec deux vecteurs cycliques et séparateurs Ω et Φ, et dénotons par ω et ϕ, respectivement, les états induits sur $\mathcal{M}$. Dénotons par $\{\sigma_t^\omega\}$ et $\{\sigma_t^\phi\}$ les groupes modulaires correspondant. Il y a une relation générale entre les groupes d'automorphismes du groupe modulaire de ces états.

Théorème 2.3. Il existe une application σ-fortement continue $\mathbb{R} \ni t \mapsto U_t \in \mathcal{M}$ telle que

(1) U_t est unitaire, pour tout $t \in \mathbb{R}$;

(2) $U_{t+s} = U_t \sigma_t^\omega(U_s)$, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$;

(3) $\sigma_t^\phi(A) = U_t \sigma_t^\omega(A) U_t{}^*$, pour tout $A \in \mathcal{M}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Le un-cocycle $\{U_t\}$ est communément appelé le *cocycle dérivatif* de ϕ par rapport à ω et on écrit $U_t = (D\phi : D\omega)_t$. Il y a une règle de déduction pour ce dérivatif, qui est : Si ϕ, ψ et ρ sont des états normaux fidèles sur $\mathcal{M}$, alors $(D\psi : D\phi)_t = (D\psi : D\rho)_t (D\rho : D\phi)_t$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut en dire davantage à propos du cocycle dérivatif si les états satisfont l'une quelconque des conditions du théorème suivant.

Théorème 2.4. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(1) ϕ est $\{\sigma_t^\omega\}$-invariant ;

(2) ω est $\{\sigma_t^\phi\}$-invariant ;

(3) il existe un unique opérateur positif injectif h associé à $\mathcal{M}^{\sigma^\omega} \cap \mathcal{M}^{\sigma^\phi}$ tel que $\omega(\cdot) = \phi(h\,\cdot) = \phi(h^{1/2}\ \cdot h^{1/2})$;

(4) il existe un unique opérateur positif injectif h' associé à $\mathcal{M}^{\sigma^\omega} \cap \mathcal{M}^{\sigma^\phi}$ tel que $\phi(\cdot) = \omega(h'\,\cdot) = \omega(h'^{1/2}\ \cdot h'^{1/2})$;

(5) les normes des fonctionnelles linéaires $\omega + i\phi$ et $\omega - i\phi$ sont égales ;

(6) $\sigma_t^\omega \sigma_s^\phi = \sigma_s^\phi \sigma_t^\omega$, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.

Les conditions du Théorème 2.4 s'avèrent être équivalentes au fait que le cocycle dérivatif est une représentation.

Théorème 2.5. Le cocycle $\{U_t\}$ entrelaçant $\{\sigma_t^\omega\}$ avec $\{\sigma_t^\phi\}$ est un groupe de représentation du groupe additif des réels si et seulement si ϕ et ω satisfont les conditions du Théorème 2.4. Dans ce cas, $U(t) = h^{-it}$.

L'opérateur $h' = h^{-1}$ dans le Théorème 2.4 est appelé le *dérivatif de Radon-Nikodym* de ϕ par rapport à ω et il est souvent dénoté par $d\phi/d\omega$, du fait du résultat suivant, que, si l'algèbre $\mathcal{M}$ est abélienne, *c'est* le théorème bien connu de Radon-Nikodym de la théorie de la mesure.

Théorème 2.6. Si ϕ et ω sont des fonctionnelles linéaires positives normales sur $\mathcal{M}$ telles que $\phi(A) \leq \omega(A)$, pour tous les éléments positifs $A \in \mathcal{M}$, alors il existe un élément unique $h^{1/2} \in \mathcal{M}$ tel qu'il existe un unique opérateur positif injectif tel que $\phi(\cdot) = \omega(h^{1/2} \cdot h^{1/2})$ et $0 \leq h^{1/2} \leq 1$.

Bien que nous n'ayons pas assez de place pour traiter le sujet correctement, les analogies avec la théorie de la mesure ne sont pas accidentelles. En effet, toute trace normale sur une algèbre (finie) de von Neumann $\mathcal{M}$ donne naissance à une théorie de l'intégration non-commutative de manière naturelle. La théorie modulaire permet une extension de cette théorie au réglage des fonctionnelles fidèles normales η sur les algèbres de von Neumann $\mathcal{M}$ de n'importe quel type, permettant la définition d'espaces non-commutatifs L^p, $L^p(\mathcal{M}, \eta)$.

