Préhistoire de la fonction zeta

André Weil

En substance au moins, le fait qu'une série *infinie* de termes puisse avoir une somme *finie* était connu des Grecs, d'abord comme le paradoxe philosophique d'"Achille et la tortue"), puis, par Archimède si ce n'est plus tôt, comme résultat mathématique utilisé par lui dans sa *Quadrature de la Parabole* (v. [1], p. 312-315, prop. XXIV) ; là, en substance, il somme la progression géométrique infinie de raison $\frac{1}{4}$. Avec la même facilité, en utilisant *Eucl.* IX.35, il aurait pu sommer n'importe quelle progression de raison < 1 ; le cas de la raison $\frac{1}{2}$ est aussi implicite dans *Eucl.* X.1.

En 1644, inspiré de façon évidente par le traité d'Archimède, Torricelli publie à Florence son *De dimensione parabolae* (qu'il appela "*le plus banal de tous les sujets banals*"), qui couvre le même domaine et bien davantage ([2] p. 89-162). Là, mécontent des progressions géométriques, il écrit ([2], p. 149-150) une assertion marginale, pour toute séquence décroissante "finie ou infinie" de nombres positifs, l'identité qu'il devrait écrire, dans le cas d'une séquence finie $(a_0, a_1, .., a_n)$, comme

$$a_0 = \sum_{i=0}^{n-1}(a_i - a_{i+1}) + a_n;$$

ici a_n est "le dernier nombre" de la séquence, avec la compréhension que,

 N.B.

Dans cet article, la notation $\zeta(m)$, avec m réel, sera utilisée comme une abréviation pour la série (convergente ou non) qui, en notation moderne, s'écrirait $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-m}$ et que les mathématiciens précédents (incluant Euler, mais pas encore Mengoli) écrivaient

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \text{etc.}$$

pour une progression infinie géométrique, ce “dernier nombre” est “rien ou un point” ; dans notre langage, bien sûr, on devrait dire que a_n doit être remplacé par la limite de la séquence. De cela, Torricelli dérive une preuve élégante pour la somme d'une progression géométrique infinie de raison < 1.

En 1650, potentiellement peut-être sous l'influence de cette note marginale, un jeune professeur à Bologne, Pietro Mengoli, le successeur du grand Cavalieri, publie un livre ([3]) entièrement dédié à la théorie des séries infinies. Son titre, *Novae Quadraturae Arithmeticae Seu De Additione Fractionum*, semble être une référence à Archimède et Torricelli ; vraiment aucune “quadrature” (i.e., aucun calcul d'aires) n'apparaît dans le livre. Même pour ses contemporains, le manque presque complet de notations algébriques doit l'avoir rendu difficile à lire (cf. [4]). Avec deux exceptions (qu'il faut bien prendre en compte), il traite exclusivement de séries dans lesquelles la somme peut être effectuée explicitement par des moyens élémentaires, en effet, comme application de l'identité de Torricelli. Le premier exemple, et un exemple typique, est celui de la somme des inverses des “nombres triangulaires” $n(n+1)/2$, i.e., de la série

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\text{etc.}$$

Ici, bien sûr, le m-ième terme est

$$\frac{2}{(m+1)(m+2)}=\frac{2}{m+1}-\frac{2}{m+2}$$

de telle manière que la somme des m premiers termes est $1-2/m+2$, et la somme de la série est 1.

Plus important pour notre présent sujet est le fait que Mengoli prouve la divergence de la “série harmonique” $\zeta(1)$ et fait surgir, pour la première fois, la question de la sommation de la série $\zeta(2)$. À propos de cette dernière, il exprime (aussi bien qu'il le peut) son questionnement à propos du fait que les inverses des "nombres triangulaires" peuvent être sommés, mais non pas ceux des "nombres carrés" ; "*cela*", écrit-il, "*nécessite l'aide d'un intellect plus riche [que le mien]*". Pour la divergence des séries harmoniques, pourtant, il apporte une preuve plus intelligente, basée sur l'inégalité

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} > \frac{3}{a},$$

qui peut être représentée par le schéma

$$\frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{3}{3} = 1} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{> \frac{3}{6} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}}_{> \frac{3}{9} = \frac{1}{3}} + \underbrace{\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}}_{> \frac{3}{12} = \frac{1}{4}}}_{> \frac{3}{3} = 1,} + \text{etc.}$$

montrant que la série peut être décomposée en une infinité de sommes partielles (avec, respectivement, 1, 3, 9, 27 ... termes), chacune d'entre elles étant > 1.

Le *Novae Quadraturae* de Mengoli semble être resté presque complètement inconnu ; la seule référence contemporaine à ce texte apparaît dans une communication de Collins, contenue dans une lettre de 1673 de Oldenburg à Leibniz ([5a], Vol. I-1, p. 39 ; [5b], p. 85), où Collins note quelques uns des résultats de Mengoli et répète la question de Mengoli à propos de la somme de $\zeta(2)$. Pendant ce temps, cependant, des progrès notables sont faits. D'abord, en 1668, N. Kaufman, plus connu sous le nom de Mercator, a effectué "la quadrature de l'hyperbole." ([6]) Sa méthode, qui consistait en l'intégration terme à terme de la série

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

lui fit donner pour $\log(1+x)$ la série de puissances

$$\log\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

avec $0 < x < 1$. La même année également, au moyen d'une analyse minutieuse, Brouncker établit la validité de la formule ci-dessus pour $x = 1$ ([7]). i.e.,

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots$$

(une série étroitement liée à $\zeta(1)$, ce que Jacob Bernoulli observera plus tard). Newton ensuite, dans son *De Analysi per Aequationes Infinitas* ([8]), avait élevé les expansions des séries de puissances au statut d'outil universel pour l'analyse. Bientôt Leibniz devait effectuer "la quadrature du cercle", cette expression correspondant à la formule

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

qu'il prouva en substance en intégrant la série

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$$

La découverte de Leibniz ne fut pas imprimée avant 1682, ni celle de Newton qui le fut bien plus tard. En 1682 Leibniz publia sa formule $\pi/4$, mentionnant aussi quelques autres séries que celles ci-dessus, dans un article ([5a], Vol. II-1, p. 118-122) dans un des premiers numéros des *Acta Erudito-*

rum, nouvellement créés à Leipzig sous ses auspices. Plus tard, en 1689, un mathématicien de Bâle, encore peu connu à ce moment-là, Jacob Bernoulli, initia, sous le titre *Positiones de Seriebus Infinitis*, une série de thèses qui seraient "défendues" par ses étudiants à l'université, qu'il rassembla finalement en un traité systématique sur les séries infinies. Dans la première installation ([9], p. 375-402), il redécouvrit, parmi d'autres résultats qui étaient déjà connus de Mengoli, la divergence de la "série harmonique" $\zeta(1)$, et, exactement comme Mengoli, il exprima son interrogation au sujet de la difficulté de $\zeta(2)$; "*elle est finie*", écrit-il, "*comme cela apparaît en la comparant à une autre qui la majore trivialement", mais "sa sommation est plus difficile à trouver que ce à quoi on aurait pu s'attendre, et quiconque l'obtiendrait et nous la communiquerait gagnerait notre profonde gratitude.*"

Jusque là, de toutes les séries $\zeta(m)$, seules $\zeta(1)$, $\zeta(2)$, et une fois, incidemment, $\zeta(3)$ avaient été mentionnées. Cela change avec le second *Positiones* de Jacob Bernoulli en 1692 ([9], p. 517-542). Comme il n'a pas encore à sa disposition la fonction exponentielle a^x pour tous les réels x, il prend pour m un nombre rationnel arbitraire (supposément positif). Clairement il sait que $\zeta(m)$ converge pour $m \geq 2$ et diverge pour $m \leq 1$, puisque c'est ce qu'elle fait pour $m = 2$ et $m = 1$. Il n'est pas clair s'il sait qu'elle converge pour $1 < m < 2$, mais, cependant, son traitement sur ce point (*Pos.* XXIV, *Schol.* ; [9] p. 529-533) est purement formel. Séparant la série $\zeta(m)$ en les séries

$$\phi(m) = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + etc. \qquad \psi(m) = 1 + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + etc.$$

il obtient

$$\zeta(m) = \phi(m) + \psi(m), \qquad \phi(m) = 2^{-m}\zeta(m),$$

et par conséquent

$$\frac{\psi(m)}{\phi(m)} = 2^m - 1,$$

un résultat qu'il trouve paradoxal pour $m = \frac{1}{2}$, puisque dans ce cas, cela donne $\psi(m) < \phi(m)$, alors que chaque terme dans la série $\psi(m)$ est plus grand que le terme correspondant dans $\phi(m)$. "*Il semble*", ajoute-t-il, "*qu'un esprit fini ne peut pas comprendre l'infini*" ! Aurait-il, plutôt que de faire cette naïve remarque, réécrit son résultat sous la forme

$$\zeta(m) = (1 - 2^{-m})^{-1}\psi(m)$$

il aurait grimpé sur la première marche vers l'expression de $\zeta(m)$ comme un produit "Eulérien".

Aucune mention n'a encore été faite de l'évaluation numérique de la série $\zeta(m)$, un sérieux problème au vu de leur lente convergence. On peut lire avec difficulté les longues discussions sans conclusions, dans la correspondance entre Leibniz et Jacob Bernoulli ([5a], Vol. II-3, p. 25-27, 32-34, 44-45, 49) sur l'évaluation des sommes partielles de $\zeta(1)$ comme une contribution à ce sujet. Le calcul de $\zeta(2)$ a été entrepris par Daniel Bernoulli en 1728 et par Goldbach en 1729 ([10], Vol. II, p. 263 et 281-282), avec des résultats préliminaires, qui seraient bientôt améliorés par Euler.

Cela semble avoir donné à Euler sa première opportunité d'un contact avec la fonction ζ. Comme pour la plupart des questions qui ont un jour attiré son attention, il ne l'abandonna jamais, faisant souvent un certain nombre de contributions fondamentales à son sujet (cf. [11], p. 257-276). D'abord, il découvrit la formule ainsi appelée formule d'Euler-MacLaurin, qui lui a permis de calculer, avec un grand degré d'approximation, les sommes $\zeta(m)$ pour $m \geq 2$ et les sommes partielles de $\zeta(1)$ ([12], t. 14, p. 119-122). Ceci, pourtant, n'apporta pas de lumière sur la théorie de la fonction zeta, si ce n'est que cela introduisit pour la première fois les nombres de Bernoulli dans ce sujet, mais simplement comme coefficients de la formule d'Euler-MacLaurin.

Alors vint, en 1735, la découverte sensationnelle de la formule

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

basée sur une application audacieuse de la théorie des équations algébriques à l'équation transcendante $0 = 1 - \sin x$ ([12], t. 14, p. 13-14). Cela a été bientôt suivi par le calcul de $\zeta(m)$ pour $m = 4,\ 6$, etc. par la même méthode, et par un certain nombre de contributions à la théorie des fonctions trigonométriques qui légitima finalement les résultats sur $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, etc.

Un autre article, en 1737 ([12], t. 14, p. 216-244), établit le "produit Eulérien" pour $\zeta(m)$ et des séries diverses liées, incluant

$$L(m) = 1 - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} + \text{etc.}$$

Il consacra un chapitre entier (le chapitre XV) de sa grande *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1745 ([12], t. 8) à ce même sujet. De cela, il dériva, ou pensa qu'il pourrait dériver, le produit infini pour $L(1)$ ([12], t. 14, p. 233)

$$L(1) = \prod \frac{p}{p \pm 1}$$

où le produit est pris sur tous les nombres premiers impairs arrangés en ordre croissant et le signe est donné par $p \pm 1 \equiv 0 \pmod 4$.

Également importante dans ses conséquences finales, mais non moins négligée pendant plus d'un siècle, il y a la découverte d'Euler des équations fonctionnelles pour les séries en question. Cela commença en 1739 ([12], t.