3. Invariants modulaires et classification des algèbres de von Neumann

Comme mentionné précédemment, la structure modulaire apporte de l'information sur l'algèbre. Ceci est mieux mis en évidence dans la structure des facteurs de type III. Comme cette théorie est plutôt compliquée, seul un survol de quelques-uns des résultats peut être donné.

Si $\mathcal{M}$ est une algèbre de type III, alors son produit croisé $\mathcal{N} = \mathcal{M} \rtimes_{\sigma^\omega} \mathbb{R}$ relatif au groupe d'automorphismes du groupe modulaire de tout état normal fidèle ω sur $\mathcal{M}$ est une algèbre de type II_∞ avec une trace normale semi-finie fidèle τ telle que $\tau \circ \theta_t = e^{-t}\tau$, $t \in \mathbb{R}$, où θ est le dual de σ^ω sur $\mathcal{N}$. De plus, l'algèbre $\mathcal{M}$ est isomorphe au produit croisé $\mathcal{N} \rtimes_\theta \mathbb{R}$, et la décomposition est unique dans un sens très fort. Ce théorème de structure entraîne l'existence d'invariants algébriques importants pour $\mathcal{M}$, qui a de nombreuses conséquences, l'une d'entre elles étant fournie explicitement ci-dessous.

Si ω est un état normal fidèle sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$ induite par Ω, dénotons par Δ_ω l'opérateur modulaire associé à $(\mathcal{M}, \Omega)$ et dénotons par $\mathrm{sp}\,\Delta_\omega$ le spectre de Δ_ω. L'intersection

$$S'(\mathcal{M}) = \cap\, \mathrm{sp}\,\Delta_\omega$$

sur tous les états fidèles normaux ω de $\mathcal{M}$ est un invariant algébrique de $\mathcal{M}$.

Théorème 3.1. Soit $\mathcal{M}$ un facteur agissant sur un espace de Hilbert séparable. Si $\mathcal{M}$ est de type III, alors $0 \in S'(\mathcal{M})$; sinon, $S'(\mathcal{M}) = \{0, 1\}$ si $\mathcal{M}$ est de type I_∞ ou II_∞ et $S'(\mathcal{M}) = \{1\}$ sinon. Soit maintenant $\mathcal{M}$ un facteur de type III.

(i) $\mathcal{M}$ est de type III_λ, $0 < \lambda < 1$, si et seulement si $S'(\mathcal{M}) = \{0\} \cup \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) $\mathcal{M}$ est de type III_0 si et seulement si $S'(\mathcal{M}) = \{0, 1\}$.

(iii) $\mathcal{M}$ est de type III_1 si et seulement si $S'(\mathcal{M}) = [0, \infty)$.

Dans certaines situations physiquement pertinentes, les spectres des opérateurs modulaires des états normaux fidèles coïncident, de telle façon que le théorème 3.1 entraîne qu'il suffit de calculer le spectre de n'importe quel opérateur modulaire convenablement choisi pour déterminer le type de $\mathcal{M}$. Dans d'autres situations, il y a des états particuliers ω tels que $S'(\mathcal{M}) = \mathrm{sp}\,\Delta_\omega$. Un tel exemple est fourni par les systèmes asymptotiquement abéliens. Une algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$ est dite être *asymptotiquement abélienne* s'il existe une séquence $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'automorphismes de $\mathcal{M}$ telle que la limite de $\{A\alpha_n(B) - \alpha_n(B)A\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans la topologie des opérateurs forts est zéro, pour tout $A, B \in \mathcal{M}$. Si l'état ω est α_n-invariant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{sp}\,\Delta_\omega$ est contenu dans $\mathrm{sp}\,\Delta_\phi$, pour tous les états fidèles normaux ϕ sur $\mathcal{M}$, de telle façon que $S'(\mathcal{M}) = \mathrm{sp}\,\Delta_\omega$. Si, de plus, $\mathrm{sp}\,\Delta_\omega = [0, \infty)$, alors $\mathrm{sp}\,\Delta_\omega = \mathrm{sp}\,\Delta_\phi$, pour tout ϕ comme décrit.

4. Cônes auto-duals

Dénotons par $j : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ l'$*$-isomorphisme antilinéaire défini par $j(A) = JAJ$, $A \in \mathcal{M}$. Le *cône naturel positif* $\mathcal{P}^\natural$ associé à la paire $(\mathcal{M}, \Omega)$ est défini comme la fermeture dans $\mathcal{H}$ de l'ensemble des vecteurs

$$\{Aj(A)\Omega \mid A \in \mathcal{M}\}.$$

Dénotons par $\mathcal{M}_+$ l'ensemble de tous les éléments positifs de $\mathcal{M}$. Le théorème suivant recense les attributs essentiels du cône naturel.

Théorème 4.1.

(1) $\mathcal{P}^\natural$ coïncide avec la fermeture dans $\mathcal{H}$ de l'ensemble $\{\Delta^{1/4}A\Omega \mid A \in \mathcal{M}_+\}$.

(2) $\Delta^{it}\mathcal{P}^\natural = \mathcal{P}^\natural$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(3) $J\Phi = \Phi$ pour tout $\Phi \in \mathcal{P}^\natural$.

(4) $Aj(A)\mathcal{P}^\natural \subset \mathcal{P}^\natural$ pour tout $A \in \mathcal{M}$.

(5) $\mathcal{P}^\natural$ est un cône pointé, auto-dual, dont le sous-espace vectoriel engendré coïncide avec $\mathcal{H}$.

(6) Si $\Phi \in \mathcal{P}^\natural$, alors Φ est cyclique pour $\mathcal{M}$ si et seulement si Φ est séparateur pour $\mathcal{M}$.

(7) Si $\Phi \in \mathcal{P}^\natural$ est cyclique, et donc séparateur, pour $\mathcal{M}$, alors la conjugaison modulaire dans le cône naturel associé à la paire $(\mathcal{M}, \Phi)$ coïncide avec J et $\mathcal{P}^\natural$, respectivement.

(8) Pour toute fonctionnelle linéaire positive normale ϕ sur $\mathcal{M}$, il existe un vecteur unique $\Phi_\phi \in \mathcal{P}^\natural$ tel que $\phi(A) = \langle \Phi_\phi, A\Phi_\phi \rangle$, pour tout $A \in \mathcal{M}$.

En fait, les algèbres $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont caractérisées de manière unique par le cône naturel $\mathcal{P}^\natural$ [4]. À la lumière de (8), si α est un automorphisme de $\mathcal{M}$, alors

$$V(\alpha)\Phi_\phi = \Phi_{\phi \circ \alpha^{-1}}$$

définit un opérateur isométrique sur $\mathcal{P}^\natural$, qui par (5) s'étend à un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}$. L'application $\alpha \mapsto V(\alpha)$ définit une représentation unitaire du groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ sur $\mathcal{M}$ de telle manière que $V(\alpha)AV(\alpha)^{-1} = \alpha(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}$ et $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$. En effet, on a le théorème suivant.

Théorème 4.2. Soit $\mathcal{M}$ une algèbre de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparateur Ω. Le groupe $\mathcal{V}$ de tous les unitaires V satisfaisant

$$V\mathcal{M}V^* = \mathcal{M}, \quad VJV^* = J, \quad V\mathcal{P}^\natural = \mathcal{P}^\natural$$

est isomorphe à $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ selon l'application suivante $\alpha \mapsto V(\alpha)$, qui est appelée l'implémentation standard de $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$.

Souvent les (anti-)automorphismes de $\mathcal{M}$ sont d'un intérêt physique particulier parce qu'ils laissent ω invariant. Ils peuvent seulement être implémentés par des (anti-)unitaires qui laissent la paire $(\mathcal{M}, \Omega)$ invariante. En fait, si U est un opérateur unitaire ou anti-unitaire satisfaisant $U\Omega = \Omega$ et $U\mathcal{M}U^* = \mathcal{M}$, alors U commute à la fois avec J et Δ.

5. Deux algèbres et un état

Motivée par des applications à la théorie quantique des champs, l'étude des structures modulaires associées aux algèbres de von Neumann à un état et plus a commencé (voir l'article de survol [2] pour des références et des détails). Soit $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ des algèbres de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparateur Ω. $\Delta_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}}$ et $\Delta_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}$ dénoteront les objets modulaires correspondant. La structure $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \Omega)$ est appelée une *inclusion modulaire de $\pm$-demi-côté* si $\Delta_{\mathcal{M}}^{it}\mathcal{N}\Delta_{\mathcal{M}}^{-it} \subset \mathcal{N}$, pour tout $\pm t \geq 0$.