14, p. 443) avec la relation

$$1 - 2^m + 3^m - 4^m + etc. = \frac{\pm 2.1.2.3 \ldots m}{\pi^{m+1}} \left(1 + \frac{1}{3^{m+1}} + \frac{1}{5^{m+1}} + etc.\right)$$

pour $m = 1, 3, 5, 7$. Le côté gauche doit être compris ici selon les idées d'Euler sur les séries divergentes, i.e. dans ce cas, par ce qui est connu sous le nom de sommation d'Abel. Ceci est clairement équivalent à l'équation fonctionnelle pour $\zeta(s)$ quand $s = 2, 4, 6, 8$, ou, plutôt, comme Euler le suggère une fois, pour toutes les valeurs positives paires de s. En 1749, sous le titre "*Remarques sur un beau rapport entre les séries de puissances tant directes qu'inverses*" ([12], t. 15, p. 70-90), Euler non seulement donna une tentative de preuve pour la formule ci-dessus, mais écrivit de façon conjecturale l'équation fonctionnelle pour la fonction zeta pour des valeurs arbitraires de l'argument (ou, plutôt, ce qui revient au même, pour la série très liée

$$(1 - 2^{1-n})\zeta(n) = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + etc.).$$

et également pour la série $L(n)$ donnée comme ci-dessus, ajoutant que la dernière était juste aussi certaine que la première et pourrait être plus facile à démontrer, "*apportant ainsi plus de lumière sur un certain nombre d'investigations semblables.*"

Le dernier article d'Euler sur le sujet, basé sur des recherches menées en 1752, a été écrit en 1775 et publié à titre posthume en 1785 ([12], t.4, p. 146-153). Il traite de la série $\sum \pm 1/p$, où la somme est calculée pour tous les nombres premiers impairs (en ordre croissant), et le signe, comme dans le produit infini de $L(1)$, est donné par $p \pm 1 \equiv 0 \pmod 4$. Ici il prend comme point de départ son produit infini pour $\zeta(2)$ et $L(1)$, dont il connaît les valeurs $\zeta(2) = \pi^2/6$ et $L(1) = \pi/4$, ce qui donne la formule

$$\frac{3\zeta(2)}{4L(1)^2} = 2 = \prod \frac{p \pm 1}{p \mp 1},$$

et par conséquent,

$$\frac{1}{2} \log 2 = 0.3465735902\ldots = \sum \pm \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \sum \pm \frac{1}{p^3} + \frac{1}{5} \sum \pm \frac{1}{p^5} + etc.$$

Du côté droit, la première série est celle qui doit être calculée ; toutes les autres sont absolument (mais lentement) convergentes. Euler les évalue numériquement par comparaison avec les valeurs connues de $L(3)$, $L(5)$, etc., et obtient finalement

$$\sum \pm \frac{1}{p} = 0.3349816\ldots$$

(alors qu'en 1752, il avait seulement obtenu pour cela la valeur 0,334980. . .).

Au vu de ce fait, conséquence également des ses résultats antérieurs, que $\sum 1/p$ est infini, cela lui permet de conclure qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4n + 1$, et une infinité de nombres premiers de la forme $4n - 1$, ceci étant un prélude aux articles célèbres de Dirichlet de 1837 sur les progressions arithmétiques ([13], Bd. I, p. 307-343).

Les articles de Dirichlet, si exceptionnels de rigueur mathématique alors qu'Euler ne se préoccupait pas de celle-ci, sont trop bien connus pour nécessiter des commentaires détaillés ici. Il suffira de noter que, basés comme ils le sont sur l'*Introductio* d'Euler de 1745 et sur le traitement par Gauss du groupe multiplicatif des entiers premiers à N modulo N quel que soit N, ils introduisent pour la première fois les "séries de Dirichlet" $L_\chi(s)$ attachées aux caractères de tels groupes, mais seulement pour les réels $s > 1$ quand elles sont absolument convergentes ; en fait, ces articles traitent les cas des propriétés de telles séries lorsque s tend vers 1. Il y avait encore un long saut à effectuer pour passer de cela à leur continuation analytique et à leur équation fonctionnelle.

La dernière étape a été effectuée par Riemann en 1859, au moins pour la fonction zeta elle-même ; mais elle avait été précédée par trois preuves pour l'équation fonctionnelle pour la série

$$L(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + etc.$$

dans le domaine $0 < s < 1$, où elle est convergente de façon conditionnelle. Le mathématicien suisse Malmstén a apporté sa preuve (mentionnant qu'une preuve similaire pouvait être donnée pour la fonction

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + etc.$$

et rappelant que ces deux résultats avaient été annoncés par Euler) dans un long article ([14]) écrit en mai 1846 et publié dans le Journal de Crelle en 1849. Schlömilch, clairement ignorant de l'article de Malmstén ainsi que de la priorité d'Euler, annonça le même résultat comme un exercice dans le *Grunert's Archiv*, également en 1849 ([15]) ; Clausen publia une solution à cet "exercice" dans le même *Archiv* en 1858 ([16]), et Schlömilch en publia sa propre démonstration ([17]).

Il a parfois été suggéré que ces publications ont fourni à Riemann la motivation de ses recherches sur la fonction zeta ; mais une source encore plus probable a été fournie récemment ([18]) sous la forme de la propre copie d'Eisenstein des *Disquisitiones* de Gauss dans leur traduction française par Poullet-Delisle (Paris, 1807). Sur la dernière page blanche de ce volume, Eisenstein a noté encore une autre preuve pour l'équation fonctionnelle de

$L(s)$; elle consiste essentiellement en une application évidente, sans aucune remarque ou référence pour la justifier, de la sommation de Poisson à la série en question, couplée à la formule

$$\int_0^\infty e^{\sigma\psi i}\psi^{q-1}d\psi = \frac{\Gamma(q)}{\sigma^q}e^{q\pi i/2} \qquad (0 < q < 1, \sigma > 0),$$

pour laquelle Eisenstein cite Dirichlet ([13], Bd. I, p. 401). Elle rend la transformation de Fourier de l'équation fonctionnelle égale à 0 pour $x < 0$ et à x^{q-1} pour $x > 0$.

La preuve d'Eisenstein est datée avec les mots "Scripsi 7 Avril 1849". Comme il ne revendique pas les résultats comme étant les siens, il pourrait les avoir obtenus de Malmstén ou de Schlömilch. Un fait intéressant, pourtant, est que le mois d'avril 1849 est précisément le mois où Riemann quitta finalement Berlin pour Göttingen. Lui et Eisenstein avaient été des amis intimes. Ainsi il n'est pas seulement possible, mais même plutôt probable, qu'Eisenstein ait discuté de sa preuve de 1849 avec Riemann avant le départ de ce dernier. S'il en est ainsi, cela aurait pu être l'origine de l'article de Riemann de 1859.

Bibliographie

[1] Archimedes, *Opera Omnia...*, Vol. II. J. L. Heiberg, ed., Lipsiae, (1913).

[2] Torricelli, *Opere di Evangelista Torricelli*, Vol. I, Part 1. G. Loria and G. Vassura, eds, Faenza (1919).

[3] Mengoli, Pietro. *Novae Qudraturae Arithmeticae seu De Additione Fractionum*, Bononiae (1650).

[4] Eneström, G. "Zur Geschichte der unendlichen Reihen um die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts," *Bibl. Math.* (III) 12 :135-148 (1911-12).

[5a] Gerhardt, C. I., ed. *Leibnizens mathematische Schriften.* 6 vols., Halle (1849-63).

[5b] Gerhardt, C. I. ed. *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibnitz.* Berlin (1899) ; G. Olm, ed., Hildesheim (1962).

[6] Mercator, Auctore Nicolao Mercatore. *Logarithmotechnia... accedit vera Quadratura Hyperbolae ...*, Londini (MDCLXVIII).

[7] Brouncker, Lord Viscount. "The Squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational Numbers... by that eminent Mathematician the right Honourable the Lord Viscount Brouncker," *Phil. Trans.* (1668).

[8] Whiteside, D. T., ed. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. II, Cambridge (1968).

[9] Bernoulli, Jacob. *Opera*, Tomus Primus, Genevae (1744).

[10] Fuss, P.H. *Correspondance mathématique et physique...*, Vol. II, St Petersbourg (1843), Johnson Reprint Corp. (1968).

[11] Weil, A. *Number Theory : An Approach through History*, Birkhäuser Boston (1983).

[12] Euler, Leonhard. *Opera Omnia, Series Prima*, 27 vols, Leipzig, Zurich (1911-56).

[13] Dirichlet, G. *Lejeune Dirichlet's Werke*, Bd. I, Berlin (1889).

[14] Malmstén, C. J. "De integralibus quibusdam definitis seriebusque infinitis," *J. fur reine u. ang. Math.* (Crelle's Journal), 38 :1-39 (1849).

[15] Schlömilch, O. "Uebungsaufgaben für Schüler, Lehrsatz von dem Herm Prof. Dr. Schlömilch," *Archiv der Math. u. Phys.* (Grunert's Archiv), 12 :415 (1849).

[16] Clausen, T. “Beweis des von Schlömilch … aufgestellten Lehrsatzes,” *Archiv der Math. u. Phys.* (Grunert’s Archiv), 30 :166-169 (1858).

[17] Schlömilch, O. “Ueber eine Eigenschaft gewisser Reihen,” *Zeitschr. fur Math. u. Phys.* 3 :130-132 (1858).

[18] Weil, A. *On Eisenstein’s copy of the Disquisitiones*, to appear.

Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers

André Weil

1952

La théorie analytique des nombres connaît quelques formules qui relient des sommes étendues à tous les zéros non triviaux de la fonction zêta à des sommes étendues aux puissances de nombres premiers[1]. Il n'est pas difficile d'étendre ces formules, dites "explicites", à des cas beaucoup plus généraux, et ce n'est là à vrai dire qu'un simple exercice. Si je me permets de l'offrir en hommage à Marcel Riesz, c'est que d'une part il met en valeur le rôle que joue dans la question une transformée de Fourier qui n'est pas une fonction mais une distribution au sens de L. Schwartz, et que d'autre part la structure formelle des formules ainsi obtenues semble présenter quelque intérêt, de sorte que par là elles méritent d'être mises à la disposition des chercheurs.

Rappelons d'abord la définition des fonctions L de Hecke "mit Grössencharakteren"[2]. Soit k un corps de nombres algébriques, de degré d sur le corps des rationnels ; si v est une valuation de k, on désignera par k_v, le corps déduit de k par complétion par rapport à v, et par k_v^* le groupe multiplicatif des éléments non nuls de k_v. Si v est une valuation diserète, elle correspond à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de k, et on se donnera le droit d'écrire $\mathfrak{p}$ au lien de v, donc $k_\mathfrak{p}, k_\mathfrak{p}^*$, au lieu de k_v, k_v^* ; on désignera en ce cas par $U_\mathfrak{p}$ le groupe (compact) des unités du corps $\mathfrak{p}$-adique $k_v = k_\mathfrak{p}$. On désignera par $v_\rho, (1 \leq \rho \leq r_1))$ les valuations archimédiennes réelles de k, par $v_{\imath, r_1+1 \leq \imath \leq r_1+r_2})$ les valuations archimédiennes complexes de k, et par k_λ le complété de k par rapport à v_λ $(1 \leq \lambda \leq r_1+r_2)$; k_ρ est donc pour tout ρ le corps des réels, et $k_\imath$ est pour tout $\imath$ le corps des complexes ; on posera $\eta_\rho = 1, \eta_{\imath=2}$.

On sait qu'on entend par un idèle de k un élément $a = (a_v)$ du groupe $\prod\limits_c k_c^*$ tel que $a_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}$ pour presque tout $\mathfrak{p}$ (c'est-à-dire pour tout $\mathfrak{p}$ à un nombre fini d'exceptions près) ; le groupe des idèles, topologisé de la manière "naturelle"[3], sera désigné par I_k ; P_k étant le groupe des idèles principaux, soit $C_k = I_k/P_k$. Soit χ un caractère de C_k, ou, ce qui revient au même, un caractère de I_k, prenant la valeur 1 sur P_k. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de k, soit $m(\mathfrak{p})$ le plus petit des entiers $m \geq 0$ tels que $\chi(a) = 1$ pour $a \in U_\mathfrak{p}$ (c'est-à-dire $a_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}$, et $a_v = 1$ pour $v \neq \mathfrak{p}$) et $a_\mathfrak{p} \equiv 1$ mod. $\mathfrak{p}^m$; de la continuité de χ sur I_k, il résulte que $m(\mathfrak{p})$ est toujours fini, et nul pour presque tout $\mathfrak{p}$, donc que $\mathfrak{f} = \prod \mathfrak{p}^{m(\mathfrak{p})}$ est un idéal de k ; $\mathfrak{f}$ s'apelle le *conducteur* de χ. D'autre part, sur le sous-groupe $\prod\limits_\lambda k_\lambda^*$ de I_k, χ est de la forme

$$\chi(a_1, \ldots, a_{r_1+r_2}) = \prod_{\lambda=1}^{r_1+r_2} \left(\frac{a_\lambda}{|a_\lambda|}\right)^{-f_\lambda} |a_\lambda|^{i\eta_\lambda\sigma_\lambda} \tag{1}$$

où chacun des f_ρ est égal à 0 ou 1, où les $f_\imath$ sont entiers, et où les φ_λ sont réels.