Théorème 5.1. Soit $\mathcal{M}$ une algèbre de von Neumann de vecteur cyclique et séparateur Ω. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe une sous-algèbre propre $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ telle que $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \Omega)$ est une inclusion modulaire à $\mp$-demi-côté.

(ii) Il existe un groupe unitaire $\{U(t)\}$ à générateur positif tel que

$$U(t)\mathcal{M}U(t)^{-1} \subset \mathcal{M}\,, \text{ pour tout } \pm t \geq 0, \quad \text{et} \quad U(t)\Omega = \Omega\,, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

De plus, si ces conditions sont satisfaites, alors les relations suivantes doivent être vérifiées :

$$\Delta^{it}_{\mathcal{M}} U(s) \Delta^{-it}_{\mathcal{M}} = \Delta^{it}_{\mathcal{N}} U(s) \Delta^{-it}_{\mathcal{N}} = U(e^{\mp 2\pi t} s)$$

et

$$J_{\mathcal{M}} U(s) J_{\mathcal{M}} = J_{\mathcal{N}} U(s) J_{\mathcal{N}} = U(-s),$$

pour tout $s, t \in \mathbb{R}$. De plus, $\mathcal{N} = U(\pm 1)\mathcal{M}U(\pm 1)^{-1}$, et si $\mathcal{M}$ est un facteur, il doit être de type III_1.

La richesse de cette structure est davantage suggérée par le théorème suivant.

Théorème 5.2.

(a) Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_1, \Omega)$ et $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_2, \Omega)$ de demi-côté $-$, resp. de demi-côté $+$, les inclusions modulaires satisfont la condition $J_{\mathcal{N}_1} J_{\mathcal{N}_2} = J_{\mathcal{M}} J_{\mathcal{N}_2} J_{\mathcal{N}_1} J_{\mathcal{M}}$. Alors les unitaires modulaires $\Delta^{it}_{\mathcal{M}}, \Delta^{is}_{\mathcal{N}_1}, \Delta^{iu}_{\mathcal{N}_2}$, $s, t, u \in \mathbb{R}$, engendrent une représentation fidèle continue unitaire du composant identité du groupe d'isométries de l'espace de Minkowski à deux dimensions.

(b) Soient $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$ des algèbres de von Neumann avec un vecteur cyclique commun et séparateur Ω. Si $(\mathcal{M}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N}, \Omega)$ et $(\mathcal{N}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N}, \Omega)$ sont de demi-côté $-$, resp. de demi-côté $+$, les inclusions modulaires telles que $J_{\mathcal{N}} \mathcal{M} J_{\mathcal{N}} = \mathcal{M}$, alors les unitaires modulaires $\Delta^{it}_{\mathcal{M}}, \Delta^{is}_{\mathcal{N}}, \Delta^{iu}_{\mathcal{N} \cap \mathcal{M}}$, $s, t, u \in \mathbb{R}$, engendrent une représentation unitaire continue fidèle de $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$.

Cela a amené à une notion encore plus utile. Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ et Ω est cyclique pour $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}$, alors $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \Omega)$ est dit être *intersection* $\pm$*-modulaire* si à la fois les $(\mathcal{M}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N}, \Omega)$ et les $(\mathcal{N}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N}, \Omega)$ sont des inclusions à $\pm$-demi-côtés modulaires

$$J_{\mathcal{N}} \Big[\lim_{t \to \mp\infty} \Delta^{it}_{\mathcal{N}} \Delta^{-it}_{\mathcal{M}} \Big] J_{\mathcal{N}} = \lim_{t \to \mp\infty} \Delta^{it}_{\mathcal{M}} \Delta^{-it}_{\mathcal{N}}\,,$$

où l'existence de limites pour l'opérateur fort est assurée par les assertions précédentes. Un exemple de l'utilité de cette structure est le théorème suivant.

Théorème 5.3. Soient $\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{L}$ des algèbres de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparateur Ω. Si les $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \Omega)$ et les $(\mathcal{N}', \mathcal{L}, \Omega)$ sont des intersections $-$-modulaires et les $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \Omega)$ sont des intersections $+$-modulaires, alors les unitaires $\Delta^{it}_{\mathcal{M}}, \Delta^{is}_{\mathcal{N}}, \Delta^{iu}_{\mathcal{L}}$, $s, t, u \in \mathbb{R}$, engendrent une représentation fidèle continue de $SO^{\uparrow}(1, 2)$.

Ces résultats et leurs extensions à des nombres plus grands d'algèbres ont été développés pour une application à la théorie des champs quantiques, mais on peut anticiper que les inclusions modulaires à demi-côtés trouveront un usage d'application plus étendu. La théorie modulaire s'est aussi avérée fructueuse dans la théorie des inclusions $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ des algèbres proprement infinies avec indice fini ou infini.

6. Applications à la théorie quantique

La théorie de Tomita-Takesaki a trouvé de nombreuses applications dans la théorie quantique des champs et dans la mécanique quantique statistique. Comme mentionné précédemment, le groupe d'automorphismes du groupe modulaire satisfait la condition KMS, une propriété qui a un sens physique dans la théorie quantique des systèmes à plusieurs particules, qui inclut la mécanique statistique quantique et la théorique quantique des champs. Dans de tels paradigmes, il se trouve que pour une algèbre d'observables adéquate $\mathcal{M}$ et un état ω, un groupe d'automorphismes $\{\sigma_{\beta t}\}$ représentant l'évolution temporelle satisfait la condition modulaire. Par conséquent, d'un côté, $\{\sigma_{\beta t}\}$ est le groupe d'automorphismes du groupe modulaire de la paire $(\mathcal{M}, \Omega)$, et, d'un autre côté, ω est un état d'équilibre à l'inverse de la température β, avec toutes les conséquences que ces deux états de fait entraînent.

Mais il est devenu de plus en plus clair que les objets modulaires Δ^{it}, J, de certaines algèbres d'observables et d'états codaient une information physique supplémentaire. En 1975, on a découvert que si on considère les algèbres d'observables associées à une théorie des champs quantique avec un composant fini satisfaisant les axiomes de Wightman, alors les objets modulaires associés à l'état de vide et les algèbres d'observables localisées dans certaines régions en forme de coins dans l'espace de Minkowski ont un contenu géométrique. En fait, le groupe unitaire $\{\Delta^{it}\}$ implémente le groupe de Lorentz laissant les régions en question invariantes (cette propriété est maintenant appelée la *covariance modulaire*), et l'involution modulaire J implémente la réflexion de l'espace-temps par rapport au côté du coin, de même qu'une conjugaison de charge. Cette découverte a engendré une activité de recherche intense [2].

6.1. Énergie positive

En physique quantique, le développement temporel du système est souvent représenté par un groupe fortement continu $\{U(t) = e^{itH} \mid t \in \mathbb{R}\}$ d'opérateurs unitaires, et le générateur H est interprété comme l'énergie totale du système. Il y a un lien entre la structure modulaire et l'énergie positive, qui a trouvé de nombreuses applications en théorie quantique des champs. Ce résultat est crucial dans le développement du théorème 5.1 et a motivé en 1975 la découverte mentionnée ci-dessus, maintenant communément appelée Théorème de Bisognano-Wichmann.

Théorème 6.1. Soit $\mathcal{M}$ une algèbre de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparateur Ω, et soit $\{U(t)\}$ un groupe unitaire continu satisfaisant $U(t)\mathcal{M}U(-t) \subset \mathcal{M}$, pour tout $t \geq 0$. Alors n'importe quelles deux des conditions suivantes en impliquent une troisième.

(1) $U(t) = e^{itH}$, avec $H \geq 0$;

2. Voir [1,2,5] pour de plus amples détails et références.

(2) $U(t)\Omega = \Omega$, pour tout $t \in \mathbb{R}$;

(3) $\Delta^{it} U(s) \Delta^{-it} = U(e^{-2\pi t} s)$ et $JU(s)J = U(-s)$, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$.