Soit $a = (a_v)$ un idèle; pour chaque $\mathfrak{p}$, $a_\mathfrak{p}$ détermine un idéal principal $(a_\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{n(\mathfrak{p})}$ de $k_\mathfrak{p}$; par définition des idèles, $n(\mathfrak{p})$ est 0 pour presque tout $\mathfrak{p}$, donc $\prod \mathfrak{p}^{n(\mathfrak{p})}$ est un idéal entier ou fractionnaire

Université de Chicago

Transcription Denise Vella-Chemla, décembre 2020.

[1]Voir par exemple A. E. Ingham, *The distribution of prime numbers* Cambridge Tracts, n^o 30, Cambridge, 1932), Chap. IV ; dans ce qui suit, nous nous référerons à ce livre par le sigle DP.

[2]E. Hecke, *Eine neue Art von Zetafunktionen...*, Math. Zeitschr. I (1918), p. 357, et 5 (1919), p.11.

[3]Cf. A. Weil, *Sur la théorie du corps de classes*, Journ. Math. Soc. Japan, vol. 3, (1951), p. 1.

de k, qu'on désignera par (a). Par définition de $\mathfrak{f}$, on a $\chi(a) = 1$ si $(a) = 1, a_\lambda = 1$ pour tout λ, et $a_\mathfrak{p} = 1$ pour tout diviseur premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{f}$; donc, si $a_\lambda = 1$ pour tout λ, et $a_\mathfrak{p} = 1$ pour tout diviseur premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{f}$, $\chi(a)$ dépend seulement de l'idéal $\mathfrak{a} = (a)$; on a ainsi défini une fonction $\chi(\mathfrak{a}) = \chi(a)$ des idéaux $\mathfrak{a}$ de k premiers à $\mathfrak{f}$. On pose alors

$$L(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{(N\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} \tag{2}$$

où la somme est étendue à tous les idéaux entiers $\mathfrak{a}$ de k premiers à $\mathfrak{f}$, et le produit à tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de k qui ne divisent pas $\mathfrak{f}$. Si χ est le caractère χ_0 partout égal à 1, $L(s)$ est la fonction zêta $\zeta(s)$ du corps k. On tire de (2):

$$L'/L(s) = -\sum_{\mathfrak{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \log(N\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p})^n (N\mathfrak{p})^{-ns}. \tag{3}$$

Si on pose $s = \sigma + it$, les séries et produits ci-dessus convergent absolument et uniformément dans tout demi-plan $\sigma \geq 1 + a$, pour $a > 0$; donc, dans un tel demi-plan, $L(s), L(s)^{-1}$, et $L'/L(s)$ sont bornées.

Pour $a \in I_k$ et $\mathfrak{a} = (a)$, soit $\|a\| = \prod_\lambda |a_\lambda|^{\eta_\lambda} N(\mathfrak{a})^{-1}$. Comme $\|a\| = 1$ pour $a \in P_k$, $\chi_1(a) = \|a\|^{i\tau}\chi(a)$ est encore un caractère de C_k ; la fonction L associée à χ_1, est $L_1(s) = L(s + i\tau)$; on dira que χ, χ_1 sont associés. Parmi tous les caractères associés à un caractère donné, il y en a un et un seul pour lequel les exposants φ_λ qui figurent dans (1) satisfont à $\sum \eta_\lambda \varphi_\lambda = 0$; sans restreindre la généralité, on pourra donc supposer désormais que cette condition est satisfaite.

Soit Δ le discriminant de k ; soit $A = (2\pi)^{-d}|\Delta|N\mathfrak{f}$. On posera :

$$\begin{aligned}
&s_\lambda = s + i\varphi_\lambda \qquad\qquad\qquad\qquad (1 \leq \lambda \leq r_1 + r_2)\\
&G(s) = (2^{r_1}A)^{\frac{s}{2}} \prod_\lambda \Gamma\left(\frac{\eta_\lambda s_\lambda + |f_\lambda|}{2}\right)\\
&G_1(s) = \overline{G(1-\overline{s})} = (2^{r_1}A)^{\frac{1-s}{2}} \prod_\lambda \Gamma\left(\frac{\eta_\lambda(1 - s_\lambda) + |f_\lambda|}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

où $\overline{}$ désigne l'imaginaire conjugué, puis

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}_{\eta,f}(s) = (2/\eta)^s \Gamma\left(\frac{\eta s + |f|}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\eta(1-s) + |f|}{2}\right)^{-1}\\
&\mathcal{G}(s) = G(s)/G_1(s) = 2^{-\sum_\rho(\frac{1}{2}+i\sigma_\rho)} A^{s-\frac{1}{2}} \prod_\lambda \mathcal{G}_{\eta_\lambda, f_\lambda}(s_\lambda).
\end{aligned} \tag{5}$$

En vertu des propriétés connues de la fonction Γ, $|G(s)|^{-1}$ est $O(e^{c|t|})$ uniformément dans toute bande $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, pour $c > \pi d/4$, et, dans la même bande, $|\mathcal{G}(s)|$ est $O(|t|^N)$ pour $N = d(\sigma_1 - \frac{1}{2})$ si on exclut un voisinage des pôles de $\mathcal{G}(s)$.

Posons maintenant $\Lambda(s) = G(s)L(s)$. Un théorème fondamental de Hecke (loc. cit.[2]) dit que $\Lambda(s)$ est une fonction méromorphe dans tout le plan, ayant ses pôles en $s = 0, 1$ si $\chi = \chi_0$, sans pôle si $\chi \neq \chi_0$, et qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(1 - \bar{s}) = \varkappa \overline{\Lambda(s)} \tag{6}$$

où $\varkappa$ est une constante, et $\|\varkappa\| = 1$. La démonstration se fait en exprimant $\Lambda(s)$ au moyen d'une intégrale définie ; cette expression montre en même temps que $\Lambda(s)$ est bornée dans toute bande $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, des voisinages des pôles $s = 0, 1$ étant exclus pour $\chi = \chi_0$. Soit $L_1(s) = s(s-1)L(s)$, et prenons $\sigma_0 < 0 < 1 < \sigma_1$; dans $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, on aura $|L_1(s)| \leq Ce^{c|t|}$, où c, C sont des constantes. Mais, d'après (2), $L(s)$ est bornée sur $\sigma = \sigma_1$, et $L(1 - \bar{s})$ l'est sur $\sigma = \sigma_0$; comme on a

$$|L_1(s)| = |s(s-1)L(s)| = |s(s-1)\mathcal{G}(1-\bar{s})L(1-\bar{s})|,$$

il s'ensuit que $|L_1(s)|$ est $O(|t|^N)$ sur $\sigma = \sigma_0$, et sur $\sigma = \sigma_1$ si N est pris assez grand. D'après des théorèmes classiques, on en conclut que $|L_1(s)| \leq D|t|^N$ dans $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1, |t| > 1, D$ étant une constante ; appliquant alors par exemple le théorème D de DP, p. 49, à deux cercles de rayons constants r, R et de centre $1 + a + it$, où a est fixe > 0, on voit que le nombre de zéros de $L_1(s)$ dans le plus petit de ces cercles est $O(log|t|)$. Comme, en vertu de (2) et de (6), tous les zéros de $\Lambda(s)$ sont dans la bande $0 \leq \sigma \leq 1$,[4] il s'ensuit que le nombre des zéros de $\Lambda(s)$ satisfaisant à $T \leq |t| \leq T + 1$ est $O(\log T)$; il y a donc une constante a, et, pour tout entier m tel que $|m| \geq 2$, un T_m compris dans l'intervalle $m < T_m < m + 1$, tels que $\Lambda(s)$ n'ait pas de zéro dans la bande $|t - T_m| \leq a/\log|m|$.

D'autre part, $|G(s)|$ est $O(e^{|s|^{1+\varepsilon}})$ pour tout $\varepsilon > 0$ dans le demi-plan $\sigma \geq 1$; comme $L(s)$ est bornée dans le demi-plan $\sigma \geq 1 + a$, pour $a > 0$, il s'ensuit que $|\Lambda(s)|$ est $O(e^{|s|^{1+\varepsilon}})$ dans ce demi-plan, donc aussi, d'après (6), dans le demi-plan $\sigma \leq -a$; comme $\Lambda(s)$ est bornée dans $-a \leq \sigma \leq 1 + a$ (à un voisinage près des pôles), il s'ensuit que $[s(s-1)]^{\delta_\chi}\Lambda(s)$ est une fonction entière d'ordre 1 si on pose $\delta_\chi = 1$ pour $\chi = \chi_0$ et $\delta_\chi = 0$ pour $\chi \neq \chi_0$. On a donc :

$$\Lambda(s) = ae^{bs}[s(s-1)]^{-\delta_\chi} \prod_\omega \left(1 - \frac{s}{\omega}\right) e^{s/\omega}$$

où a, b sont des constantes, et où le produit est étendu aux zéros ω de $\Lambda(s)$ comptés avec leur multiplicité.[5] On a donc, quels que soient s, s_0 :

$$\Lambda'/\Lambda(s) - \Lambda'/\Lambda(s_0) = \sum_\omega \left(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s_0 - \omega}\right) - \delta_\chi \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s_0} - \frac{1}{s_0 - 1}\right),$$

d'où en particulier pour $s = 1 - \overline{s_0}$, en tenant compte de (6):

$$\Re[\Lambda'/\Lambda(s_0)] = \sum_\omega \Re\left(\frac{1}{s_0 - \omega}\right) - \delta_\chi \Re\left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_0 - 1}\right)$$

[4]Le raisonnement classique d'Hadamard, appliqué comme le fait Landau (*Vorlesungen über Zahlentheorie*, vol. II, p. 14-15), montre d'ailleurs que $\Lambda(s)$ n'a pas de zéros sur la droite $\sigma = 1$, ni par conséquent sur $\sigma = 0$. Ce raisonnement ne tombe en défaut que si χ est un caractère réel $\neq \chi_0$; mais en ce cas $L(s)$ est le quotient, par la fonction zêta de k, de la fonction zêta d'une extension quadratique de k, et par suite le résultat reste valable.

[5]Si $s = 0$ était un zéro de Λ, le facteur correspondant devrait être remplacé par s, et il n'y aurait rien à changer à ce qui suit ; d'ailleurs cette circonstance ne peut pas se présenter (cf. note 5.)

où $\mathfrak{R}$ désigne la partie réelle. Pour $s_0 = 1 + a + it, 0 < a \leq 1$, cela donne:

$$|\Lambda'/\Lambda(s_0)| \geq \mathfrak{R}[\Lambda'/\Lambda(s_0) \geq \sum_{\omega} \frac{a}{(a+1)^2 + (t-y)^2} - \delta_\chi \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a}\right)$$

où on a posé $\omega = \beta + i\gamma$. Mais $L'/L(s)$ est bornée sur la droite $\sigma = 1 + a$; sur cette droite, $G'/G(s)$ est $O(log|t|)$; donc $|\Lambda'/\Lambda(s_0)|$ est $\leq A_0 \log|t| + A_1$, et on a par suite

$$\sum_{\omega} \frac{1}{a^2 + (t-\gamma)^2} \leq \frac{(a+1)^2}{a^2} \sum_{\omega} \frac{1}{(a+1)^2 + (t-\gamma)^2} \leq A_0' \log|t| + A_1',$$

où A_0, A_1, A_0', A_1' dépendent de a mais non de t. D'autre part, si on prend $s = \sigma + it$, $-a \leq \sigma \leq 1 + a$, et $t = T_m$, d'où $|t - \gamma| \geq \alpha / \log|m|$, un raisonnement élémentaire (DP th. 26, p. 71-72) montre qu'on a

$$|\Lambda'/\Lambda(s) - \Lambda'/\Lambda(s_0)| \leq \frac{\sqrt{2}}{a}(a + 1 - \sigma) \log|m| \left(\sum_{\omega} \frac{1}{a^2 + (t-y)^2} + \frac{2\delta_\chi}{a^2 + t^2}\right);$$

d'après ce qui précède, le premier membre est donc $\leq B_0(\log|m|)^2 + B_1$, où B_0, B_1 ne dépendent que de a ; comme dailleurs $|\Lambda'/\Lambda(s_0)|$ est $O(\log|m|)$, on a donc en définitive, pour m entier, $|m| \geq 2, s = \sigma + iT_m$, et $-a \leq \sigma \leq 1 + a, 0 < a \leq 1$:

$$|\Lambda'/\Lambda(s)| \leq B(\log|m|)^2 \tag{7}$$

où B dépend de a, mais non de m ni de σ.