6.2. Nucléarité modulaire et propriétés de l'espace des phases

La théorie modulaire peut être utilisée pour exprimer les propriétés physiques significatives des "espaces des phases" quantiques par une condition de compacité ou de nucléarité de certaines applications. Dans sa forme initiale, la condition était formulée en fonction de l'Hamiltonien, l'opérateur d'énergie globale des théories dans l'espace de Minkowski. Les indications ci-dessus que les opérateurs modulaires transportent de l'information à propos de l'énergie du système furent renforcées quand on montra qu'une formulation en termes d'opérateurs modulaires était essentiellement équivalente.

Soient $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ des sous-régions ouvertes non vides délimitées de l'espace de Minkowski avec leurs algèbres d'observables correspondantes $\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ dans une représentation vide avec vecteur vide Ω, et appelons Δ l'opérateur modulaire associé à $(\mathcal{A}(\mathcal{O}_2), \Omega)$ (par le théorème de Reeh-Schlieder, Ω est cyclique et séparateur pour $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$). Pour tout $\lambda \in (0, 1/2)$, on définit l'application $\Xi_\lambda : \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \to \mathcal{H}$ par $\Xi_\lambda(A) = \Delta^\lambda A \Omega$. La compacité de n'importe laquelle de ces applications implique la compacité de toutes les autres. De plus, les normes ℓ^p (nucléaires) de ces applications sont reliées entre elles et fournissent une mesure du nombre de degrés de liberté locaux du système. Des conditions adéquates sur les applications en fonction de ces normes entraînent une condition d'indépendance statistique forte appelée la propriété de séparation [3]. Inversement, la propriété de séparation implique la compacité de toutes ces applications. De plus, l'existence d'états d'équilibre de température de l'algèbre globale des observables peut être déduite de conditions adéquates sur ces normes dans le secteur vide.

L'avantage conceptuel de la compacité modulaire et des conditions de nucléarité comparées à la forme originelle par l'Hamiltonien réside dans le fait qu'elles ont aussi du sens pour les systèmes quantiques dans les espaces-temps courbes, où les opérateurs d'énergie globale (i.e. les générateurs correspondant aux champs de vecteurs globaux de Killing) peuvent ne pas exister.

6.3. Position modulaire et théorie quantique des champs

La caractérisation de la position "géométrique" relative d'algèbres basée sur les notions d'inclusion modulaire et d'intersection modulaire a été directement motivée par le théorème de Bisognano-Wichmann. Les algèbres d'observables associées à des régions de coins convenablement choisies dans l'espace de Minkowski fournissent des exemples dont la structure principale pourrait être abstraite pour une application plus générale, ayant pour résultat les notions présentées dans la Section 5.

Le Théorème 5.2 (b) a été utilisé pour construire à partir de deux algèbres et des inclusions modulaires indiquées de demi-côtés une théorie quantique des champs conforme sur le cercle (à rayon de

3. split property.

lumière compactifié) avec une énergie positive. Et puisque la partie chirale d'un modèle de champ quantique conforme en deux dimensions d'espace-temps amène de telles inclusions modulaires à demi-côtés, étudier de telles inclusions dans le théorème 5.2 (b) équivaut à étudier de telles théories des champs. Les Théorèmes 5.2 (a) et 5.3 et leurs généralisations aux inclusions impliquant jusqu'à 6 algèbres ont été utilisés pour construire des réseaux covariants de Poincaré des algèbres d'observables (la forme algébrique des théories quantiques des champs) satisfaisant la condition sur le spectre sur l'espace de Minkowski $d+1$-dimensionel pour $d = 1, 2, 3$. Inversement, de telles théories quantiques des champs amènent naturellement à de tels systèmes d'algèbres.

Cette relation intime semblerait ouvrir la possibilité de construire des théories quantiques des champs à partir d'un nombre limité d'inclusions/intersections modulaires.

6.4. Action géométrique modulaire

Le fait que les objets modulaires, dans la théorie quantique des champs, associés à des régions à forme de coins dans l'état vide de l'espace de Minkowski aient un sens géométrique ("l'action modulaire géométrique") a été découvert au départ dans le modèle des axiomes de Wightman. Comme la théorie quantique algébrique des champs (AQFT) ne repose pas sur le concept des champs de Wightman, il était naturel de se demander (1) quand l'action modulaire géométrique peut avoir lieu dans AQFT et (2) quelles conséquences physiquement pertinentes découlent de cette fonctionnalité ?