Cela posé, soit $F(x)$ une fonction à valeurs complexes définie sur la droite réelle qui possède une "transformée de Mellin"[6]

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{(s-\frac{1}{2})x} dx$$

holomorphe dans une bande $-a \leq \sigma \leq 1 + a$; d'une manière plus précise, nous supposerons qu'il existe $a' > 0$ tel que $F(x)e^{(\frac{1}{2}+a')|x|}$ appartienne à L^1, ce qui assure que $\Phi(s)$ existe et est holomorphe dans $-a' < \sigma < 1 + a'$; et nous supposerons de plus qu'il existe $a > 0$ tel que $a \leq 1, a < a'$, et que $\Phi(s)$ soit $o((log|t|)^{-2})$ uniformément dans la bande $-a \leq \sigma \leq 1 + a$. Prenons $T > 2, T' > 2$; il y aura des entiers l, m tels que $|T - T_m| < 1, |-T' - T_l| < 1$. Le nombre des zéros $\omega = \beta + i\gamma$ de $\Lambda(s)$ dont la partie imaginaire γ est comprise entre T et T_m est $O(\log T)$, donc la somme $\sum \Phi(\omega)$, étendue à ces zéros, tend vers 0 quand T augmente indéfiniment ; il en est de même pour $-T'$ et T_l. Considérons alors l'intégrale de $\Phi(s) d\log\Lambda(s)$ sur le contour du rectangle formé par les droites $\sigma = -a, \sigma = 1 + a, t = T_m, t = T_l$; en vertu de (7) et de l'hypothèse faite sur Φ, l'intégrale prise sur le côté $t = T_m$ de ce rectangle tend vers 0 avec $1/T$, et celle relative au côté $t = T_l$ tend vers 0 avec $1/T'$. En tenant compte de (6), on obtient:

$$\sum_{-T' < \gamma < T} \Phi(\omega) \equiv \delta_\chi[\Phi(0) + \Phi(1)] + I(T_m, T_l) \quad \text{mod. } o(1) \tag{8}$$

[6]Conformément anx usages reçus, il faudrait dire que $\Phi(s)$ est la transformée de Mellin de la fonction $v^{-1/2}F(\log v)$, définie pour $v > 0$.

où on désigne par $o(1)$ le groupe additif des fonctions de T, T' qui tendent vers 0 avec $1/T, 1/T'$, et où on pose

$$I(t,t') = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{1+a+it'}^{1+a+it} \Phi(s) d\log\Lambda(s) - \Phi(1-\overline{s}) d\log\overline{\Lambda(s)}$$

Comme d'ailleurs, sur la droite $\sigma = 1 + a, L'/L(s)$ est bornée, et $G'/G(s)$ est $O(\log|t|), I(T, T_m)$ tend vers 0 avec $1/T$, et $I(-T', T_l)$ avec $1/T'$ de sorte que dans (8) on peut remplacer $I(T_m, T_l)$ par $I(T, -T')$. Dans $I(T, -T')$, remplaçons $\Lambda(s)$ par $G(s)L(s); I(T, -T')$ apparaît comme somme d'une intégrale analogue $I_0(T, -T')$ portant sur $L(s)$ et d'une autre $I_1(T, -T')$ portant sur $G(s)$. Appliquant (3), on obtient:

$$I_0(T,-T') = \frac{-1}{2\pi} \int\limits_{-T'}^{T} dt \sum_{\mathfrak{p},n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{\mathfrak{p},n}(u) e^{itu} du \tag{9}$$

où l'on a posé

$$H_{\mathfrak{p},n} = \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{n/2}} \left[\chi(\mathfrak{p})^n F(u + \log N\mathfrak{p}^n) e^{(\frac{1}{2}+a)u} + \chi(\mathfrak{p})^{-n} F(u - \log N\mathfrak{p}^n) e^{-(\frac{1}{2}+a)u}\right]$$

D'autre part, on a

$$2\pi i I_1(T,-T') = \int\limits_{1+a-iT'}^{1+a+iT} \Phi(s) d\log G(s) - \int\limits_{-a-iT'}^{-a+iT} \Phi(s) d\log G_1(s).$$

Mais $G'/G(s)$ n'a pas de pôle dans le demi-plan $\sigma > 0$, et par suite $G_1'/G_1(s)$ n'en a pas dans $\sigma < 1$; d'ailleurs ces fonctions sont $O(log|t|)$ dans $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, en dehors de voisinages de leurs pôles, quels que soient σ_0, σ_1. Il s'ensuit qu'on a

$$I_1(T,-T') \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{2}-iT'}^{\frac{1}{2}+iT} \Phi(s) d\log\mathcal{G}(s) \qquad \text{mod. } o(1)$$

d'où, en appliquant encore une fois le même raisonnement :

$$I_1(T,-T') \equiv J_0(T,-T') + \sum_{\lambda=1}^{r_1+r_2} J_\lambda(T,-T') \qquad \text{mod. } o(1)$$

en posant

$$J_0(T,-T') = \frac{\log\, A}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{2}-iT'}^{\frac{1}{2}+iT} \phi(s) ds,$$

$$J_\lambda(T,-T') = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{2}-iT'}^{\frac{1}{2}+iT} \phi(s - i\varphi_\lambda) d\log\mathcal{G}_{\eta_\lambda, f_\lambda}(s).$$

On a donc :

$$\sum_{-T'<\gamma<T} \Phi(\omega) \equiv \delta_\chi[\Phi(0) + \Phi(1)] + I_0(T,-T') + J_0(T,-T') + \sum_{\lambda=1}^{r_1+r_2} J_\lambda(T,-T') \qquad \text{mod. } o(1) \tag{10}$$

Comme d'ailleurs $\Phi\left(\frac{1}{2}+it-i\varphi_\lambda\right)$ est la transformée de Fourier de $F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}$, on a

$$J_\lambda(T,-T')=\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}\mathcal{H}_{\eta_\lambda,f_\lambda}(x;T,-T')dx$$

avec

$$\mathcal{H}_{\eta,f}(x;T,-T')=\frac{1}{2\pi i}\int_{-T'}^{T}e^{ixt}d\log\mathcal{G}_{\eta,f}\left(\frac{1}{2}+it\right).$$

Posons maintenant

$$H_{\eta,f}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}\left[\frac{2}{\eta}d\log\mathcal{G}_{\eta,f}\left(\frac{1}{2}+it\right)-d\log\mathcal{G}_{2,0}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right];$$

en vertu d'identités et d'évaluations connues, on voit que la différence entre l'intégrale du second membre, et la même intégrale prise entre les limites $-T'$ et T, est, en valeur absolue, $\leq 2(e^{-}+e^{-\pi T'})$ pour $\eta=1, f=0$ ou 1, et $\leq C_f(T^{-1}+T'^{-1})$ pour $\eta=2, C_f$ dépendant de f mais non de T,T'. De plus, en vertu de formules connues, on a:

$$H_{1,f}=\frac{(-1)^{1-f}}{e^{x/2}+e^{-x/2}},\qquad H_{2,f}=\frac{1-e^{-|fx|/2}}{|e^{x/2}+e^{-x/2}|}.$$

Il s'ensuit qu'on a

$$J_\lambda(T,-T')\equiv\frac{\eta_\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}H_{\eta_\lambda,f_\lambda}(x)dx$$
$$+\frac{\eta_\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}\mathcal{H}_{2,0}(x;T,-T')dx\qquad\text{mod. }o(1)$$

Pour aller plus loin, nous ferons sur $F(x)$ des hypothèses plus précises que jusqu'ici, Nous supposerons pour fixer les idées que $F(x)$ satisfait aux conditions suivantes :

(A) $F(x)$ est continue et continument différentiable partout sauf en un nombre fini de points α_1, en lesquels $F(x)$ et sa dérivée $F'(x)$ n'ont qu'une discontinuité de première espèce, et en chacun desquels on a $F(\alpha_1)=\frac{1}{2}\left[F(\alpha_1+0)+F(\alpha_1-0)\right]$.

(B) Il existe $b>0$ tel que $F(x)$ et $F'(x)$ soient $O\left(e^{-(\frac{1}{2}+b)|x|}\right)$ pour $|x|+\infty$.

Cela entraîne que, pour $0<a'<b$, $F(x)e^{\left(\frac{1}{2}+a'\right)|x|}$ est dans L^1, et que $\Phi(s)$ est $O(|t|^{-1})$ uniformément dans $-a'<\sigma<1+a'$; les résultats précédemment démontrés sont donc valables pourvu qu'on prenne $0<a<a'<b, a\leq 1$. Pour un choix convenable de la constante C, on aura

$$|F(x)|\leq Ce^{-(\frac{1}{2}+b)|x|},$$

d'où, en posant $\delta=b-a$:

$$\frac{H_{\mathfrak{p},n}(u)}{C\log N\mathfrak{p}}\leq\frac{e^{-\delta|u|}}{N\mathfrak{p}^{n(1+b)}}+N\mathfrak{p}^{nb}e^{\delta|u|}\inf(N\mathfrak{p}^{-n(1+2b)},e^{-(1+2b)|u|})\leq 2N\mathfrak{p}^{-n(1+a)}$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H_{\mathfrak{p},n}(u)|du \leq 2C\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{1+2a+\delta}\right)\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{n(1+a)}}.$$

Il s'ensuit que la série $H(u)=\sum H_{\mathfrak{p},n}(u)$ est absolument et uniformément convergente et définit une fonction $H(u)$ qui est dans L^1, et que (9) peut s'écrire

$$I_0(T,-T')=\frac{-1}{2\pi}\int_{-T'}^{T} dt\int_{-\infty}^{+\infty} H(u)e^{itu}du.$$

De plus, $H(u)$ est continue et continument différentiable en dehors des points $a_i \pm \log N\mathfrak{p}^n$ où elle a, ainsi que sa dérivée, au plus des discontinuités de première espèce, et où sa valeur est moyenne arithmétique entre ses limites à droite et à gauche. Dans ces conditions, la formule d'inversion de l'intégrale de Fourier s'applique, c'est-à-dire que $I_0(T,-T)$ tend vers $-H(0)$ pour $T\to+\infty$.

Pour obtenir la limite commune des deux membres de (10) pour $T=T'\to+\infty$, il ne nous reste donc plus qu'à évaluer la limite de $J_\lambda(T,-T)$ dans le cas où $\eta_\lambda=2, f_\lambda=0$. Autrement dit, il faut évaluer la limite de

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{+T}\Psi(t)d\log\mathcal{G}_{2,0}\left(\frac{1}{2}+it\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{+T}\Psi(t)\Re\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]dt$$

pour $T\to+\infty, \Psi(t)$ étant la transformée de Fourier d'une fonction $F_1(x)=F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}$ qui satisfait aux conditions (A) et (B).