Il y a deux approches à l'étude de l'action modulaire géométrique. Dans la première, l'attention est portée sur la covariance modulaire, exprimée en fonction des groupes modulaires associés aux algèbres de coins et à l'état de vide de l'espace de Minkowski. La covariance modulaire a été démontrée comme pouvant être obtenue dans AQFT conformément invariante, dans n'importe quelle théorie de masse satisfaisant à la complétude asymptotique, et aussi en la présence d'autres suppositions physiques naturelles. Pour mentionner seulement trois de ses conséquences, à la fois le théorème statistique de spin, et le théorème PCT, ainsi que l'existence d'une représentation unitaire continue du groupe de Poincaré agissant de façon covariante sur les algèbres d'observables et satisfaisant les conditions de spectre, découlent de la covariance modulaire.

Dans une seconde approche de l'action modulaire géométrique, les involutions modulaires sont regardées en premier lieu. Ici, aucune connexion *a priori* entre les objets modulaires et les isométries de l'espace-temps n'est supposée. La supposition centrale, étant donné un vecteur d'état Ω et les algèbres de von Neumann des observables localisées $\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}$ sur l'espace-temps, est qu'il existe une famille $\mathcal{W}$ d'espaces-temps telle que $J_{W_1}\mathcal{R}(W_2)J_{W_1} \in \{\mathcal{R}(W) \mid W \in \mathcal{W}\}$, pour tout $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$. Cette condition ne fait pas appel explicitement aux isométries ou à d'autres attributs spécifiques et est ainsi applicable en principe aux théories quantiques des champs sur des espaces-temps courbés généraux.

Il a été montré que pour certains espaces-temps, incluant l'espace de Minkowski, sous certaines suppositions techniques additionnelles, les involutions modulaires codent suffisamment d'information pour déterminer la dynamique de la théorie, le groupe d'isométries de l'espace-temps, et une représentation unitaire continue du groupe d'isométries qui agit de façon covariante sur les observables et laisse l'état invariant. Dans certains cas incluant l'espace de Minkowski, il est même possible de dériver l'espace-temps lui-même du groupe $\mathcal{J}$ engendré par les involutions modulaires $\{J_W \mid W \in \mathcal{W}\}$.

Les unitaires modulaires Δ_W^{it} entrent dans cette approche à travers une condition qui est destinée à assurer la stabilité de la théorie, notamment que $\Delta_W^{it} \in \mathcal{J}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $W \in \mathcal{W}$. Dans l'espace de Minkowski, cette condition additionnelle entraîne que la représentation dérivée du groupe de Poincaré satisfait la condition sur le spectre.

6.5. Applications avancées

Comme observé précédemment, à travers sa connexion proche avec la condition KMS, la théorie modulaire entre naturellement dans la thermodynamique de l'équilibre de systèmes à plusieurs corps. Mais dans le travail récent sur la théorie de la thermodynamique du non-équilibre, elle joue également un rôle en donnant un sens mathématique à la notion de systèmes quantiques à équilibre thermodynamique local. La théorie modulaire s'est aussi avérée utile dans les récents développements dans la théorie des règles de super-sélection et leurs secteurs connexes, les champs de charges et transports de charges.

Références

[1] Baumgärtel H., Wollenberg M. (1992) *Causal Nets of Operator Algebras*. Akademie-Verlag, Berlin.

[2] Borchers H.J. (2000) On revolutionizing quantum field theory with Tomita's modular theory, *Journal of Mathematical Physics*, **41**, 3604-3673.

[3] Bratteli O., Robinson D.W. (1981) *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York.

[4] Connes A. (1974) Caractérisation des algèbres de von Neumann comme espaces vectoriels ordonnés, *Annales de l'Institut Fourier*, **24**, 121-155.

[5] Haag R. (1992) *Local Quantum Physics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York.

[6] Kadison R.V., Ringrose J.R. (1986) *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, Volume II. Academic Press, Orlando.

[7] Pedersen G.K. (1979) *C^*-Algebras and Their Automorphism Groups*. Academic Press, New York.

[8] Stratila, S. (1981) *Modular Theory in Operator Algebras*. Abacus Press, Tunbridge Wells.

[9] Takesaki M. (1970) *Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and Its Applications*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 128. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York.

[10] Takesaki M. (2003) *Theory of Operator Algebras II*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York.