Mais la fonction $\Re\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]$ est paire et est de la forme $\log|t|+O(t^{-2})$ pour $|t|\to+\infty$. La transformée de Fourier de $\log|t|$ est une distribution, qui a été déterminée par L. Schwartz[7] ; celle de $\Re\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]$ est donc une distribution, qui ne diffère de la précédente que par une fonction continue. On trouve que c'est la distribution $-\pi\mathrm{PF}(|e^{x/2}-e^{-x/2}|^{-1})$, où le symbole PF est défini comme suit. Soit $a(x)$ une fonction appartenant à L^1 sur $(-\infty,-1)$ et sur $(+1,+\infty)$, et telle que $\beta(x)=|x|a(x)$ satisfasse à la condition (A) ; on posera :

$$\mathrm{PF}\int_{-\infty}^{+\infty} a(x)dx=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{-\lambda|x|})a(x)dx-2\beta(0)\log\lambda\right].$$

Alors, si $a(x)$ est telle que $|x|a(x)$ satisfasse à (A), et si $\varphi(x)$ est continue et continument différentiable à support compact, la formule

$$\mathrm{PF}a(\varphi)=\mathrm{PF}\int_{-\infty}^{+\infty} a(x)\varphi(x)dx$$

définit une distribution PFa, égale à la fonction a sur tout intervalle ne contenant pas 0, et qui ne diffère de la distribution Pfa de Schwartz que par un multiple de la distribution δ de Dirac. Cela posé, il résulte des théorèmes de Schwartz que, si $F_1(x)$ et $\Psi(t)$ sont comme ci-dessus, on a

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{+T}\Psi(t)\Re\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]dt=-\pi\mathrm{PF}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_1(x)dx}{|e^{x/2}-e^{-x/2}|}\ ;$$

[7]L. Schwartz, *Théorie des distributions*, vol. II (Act. Sc. et Ind. n° 1122, Paris, Hermann et C^ie, 1951), formule (VII, 7 ; 18).

on peut d'ailleurs le vérifier directement comme suit. Comme

$$\mathfrak{R}\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]$$

ne diffère de $\log|t|$ que par une fonction de L^2, il suffit, en vertu du théorème de Plancherel, de vérifier la formule analogue pour $\int\limits_{-T}^{+T}\Psi(t)\log|t|dt$.

On peut, sans rien changer, remplacer $\Psi(t), F_1(x)$ par $\Psi(t)+\Psi(-t), F_1(x)+F_1(-x)$, ou autrement dit supposer que F_1 et Ψ sont paires ; vérifiant le résultat directement pour F_1 égale à 1 pour $|x|<1$, à 0 pour $|x|>1$, on se ramène au cas où $F_1(0)=0$, donc, compte tenu de (A), où $F_1(x)=|x|F_2(x)$, F_2 étant une fonction paire, continue sauf en un nombre fini de discontinuités de première espèce, et $O(e^{-|x|/2})$ à l'infini. On a alors en définitive à démontrer la formule suivante :

$$\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)dx=-\frac{2}{\pi}\lim_{T\to+\infty}\int\limits_0^{T}\log\, t\left[\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)\cos(tx)dx\right]dt,$$

où, après une intégration par parties

$$\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)dx=\frac{2}{\pi}\lim_{T\to+\infty}\int\limits_0^{T}\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)\frac{\sin(tx)}{t}dtdx\ ;$$

l'intégrale double du second membre est absolument convergente, et peut donc s'écrire :

$$\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)\left(\int\limits_0^{xT}\frac{\sin(t)}{t}dt\right)dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)dx-\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)\left(\int\limits_{xT}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right)dx$$

et il est immédiat qne le dernier terme tend vers 0 pour $T\to+\infty$, ce qui achève la démonstration.

Nous obtenons donc le résultat définitif suivant :

Si F(x) satisfait aux conditions (A), (B), la somme $\sum\phi(\omega)$, étendue au zéros $\omega=\beta+i\gamma$ de $L(s)$ qui satisfont à $0\le\beta\le1, |\gamma|<T$, tend vers une limite pour $T\to+\infty$, et cette limite a la valeur

$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{[\gamma|<T}\Phi(\omega)=\delta_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x)(e^{x/2}+e^{-x/2})dx+F(0)\log\, A$$

$$-\sum_{\mathfrak{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{n/2}}\left[\chi(\mathfrak{p})^nF(\log N\mathfrak{p}^n)+\chi(\mathfrak{p})^{-n}F(\log\, N\mathfrak{p}^{-n})\right]$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{r_1+r_2}\mathrm{PF}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{i\varphi_\lambda x}K_{\eta_\lambda,f_\lambda}(x)dx \tag{11}$$

où on a posé :

$$K_{1,f}(x)=\frac{e\left(\frac{1}{2}-f\right)|x|}{|e^x-e^{-x}|},\qquad K_{2,f}(x)=\frac{e^{-f|x|/2}}{|e^{x/2}-e^{-x/2}|}.$$

Telle est la forme la plus générale des "formules explicites", Naturellement, on pourrait élargir sensiblement les hypothèses faites sur F.

Nous allons appliquer ces résultats à une transformation de l'hypothèse de Riemann qui n'est peut-être pas sans intérêt. Pour cela, nous nous appuyerons sur le lemme suivant :

Pour que $L(s)$ satisfasse à l'hypothèse de Riemann, il faut et il suffit que la valeur commune des deux membres de (11) soit ≥ 0 pour toute fonction F de la forme

$$F(x) = F_0(x) * \overline{F_0(-x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(x+t)\overline{F_0(t)}dt,$$

où F_0 est une fonction satisfaisant à (A), (B).

F est alors continue et est la primitive d'une fonction F' continue partout sauf en un nombre fini de discontinuités de première espèce (ce sont les points $\alpha_i - \alpha_j$, si les α_i sont les points de discontinuités de F_0) ; F satisfait à (B) ; et, si Φ_0 est la "transformée de Mellin" de F_0 [8], celle de F est $\Phi(s) = \Phi_0(s)\overline{\Phi_0(1-\overline{s})}$. Si donc tous les zéros ω de $L(s)$ dans la bande critique sont sur $\sigma = \dfrac{1}{2}$, le premier membre de (11) est ≥ 0 pour ce choix de F et Φ. Supposons au contraire que $L(s)$ ait dans cette bande un zéro $\omega_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ avec $\beta_0 \neq \dfrac{1}{2}$. Posons

$$z = i\left(s - \frac{1}{2} - i\gamma_0\right), \qquad \Phi_0(s) = \Psi_0(z), \qquad \Phi(s) = \Psi(z),$$

de sorte qu'on a $\Psi(z) = \Psi_0(z)\overline{\Psi_0(\overline{z})}$ et que $F_0(x)e^{i\gamma_0 x}, F(x)e^{i\gamma_0 x}$ sont les transformées de Fourier des fonctions induites par $\Psi_0(z), \Psi(z)$ sur l'axe réel. Comme la transformée de Fourier de toute fonction de la forme $P(x)e^{-Ax^2}$, où P est un polynome et $A > 0$, est une fonction de même forme, il s'ensuit que, si on prend pour $\Psi_0(z)$ une fonction $P(z)e^{-Az^2}$, $F_0(x)$ satisfera à (A) et (B). Pour un tel choix de $\Psi_0(z), \Psi(z)$ sera de la même forme, donc $\Phi(s)$ sera $O(e^{-A't^2})$ pour tout $A' < A$, uniformément dans $0 \leq \sigma \leq 1$, et par suite $\sum \Phi(\omega)$ sera absolument convergente ; pour achever de démontrer le lemme, il suffira de faire voir que cette somme sera < 0 pour un choix convenable de $P(z)$ et de A. Posons en effet, pour tout zéro ω de $L(s)$ dans la bande critique, $\eta = i\left(\omega - \frac{1}{2} - i\gamma_0\right)$, et en particulier $\eta_0 = i\left(\omega_0 - \frac{1}{2} - i\gamma_0\right) = i\left(\beta_0 - \frac{1}{2}\right)$. Soit $Q(z)$ le polynôme ayant pour zéros simples tous les η distincts, autres que η_0 et $\overline{\eta_0}$, qui satisfont à $|\Re\eta| \leq 2$; comme, d'après (6), les η sont réels ou deux à deux imaginaires conjngués, on peut prendre Q à coefficients réels ; on prendra $P(z) = zQ(z)Q(-z)$. Alors, si m est l'ordre de ω_0 comme zéro de $L(s)$, on aura, pour $A > 1$:

$$\sum \Phi(\omega) = -2m\left(\beta_0 - \frac{1}{2}\right)^2 |Q(\eta_0)|^4 e^{2A(\beta_0 - \frac{1}{2})^2} + \sum_{|\Re\eta|>2} P(\eta)^2 e^{-2A\eta^2}$$

$$\leq -2m\left(\beta_0 - \frac{1}{2}\right)^2 |Q(\eta_0)|^4 e^{2A(\beta_0 - \frac{1}{2})^2} + e^{-3A} \sum_{|\Re\eta|>2} |P(\eta)^2 e^{-\eta^2}|,$$

et il est clair que le dernier membre est < 0 pour A assez grand.

[8] cf. la note 7 de bas de page 4 concernant la transformée de Mellin.

On va maintenant, au moyen du lemme, donner une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions L construites sur le corps k satisfassent à l'hypothèse de Riemann.

Pour cela, soit comme précédemment $C_k = I_k/P_k$, le groupe des classes d'idèles de k ; pour toute valuation v de k, k_v^* sera identifié avec le groupe des idèles dont toutes les composantes sont égales à 1 sauf au plus celle relative à v ; comme l'homomorphisme canonique de I_k sur C_k induit sur ce groupe k_c^* un isomorphisme de k_c^* sur son image dans C_k, cette image sera, elle aussi, identifiée à k_c^*. On a défini précédemment la fonction $\|a\|$ sur I_k ; comme elle est égale à 1 sur P_k, elle détermine sur C_k, par passage au quotient, une fonction qu'on notera $\|\xi\|$; $\xi \to \|\xi\|$ est un homomorphisme de C_k sur le groupe multiplicatif γ des réels > 0, dont le noyau C_k^0 est compact[9]. La fonction $\|\xi\|$ induit $|x|$ sur k_ρ^*, $|x|^2$ sur $k_\imath^*$ et $N\mathfrak{p}^{-n(x)}$ sur $k_\mathfrak{p}^*$ si $n(x)$ est défini pour $x \in k_\mathfrak{p}^*$ par $(x) = \mathfrak{p}^{n(x)}$.

D'une manière générale, si φ est un homomorphisme à noyau compact d'un groupe G sur le groupe γ, on peut normer la mesure de Haar sur G par la condition que la mesure de la partie compacte de G déterminée par $1 \leq \varphi(\xi) \leq M$ soit $\log M$; si φ est un homomorphisme à noyau compact de G sur un sous-groupe discret γ' de γ, on peut normer la mesure de Haar sur G par la condition que la mesure de la partie compacte (ouverte et fermée) de G déterminée par $1 \leq \varphi(\xi) \leq M$ soit $\log M + O(1)$ pour $M \to +\infty$; en ce dernier cas, si γ' est engendré par $\alpha > 1$, la mesure du noyau de φ sera $\log \alpha$. Dans l'un et autre cas, la mesure de Haar ainsi déterminée sur G sera dite *normée au moyen de* φ. On notera $d\xi$ la mesure de Haar sur C_k, normée au moyen de $\|x\|$; et, quel que soit v, on notera $d^\times x$ la mesure de Haar sur k_c^*, normée aussi au moyen de $\|x\|$; cette notation est destinée à rappeler qu'il s'agit d'une mesure de Haar sur le groupe multiplicatif k_c^* ; si d^+x est une mesure de Haar sur le groupe additif k_v, $d^\times x$ ne diffèrera de $d^+x/\|x\|$ que par un facteur constant. Sur k_ρ^*, on a $d^\times x = dx/2|x|$; sur $k_\imath^*$, si on pose $x = re^{i\theta}$, on a $d^\times x = drd\theta/\pi r$; sur $k_\mathfrak{p}^*$, la mesure, pour $d^\times x$, du groupe compact $U_\mathfrak{p}$ des unités de $k_\mathfrak{p}$ est $\log(N\mathfrak{p})$.

Considérons le sous-groupe de I_k, formé des idèles $a = (a_v)$ tels que $a_\mathfrak{p} = 1$ quel que soit $\mathfrak{p}$, et $a_\lambda = a_1 > 0$ pour $1 \leq \lambda \leq r_1 + r_2$; soit γ_k l'image de ce groupe dans C_k ; γ_k est isomorphe à γ, et C_k est produit direct de C_k^0 et γ_k ; de plus, les caractères χ de C_k qui satisfont à $\sum \eta_\lambda \varphi_\lambda = 0$ sont ceux qui prennent la valeur 1 sur γ_k, de sorte que le groupe Γ de ces caractères est isomorphe au groupe des caractères du groupe compact C_k^0 ; on attribuera donc à Γ la topologie discrète. Soit $F_0(\chi, x)$ une fonction définie sur $\Gamma \times R$, nulle pour presque tout χ (c'est-à-dire que, pour tous les χ sauf un nombre fini d'entre eux, on a $F_0(\chi, x) = 0$ quel que soit x), et telle que, pour tout χ, $F_0(\chi, x)$ satisfasse à (A) et (B). On posera, pour $\xi \in C_k$:

$$\Omega(\xi) = \sum_{\chi \in \Gamma} F_0(\chi, -\log \|\xi\|)\chi(\xi),$$

et, pour tout $\chi \in \Gamma$,

$$F(\chi, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(\chi, x+t)\overline{F_0(\chi, t)}dt.$$

On aura, dans ces conditions :

$$P(\xi) = \Omega(\xi) * \overline{\Omega(\xi^{-1})} = \sum_{\chi \in \Gamma} F(\chi, -\log \|\xi\|)\chi(\xi),$$

[9]cf. la note 5 en bas de la page 3.

où * désigne le produit de composition dans C_k, pour la mesure $d\xi$; $P(\xi)$ est une fonction de type positif sur C_k. Écrivons que le second membre de (11) est ≥ 0 quand on y substitue $F(\chi, x)$ à $F(x)$; et faisons la somme des inégalités ainsi obtenues pour tous les $\chi \in \Gamma$. On obtient, après quelques calculs sans difficulté :

$$D(P) = \rho P(1) + \int\limits_{C_k} P(\xi) \left(\|\xi\|^{1/2} + \|\xi\|^{-1/2} \right) d\xi - \sum_v \int\limits_{k_v^*} \frac{P(x) - P(1)0_v(\|x\|)}{\|x-1\|.\|x\|^{-1/2}} d^\times x \geq 0 \qquad (12)$$

avec

$$\rho = \log|\Delta| + \log(2\pi)^{-d} - \sum_{\lambda=1}^{r_1+r_2} PF \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta_\lambda(e^{-x}) K_{n_\lambda,0}(x) dx, \qquad (13)$$

où on a pris $\theta_v(1) = 1$ quel que soit v, $\theta_{\mathfrak{p}}(t) = 0$ pour $t \neq 1$ quel que soit $\mathfrak{p}$, et où les θ_λ sont tels que (13) ait un sens ; on peut prendre par exemple $\theta_\lambda(t) = 1$ quel que soit t. La valeur de $D(P)$ est indépendante du choix des θ_λ.

Il résulte du lemme que $D(P) \geq 0$, pour toutes les fonctions P obtenues comme il a été dit, est une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions L construites sur le corps k satisfassent à l'hypothèse de Riemann. Comme D, en tant que fonction de P, est une distribution sur C_k, cette condition peut s'exprimer en disant que D est "de type positif". Il est à peine besoin de dire que l'hypothèse de Riemann ne paraît pas plus facile à démontrer sous cette forme que sous sa forme classique. En revanche, notre énoncé met en évidence l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions. Si en effet k est un corps de fonctions algébriques de dimension 1, sur un corps de constantes fini à q éléments, on peut définir[10] le groupe C_k des classes d'idèles de k (qui ici est totalement discontinu, et limite projective de groupes discrets), ainsi que les sous-groupes k_v^* de C_k relatifs aux valuations v de k (qui ici sont toutes discrètes); pour un idèle a, on pose $\|a\| = q^{-\deg(\mathfrak{a})}$, où $\mathfrak{a}$ est le diviseur associé naturellement à l'idèle a ; de même que plus haut, on normera au moyen de $\|a\|$ les mesures de Haar sur C_k, et sur les groupes k_v^*. On définira une distribution D sur C_k au moyen de (12), en prenant cette fois $\rho = (2g-2)\log q$, g étant le genre, et en prenant $\theta_v(1) = 1$, $\theta_v(t) = 0$ pour $t \neq 1$ quel que soit v. Cela posé, des calculs semblables aux précédents, mais beaucoup plus élémentaires, montrent que l'exactitude de l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L construites sur k équivaut a l'inégalité $D(P) \geq 0$ pour toutes les fonctions

$$P(\xi) = \Omega(\xi) * \overline{(\xi^{-1})}$$

sur C_K, où Ω est une fonction sur C_k, nulle en dehors d'un compact, et constante sur les classes suivant un sous-groupe ouvert de C_k. Bien entendu, dans le cas des corps de fonctions algébriques, l'hypothèse de Riemann est un résultat acquis, et par suite, au sens qu'on vient de dire, la distribution D attachée à un tel corps est bien "de type positif".

UNIVERSITY OF CHICAGO

[10]cf. note 3 en bas de la page 1.

L'avenir des mathématiques

André Weil [1]

«Il y a eu autrefois, dit Poincaré dans sa conférence de Rome sur l'avenir des mathématiques, des prophètes de malheur ; ils répétaient que tous les problèmes étaient résolus, qu'après eux il n'y aurait plus à glaner...» Mais, ajoute-t-il, «les pessimistes se sont toujours trouvés forcés de reculer... de sorte qu'à présent je crois bien qu'il n'y en a plus.»

Notre foi dans le progrès, notre croyance en l'avenir de notre civilisation, ne sont plus si fermes ; elles se sont vues ébranlées par des chocs trop brutaux. Il ne nous paraît plus du tout légitime, comme Poincaré n'hésitait pas à le faire, d' «extrapoler» du passé et du présent au futur.

Le mathématicien, interrogé sur l'avenir de sa science, se trouve en droit de poser la question préalable : quel est l'avenir que se prépare l'espèce humaine ? Les formes de pensée, fruits de l'effort soutenu des quatre ou cinq derniers millénaires, sont-elles autre chose qu'un éclair fugitif ? Que si, craignant de tomber dans la métaphysique, on préfère se tenir sur le terrain, presque aussi mouvant, de l'histoire, les mêmes questions réapparaissent, en d'autres termes seulement : assistons-nous au début d'une nouvelle éclipse de la civilisation ? Notre devoir, plutôt que de nous livrer aux joies égoïstes du travail créateur, n'est-il pas de regrouper, en vue d'un simple effort de conservation, les éléments essentiels de notre culture, afin qu'un jour nos descendants les retrouvent intacts à l'aube d'une nouvelle Renaissance ?

Ces questions ne sont pas de pure rhétorique ; de la réponse que chacun

1. 1947

leur donne, ou plutôt (car il n'est pas de réponses à de pareilles questions) de l'attitude que chacun prend en face d'elles dépend dans une large mesure la direction qu'il donnera à son effort intellectuel. Avant d'écrire sur l'avenir des mathématiques, il était nécessaire de les poser, comme le croyant se purifiait avant de consulter l'oracle. A nous maintenant d'interroger le destin.

La mathématique, telle que nous la connaissons, nous paraît l'une des formes nécessaires de notre pensée. L'archéologue, il est vrai, et l'historien nous révèlent des civilisations d'où elle fut absente. Sans les Grecs, il est douteux qu'elle eût jamais été plus qu'une technique, au service d'autres techniques ; et peut-être voyons-nous se former sous nos yeux un type de société humaine où elle ne sera pas autre chose. Mais à nous dont les épaules ploient sous l'héritage de la pensée grecque, à nous qui traînons encore nos pas dans les sillons tracés par les héros de la Renaissance, une civilisation sans mathématiques semble inconcevable. De même que le postulat des parallèles, le postulat de la survie des mathématiques s'est dépouillé à nos yeux de son «évidence» ; mais, tandis que celui-là ne nous est plus nécessaire, nous ne saurions nous passer de celui-ci.

Assurément, le clinicien des idées, qui, sans se hasarder à des prédictions à lointaine échéance, limite son pronostic à un avenir immédiat, aperçoit, lorsqu'il examine la mathématique contemporaine, plus d'un symptôme favorable. Tout d'abord, tandis que telle science aujourd'hui par la puissance presque illimitée que confère son usage arbitraire, est en passe de devenir monopole de caste, trésor jalousement gardé sous le sceau d'un secret nécessairement fatal à toute activité proprement scientifique, le mathématicien véritable semble peu exposé aux tentations du pouvoir et à la camisole de force du secret d'Etat. «La mathématique disait G. H. Hardy dans une célèbre leçon inaugurale, est une science inutile. J'entends par là qu'elle ne peut servir directement, ni à l'exploitation de nos semblables, ni à leur extermination.»

Il est certes peu d'hommes, à notre époque, aussi complètement libres dans le jeu de leur activité intellectuelle que le mathématicien. Si des idéologies d'Etat s'attaquent parfois à sa personne, jamais encore elles ne se sont mêlées de juger ses théorèmes ; chaque fois que de soi-disant mathématiciens, pour complaire aux puissants du jour, ont tenté de plier leurs confrères au joug d'une orthodoxie, ils n'ont récolté que le mépris pour fruit de leurs travaux. Qu'un autre hante les antichambres pour se faire accorder le coûteux appareillage sans lequel il n'est guère de prix Nobel : un crayon et du papier, c'est tout ce qu'il faut au mathématicien ; encore peut-il s'en passer à l'occasion. Il n'est même pas pour lui de prix Nobel dont la conquête désirée le détourne du travail longuement mûri vers le résultat brillant mais passager. Dans le monde entier, on enseigne, bien ou mal, les mathématiques ; le mathématicien exilé - et qui, de nos jours, peut se croire à l'abri de l'exil ? - trouve partout le gagne-pain modeste qui lui permet en quelque mesure de poursuivre ses travaux. Il n'est pas jusqu'en prison qu'on ne puisse faire de bonnes mathématiques, si le courage ne faut.

A ces «conditions objectives», ou plutôt, comme dirait notre médecin, à ces symptômes externes, viennent s'en ajouter d'autres que fournit un examen clinique plus approfondi. La mathématique vient de prouver sa vitalité en traversant l'une de ces crises de croissance auxquelles elle est accoutumée de longue date, et qu'on nomme d'un nom bizarre «crises des fondements» ; elle l'a traversée, non seulement sans dommage, mais avec grand profit. Chaque fois que de vastes territoires viennent d'être conquis au raisonnement mathématique, il est nécessaire de se demander quels sont les moyens techniques permis dans l'exploration du domaine nouveau. On désire que tels objets aient telles propriétés, on désire que tels modes de raisonnement soient légitimes, on se comporte comme s'ils l'étaient en effet ; le pionnier qui agit ainsi n'ignore pas qu'un jour la police viendra faire cesser le désordre et remettre tout sous l'empire de la loi commune. C'est ainsi que les Grecs, lorsqu'ils définirent les premiers le rapport des grandeurs avec assez de précision pour se poser le problème de l'existence de grandeurs incommensurables, semblent avoir cru et désiré que tous les rapports fussent rationnels, et avoir basé sur cette hypothèse provisoire la première ébauche de leurs raisonnements géométriques ; quelques-uns des plus grands progrès de la mathématique grecque sont liés à la découverte de leur erreur initiale sur ce point. De même, quand s'est ouverte l'ère de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal, on a voulu que toute expression analytique définisse une fonction, et qu'en même temps toute fonction soit dérivable ; nous savons aujourd'hui que ces exigences n'étaient pas compatibles. La dernière crise, née des modes de raisonnement sophistiques auxquels se prêtait à ses débuts la théorie «naïve» des ensembles, a eu pour nous un résultat non moins heureux, qu'on peut considérer comme définitivement acquis. Nous avons appris à faire remonter toute notre science à une source unique, composée seulement de quelques signes et de quelques règles d'emploi de ces signes, réduit sans doute inexpugnable, où nous ne saurions nous enfermer sans risque de famine, mais sur lequel il nous sera toujours loisible de nous replier en cas d'incertitude ou de danger extérieur. Que le mathématicien doive constamment tirer de son «intuition» de nouveaux éléments de raisonnement de nature alogique ou «pré-logique», c'est ce qui ne paraît plus soutenable qu'à quelques esprits attardés. Si certaines branches des mathématiques n'ont pas encore été axiomatisées, c'est-à-dire ramenées à un mode d'exposition où tous les termes sont définis et tous les axiomes explicités à partir des notions premières de la théorie des ensembles, c'est seulement parce qu'on n'a pas encore eu le temps de le faire. Il se peut sans doute qu'un jour nos successeurs désirent introduire en théorie des ensembles des modes de raisonnement que nous ne nous permettons pas ; il se peut même, bien que les travaux des logiciens modernes rendent cette éventualité bien peu probable, que l'expérience fasse découvrir un jour, dans les modes de raisonnement dont nous faisons usage, le germe d'une contradiction que nous n'apercevons pas aujourd'hui ; une révision générale deviendra alors nécessaire ; on peut être assuré dès maintenant que l'essentiel de notre science n'en sera pas affecté.

Mais, si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture ; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes. «Une branche de la science est pleine de vie, disait Hilbert, tant qu'elle offre des problèmes en abondance ; le manque de problèmes est signe de mort.» Certes ils ne manquent pas à notre mathématique ; et le moment ne serait peut-être pas mal choisi à présent pour en dresser une liste, comme le faisait Hilbert dans la conférence fameuse que nous venons de citer. Parmi ceux mêmes de Hilbert, plusieurs subsistent comme des objectifs lointains, mais non inaccessibles, qui ne cesseront de provoquer des recherches, peut-être pendant plus d'une génération : le cinquième problème, sur les groupes de Lie, en est un exemple. L'hypothèse de Riemann, après qu'on eut perdu l'espoir de la démontrer par les méthodes de la théorie des fonctions, nous apparaît aujourd'hui sous un jour nouveau, qui la montre inséparable de la conjecture d'Artin sur les fonctions L, ces deux problèmes étant deux aspects d'une même question arithmético-algébrique, où l'étude simultanée de toutes les extensions cyclotomiques d'un corps de nombres donné jouera sans doute le rôle décisif. L'arithmétique gaussienne gravitait autour de la loi de réciprocité quadratique ; nous savons maintenant que celle-ci n'est qu'un premier exemple, ou pour mieux dire le paradigme, des lois dites «du corps de classes», qui gouvernent les extensions abéliennes des corps de nombres algébriques ; nous savons formuler ces lois de manière à leur donner l'aspect d'un ensemble cohérent ; mais, si plaisante à l'œil que soit cette façade, nous ne savons si elle ne masque pas des symétries plus cachées. Les automorphismes induits sur les groupes de classes par les automorphismes du corps, les propriétés des restes de normes dans les cas non cycliques, le passage à la limite (inductive ou projective) quand on remplace le corps de base par des extensions, par exemple cyclotomiques, de degré indéfiniment croissant, sont autant de questions sur lesquelles notre ignorance est à peu près complète, et dont l'étude contient peut-être la clef de l'hypothèse de Riemann ; étroitement liée à celles-ci est l'étude du conducteur d'Artin, et en particulier, dans le cas local, la recherche de la représentation dont la trace s'exprime au moyen des caractères simples avec des coefficients égaux aux exposants de leurs conducteurs. Ce sont là quelques-unes des directions qu'on peut et qu'on doit songer à suivre afin de pénétrer dans le mystère des extensions non abéliennes ; il n'est pas impossible que nous touchions là à des principes d'une fécondité extraordinaire, et que le premier pas décisif une fois fait dans cette voie doive nous ouvrir l'accès à de vastes domaines dont nous soupçonnons à peine l'existence ; car jusqu'ici, pour amples que soient nos généralisations des résultats de Gauss, on ne peut dire que nous les ayons vraiment dépassés.

Dans le cadre même des extensions abéliennes, nous n'avons non plus fait aucun progrès vers la généralisation des théorèmes du «rêve de jeunesse de Kronecker», l'engendrement des corps de classes dont l'existence nous est connue, par des valeurs de fonctions analytiques. Si l'on a pu, sans grande difficulté, compléter l'œuvre inachevée de Kronecker et achever de résoudre ce problème, au moyen de la multiplication complexe, dans le cas des corps quadratiques imaginaires, la clef du problème général que Hilbert regardait comme l'un des plus importants des mathématiques modernes, nous échappe encore, malgré les conjectures de Hilbert lui-même et les tentatives de ses disciples. Faut-il la chercher dans les nouvelles fonctions automorphes de Siegel, par exemple dans ses fonctions modulaires de plusieurs variables ? Ou bien la théorie, aujourd'hui assez avancée, des endomorphismes des variétés abéliennes peut-elle nous être ici de quelque secours ? Il est trop tôt pour hasarder là-dessus des conjectures plausibles ; mais, dût la réponse être négative, on ne peut manquer d'obtenir des résultats intéressants en examinant ces questions de plus près.

Ce qui précède met déjà en évidence, non seulement la vitalité de l'arithmétique moderne, mais aussi les liens étroits qui, aujourd'hui, comme au temps d'Euler et au temps de Jacobi, l'unissent aux parties les plus profondes de la théorie des groupes et de la théorie des fonctions. Cette unité essentielle, dont les manifestations sont si diverses et multiples, se retrouve sur bien d'autres points. L'introduction par Hermite des variables continues dans la théorie des nombres a abouti à l'étude systématique des groupes discontinus de nature arithmétique au moyen des groupes continus dans lesquels ils se laissent plonger, des espaces riemanniens symétriques associés à ces groupes, des propriétés différentielles et topologiques de leurs domaines fondamentaux (ou plutôt, dans le langage moderne, de leurs espaces quotients), et des fonctions automorphes qui y appartiennent. L'œuvre de Siegel, continuant la grande tradition de Dirichlet, d'Hermite, de Minkowski, nous a ouvert ici des voies toutes nouvelles. D'un côté, nous rejoignons par là Fermat, Lagrange et Gauss, la représentation des nombres par les formes, et les genres de formes quadratiques. En même temps commence à se préciser à nos yeux le principe si fécond d'après lequel l'aspect global d'un problème arithmétique peut, en certaines circonstances, se reconstituer à partir de ses aspects locaux. Par exemple, nous voyons à maintes reprises, chez Siegel, le nombre de solutions de tel problème arithmétique dans le corps des nombres rationnels exprimé au moyen des nombres définis par les problèmes locaux correspondants, densités de solutions dans le corps réel et dans les corps p-adiques pour toutes les valeurs du nombre premier p c'est là un principe, analogue au théorème des résidus sur la surface de Riemann d'une courbe algébrique, auquel il y a lieu de rattacher aussi les célèbres «séries singulières» qui apparaissent dans l'application de la méthode de Hardy-Littlewood aux problèmes de la théorie analytique des nombres. Est-il possible d'en donner un énoncé général, qui permette d'un seul coup d'obtenir tous les résultats de cette nature, de même que la découverte du théorème des résidus a permis de calculer par une méthode uniforme tant d'intégrales et de séries qu'on ne traitait auparavant que par des procédés disparates ? Ce n'est pas là encore, semble-t-il, un problème pour l'avenir immédiat ; il n'en est que plus important d'en préparer la solution par l'examen de cas particuliers bien choisis. C'est le même principe qui fournira peut-être un jour la raison profonde de l'existence des produits eulériens, dont les recherches de Hecke viennent seulement de nous révéler l'extrême importance en théorie des nombres et en théorie des fonctions ; ici, ce sont les classes mêmes des formes quadratiques, et non pas seulement comme avec Siegel leurs genres, que nous commençons à atteindre ; en même temps, nous nous trouvons au cœur de la théorie des fonctions modulaires, que ces travaux ont renouvelée entièrement, et de la théorie des fonctions *thêta*. Ce domaine est encore pour nous si mystérieux, les questions qui s'y posent sont si nombreuses et si fascinantes, que toute tentative pour les classer par ordre d'importance serait prématuré.

Mais en même temps, Siegel nous a appris, par voie arithmétique, à construire des groupes discontinus, et des fonctions automorphes ; c'est un domaine où la pure théorie des fonctions n'avait pas fait un pas depuis Poincaré ; et il est vraisemblable, en effet, que, tout comme il est arrivé pour les fonctions d'une variable, l'étude approfondie de fonctions spéciales de plusieurs variables complexes devra préparer le terrain à tout essai de théorie générale, Dans les recherches de Siegel, l'étude géométrique, locale et globale, des domaines fondamentaux, c'est-à-dire en réalité de variétés à structure analytique complexe, tend à prendre un rôle prépondérant. On rejoint par là l'œuvre immense de Cartan, et ses prolongements de toute sorte ; du même coup, on se trouve d'emblée au cœur de la topologie moderne, la théorie des espaces fibrés, et on voit apparaître les invariants de Stiefel-Whitney et leurs généralisations ; ce sont là deux domaines dont l'intime liaison était soupçonnée depuis quelque temps, mais entre lesquels la jonction vient d'être faite grâce aux découvertes d'un géomètre chinois, S. S. Chern, elles-mêmes provoquées en partie par des considérations de géométrie algébrique. Les variétés algébriques, en effet, ou du moins les variétés sans singularités sur le corps complexe, ne sont pas autre chose qu'une classe particulière, et particulièrement intéressante, de variétés à structure analytique complexe ; plus précisément, ce sont des variétés qu'on peut, du moins dans tous les cas connus, munir de l'une de ces métriques hermitiennes remarquables qu'a introduites Kähler à propos de fonctions de plusieurs variables complexes, et dont des résultats encore mal éclaircis de S. Bergmann fournissent aussi des exemples. C'est par l'emploi systématique, bien que non explicite, de ces métriques que Hodge, généralisant les classiques résultats de Riemann, a obtenu récemment les premiers théorèmes d'existence sur ce type de variétés ; si l'on n'ose espérer que de telles méthodes puissent un jour nous donner l'uniformisation des variétés algébriques (qui d'ailleurs, contrairement à ce qui se passe pour les courbes, ne peut se faire en général par des fonctions non ramifiées), leur extension aux intégrales de seconde et de troisième espèce est déjà chose faite et aplanira sans doute les voies vers des résultats généraux du type du théorème de Riemann-Roch. La généralisation analogue des méthodes de Hodge aux formes différentielles avec singularités dans le domaine réel pose des problèmes encore plus importants ; elle paraît liée, d'une part, à des propriétés locales des systèmes de type elliptique auxquels satisfont les formes harmoniques ; d'autre part, elle semble inséparable d'une extension de la théorie de de Rham qui permettrait d'obtenir la torsion homologique d'une variété par les formes différentielles avec singularités. Si en effet les résultats de de Rham ont éclairci définitivement un certain aspect de la relation entre groupes d'homologie et intégrales multiples, et jouent par là un rôle fondamental dans les travaux de Hodge et de Chern, ils ne rendent jusqu'à présent accessibles aux méthodes différentielles que les groupes d'homologie sur les nombres réels ; et d'ailleurs l'analogie si frappante et si féconde entre chaînes et formes différentielles, que ces résultats mettent en évidence, reste jusqu'ici un simple principe heuristique, en attendant qu'on réussisse à donner une base commune à ces deux notions ; c'est seulement dans quelques cas particuliers, et par exemple dans quelques-uns des beaux travaux par lesquels Ahlfors a renouvelé dans ces dernières années la théorie des fonctions analytiques, qu'on a réussi, en exprimant des formes différentielles comme sommes de chaînes (par des mesures de Radon dans l'espace des chaînes), à convertir ce principe en méthode de démonstration.

Mais, tandis que la géométrie algébrique reçoit ainsi une nouvelle impulsion des développements les plus récents de la topologie et de la géométrie différentielle, elle ne manque pas non plus de problèmes purement algébriques, au sujet desquels, grâce aux méthodes élémentaires de l'algèbre moderne, il ne nous est plus nécessaire de faire dériver nos connaissances des éclairs d'intuition de quelques mortels privilégiés. La théorie des surfaces, brillamment mais trop rapidement explorée par l'école italienne, doit faire place à présent à une théorie générale des variétés algébriques, affranchie d'hypothèses restrictives sur la nature du corps de base et sur l'absence de singularités. La structure des groupes de classes de diviseurs par rapport aux divers concepts connus d'équivalence (linéaire, continue, numérique), la recherche des extensions non ramifiées, abéliennes d'abord, puis non abéliennes, d'un corps de fonctions algébriques, constituent les premières questions à résoudre ; grâce aux résultats, acquis ou du moins plausibles, des géomètres italiens, nous savons à peu près deviner les réponses ; et leur solution, qui peut-être est déjà à notre portée, doit ouvrir la voie à d'importants progrès. D'autre part, l'étude de la géométrie algébrique sur tel ou tel corps de base particulier en est encore à ses premiers tâtonnements ; si la géométrie algébrique sur le corps complexe, à peu près exclusivement étudiée depuis près d'un siècle, a abouti, par les méthodes qui lui sont propres (méthodes topologiques et méthodes transcendantes), aux importants résultats que nous connaissons, il est vraisemblable que d'autres corps de base, corps finis, corps p-adiques, corps de nombres algébriques, méritent chacun d'être examiné à part, par des méthodes appropriées à leur objet. C'est ainsi que la géométrie sur un corps fini semble constituer une sorte de plaque tournante, à partir de laquelle on peut à volonté orienter les recherches, soit vers la géométrie algébrique proprement dite, avec les puissants instruments dont elle dispose déjà, soit vers la théorie des nombres ; c'est par là justement que nous commençons à mieux comprendre la nature de la fonction *zêta* et le vrai caractère de l'hypothèse de Riemann ; de même, avant d'aborder la détermination des extensions d'un corps de nombres algébriques par leurs propriétés locales, il conviendra peut-être de résoudre le problème analogue, déjà fort difficile, au sujet des fonctions algébriques d'une variable sur un corps de base fini, c'est-à-dire d'étendre à ces fonctions les théorèmes d'existence de Riemann. Pour ne citer qu'un cas particulier, le groupe modulaire, dont la structure détermine les corps de fonctions d'une variable complexe ramifiés en trois points seulement, joue-t-il le même rôle, tout au moins en ce qui concerne les extensions de degré premier à la caractéristique quand le corps de base est fini ? Il n'est pas impossible que toutes les questions de ce genre puissent se traiter par une méthode uniforme, qui permettrait, d'un résultat une fois établi (par exemple par voie topologique) pour la caractéristique 0, de déduire le résultat correspondant pour la caractéristique p ; la découverte d'un tel principe constituerait un progrès de la plus grande importance. Du même ordre, mais plus difficiles encore, sont les problèmes que posent les recherches modernes sur les groupes finis. La théorie des groupes finis simples est-elle l'analogue de la théorie des groupes de Lie simples ? Il semblerait prématuré d'aborder cette question de front dès maintenant ; c'est par des voies détournées, et en particulier par l'étude des p-groupes, qu'on a, dans ces dernières années, fait quelque progrès dans cette direction. Ici, comme en bien d'autres questions d'algébre et de théorie des nombres, un élément nouveau vient d'être introduit par la définition des groupes d'homologie d'un groupe abstrait ; on doit à Eilenberg et MacLane, à propos de recherches de H. Hopf de pure topologie combinatoire, la découverte de cette notion, qui généralise les notions déjà si fécondes de caractère et de système de facteurs ; elle devra être soumise pendant quelque temps à une étude systématique avant qu'on puisse en mesurer la portée et les possibilités d'application.

Si l'arithmétique, entendue au sens le plus large, est toujours pour ses adeptes la reine des mathématiques, et si pour cette raison nous nous sommes laissé aller à traiter avec prédilection de ce qui la concerne, ce n'est pas à dire que les autres branches des mathématiques présentent moins de problèmes dignes d'un effort soutenu. L'œuvre seule d'un Cartan contient de quoi occuper plusieurs générations de géomètres. La théorie générale des systèmes en involution n'a pas été menée jusqu'au bout par son auteur, qui n'a pu, semble-t-il, surmonter toutes les difficultés d'ordre algébrique qu'elle présente. Sur la théorie, si importante sans doute, mais pour nous si obscure, des «groupes de Lie infinis», nous ne savons rien que ce qui se trouve dans les mémoires de Cartan, première exploration à travers une jungle presque impénétrable ; mais celle-ci menace de se refermer sur les sentiers déjà tracés, si l'on ne procède bientôt à un indispensable travail de défrichement. La théorie moderne des groupes de Lie proprement dits, par des méthodes qui combinent celles de Cartan et celles de la topologie, est loin d'être achevée ;

dans la théorie même des groupes semi-simples, et dans celle des espaces riemanniens symétriques qui leur sont associés, nous ne savons atteindre à bien des résultats que par des vérifications a posteriori, en faisant usage de notre connaissance (due à Cartan, elle aussi) de tous les groupes simples. Mais surtout comme il a été indiqué plus haut, nous trouvons maintenant, dans la théorie topologique des espaces fibrés, dans les théorèmes de de Rham et dans la notion de groupe d'homotopie, les outils appropriés à l'étude globale des géométries généralisées de Cartan. Pour n'en donner qu'un exemple, la formule classique de Gauss-Bonnet, seul résultat jusqu'à ces derniers temps qui exprimât un invariant topologique par l'intégrale d'une forme différentielle de caractère invariant, ne nous apparaît plus maintenant que comme le premier terme de toute une série de formules que la méthode de Chern nous rend accessibles, et dont la recherche systématique vient à peine d'être entreprise.

Mais, si les systèmes en involution doivent, en principe, nous permettre d'atteindre tout ce qui, dans les équations aux dérivées partielles, peut se ramener au problème local de Cauchy-Kovalewski, ce n'est là qu'un aspect du problème d'existence des solutions de ces équations et cet aspect, à bien des égards, n'est même pas le plus intéressant. Sortis de là, nous nous trouvons en présence de résultats importants, dont certains ont été obtenus seulement à date récente, sur des équations de types très particuliers, principalement elliptique et hyperbolique ; mais bien que l'étude de ces types, à laquelle la physique mathématique a conduit nos prédécesseurs il y a plus d'un siècle, soit loin d'être achevée il ne convient pas de s'y arrêter indéfiniment. Le système auquel satisfait la partie réelle d'une fonction analytique de plusieurs variables complexes ne rentre dans aucun de ces types simples ; or, par les méthodes propres à la théorie des fonctions analytiques, nous avons appris par exemple que les singularités les plus générales qu'elles puissent présenter sont, en un certain sens qu'il est encore difficile de préciser, composées de singularités élémentaires qui sont des variétés caractéristiques : c'est ainsi du moins qu'on peut interpréter les théorèmes de Hartogs et de E. E. Levi sous cette forme, ils présentent une analogie évidente avec les résultats connus sur les équations hyperboliques, analogie qui suggère de chercher dans l'approfondissement des notions de variété caractéristique et de solution élémentaire, le germe d'une théorie générale. Par ailleurs, nous trouvons, dans les travaux de Delsarte, et dans ceux de S. Bergmann et de ses élèves, les premiers exemples de transformations d'équations aux dérivées partielles les unes dans les autres au moyen d'opérateurs intégraux ou intégro-différentiels ; il y a là, semble-t-il, le principe de développements entièrement nouveaux, et d'une classification des systèmes d'équations aux dérivées partielles qui sortirait complètement du cadre tracé par les méthodes classiques. En particulier, comme l'a montré Delsarte, les séries de fonctions orthogonales, auxquelles conduisent naturellement les problèmes elliptiques, se trouvent transformées ainsi en séries appartenant à des types beaucoup plus généraux, dont on retrouve quelques exemples isolés en analyse classique, mais dont l'étude générale pose des problèmes du plus grand intérêt. Ici, le mathématicien ne pourra plus se contenter de l'espace de Hilbert, outil qui lui est devenu aussi familier que la série de Taylor ou l'intégrale de Lebesgue ; est-ce dans la théorie des espaces de Banach qu'il faudra chercher l'instrument approprié, ou faudra-t-il recourir à des espaces plus généraux ? Il faut avouer que les espaces de Banach, pour intéressants et utiles qu'ils se soient déjà montrés, n'ont pas amené encore en analyse la révolution que certains en attendaient ; mais ce serait jeter le manche après la cognée que d'en abandonner déjà l'étude, avant d'en avoir mieux exploré les diverses possibilités d'application. Peut-être cependant sont-ils à la fois trop généraux pour se prêter à une théorie aussi précise que celle de l'espace de Hilbert, et trop particuliers pour l'étude des opérateurs les plus intéressants. Par exemple, ils ne comprennent pas l'espace des fonctions indéfiniment dérivables ; or, c'est seulement dans celui-ci qu'on peut définir les opérateurs de L. Schwartz, qui représentent formellement les dérivées de tout ordre de fonctions arbitraires ; il y a là peut être le principe d'un calcul nouveau, reposant en définitive sur le théorème de Stokes généralisé, et qui nous rendra accessibles les relations entre opérateurs différentiels et opérateurs intégraux. Déjà des idées de ce genre ont rendu de grands services dans des problèmes particuliers, par exemple sous le nom de lemme de Haar en calcul des variations ainsi que dans certains travaux de Friedrichs sur les opérateurs différentiels. De même, le théorème bien connu d'après lequel la moyenne d'une fonction harmonique sur un cercle est égal à sa valeur au centre exprime qu'un certain opérateur, défini par une distribution de masses dans le plan est, en un certain sens, combinaison linéaire des valeurs du laplacien dans le domaine fermé limité par le cercle. A ces questions se rattache aussi le problème, déjà cité, de la représentation des formes différentielles comme sommes de chaînes, que pose la théorie de de Rham. Dans ces recherches, on voit peut-être s'ébaucher un calcul opérationnel, destiné à devenir d'ici un siècle ou deux un instrument aussi puissant que l'a été pour nos prédécesseurs et pour nous-mêmes le calcul différentiel. Tout ceci ne concerne guère que l'étude locale ou semi-locale des équations aux dérivées partielles ; et en effet, en dehors des cas simples qu'on peut traiter par la théorie de l'espace de Hilbert ou par les méthodes directes du calcul des variations, l'étude globale des équations aux dérivées partielles, par exemple sur une variété analytique compacte, semble trop difficile pour qu'on puisse songer à l'aborder d'ici longtemps. Mais l'étude globale des équations différentielles ordinaires pose un grand nombre de problèmes intéressants, difficiles mais déjà à notre portée ; il suffira d'en donner pour exemple la belle démonstration toute récente par E. Hopf, du caractère ergodique des géodésiques sur toute variété riemannienne compacte à courbure partout négative. On peut rattacher aussi à ce sujet l'étude des équations de van der Pol et des oscillations dites de relaxation, l'une des très rares questions intéressantes qui aient été posées aux mathématiciens par la physique contemporaine ; car la nature, autrefois l'une des principales sources de grands problèmes mathématiques, semble, dans les dernières années, nous avoir emprunté beancoup plus qu'elle ne nous a rendu.

*

*   *

Mais l'énumération qui précède, tout incomplète qu'elle ne puisse manquer de paraître aux yeux de nos collègues, aura lassé sans doute l'attention de plus d'un lecteur ; encore n'avons-nous, faute de place et faute de la compétence nécessaire, parlé, ni de géométrie des nombres ni d'approximations diophantiennes, ni de calcul des variations, ni de calcul des probabilités, ni d'hydrodynamique ; nous n'avons d'autre part fait aucune mention de bien des problèmes aujourd'hui en sommeil qu'il suffirait d'une idée nouvelle pour éveiller et rendre à la vie mathématique. C'est qu'à vrai dire nous ne pouvions ni ne voulions jalonner la route au futur développement de notre science ; ce serait là une tâche vaine qu'on ne saurait même entreprendre sans ridicule, car le grand mathématicien de l'avenir, comme celui du passé, fuira les chemins battus c'est par des rapprochements imprévus, auxquels notre imagination n'aura pas su atteindre, qu'il résoudra, en les faisant changer de face, les grands problèmes que nous lui léguerons. Nous nous étions proposé en passant en revue quelques-unes des branches principales de notre mathématique, d'en mettre en évidence à la fois la robuste vitalité et l'unité foncière. Non seulement, nous croyons l'avoir montré, les problèmes se présentent en foule ; mais il en est peu de véritablement importants qui ne soient liés étroitement à d'autres en apparence fort éloignés. Lorsqu'une branche des mathématiques cesse d'intéresser tout autre que les spécialistes, c'est qu'elle est bien près de la mort, ou du moins de la paralysie d'où seul le bain vivifiant aux sources de la science pourra la tirer. «La mathématique, disait Hilbert dans la conclusion de sa conférence de 1900 (conclusion qui serait ici à citer tout entière), est un organisme dont la force vitale a pour condition l'indissoluble union de ses parties.»

Est-ce à dire que la mathématique soit en passe de devenir science d'érudition, qu'il ne doive plus être possible d'y faire œuvre créatrice que blanchi sous le harnois, usé par les longues années de veille en compagnie de tomes poussiéreux ? Ce serait aussi un signe de déclin ; car, force ou faiblesse, elle n'est guère science à se nourrir de détails minutieusement recueillis au cours d'une longue carrière, de lectures patientes, d'observations ou de fiches amassées une à une pour former le faisceau d'où sortira enfin l'idée. En mathématique plus peut-être qu'en toute autre branche du savoir, c'est tout armée que jaillit l'idée du cerveau du créateur ; aussi le talent mathématique a-t-il coutume de se révéler jeune ; et les chercheurs de second ordre y ont un rôle plus mince qu'ailleurs, le rôle d'une caisse de résonance pour un son qu'ils ne contribuent pas à former. Qu'en mathématique un vieillard puisse faire œuvre utile ou même géniale, il en est des exemples, mais rares, et qui chaque fois nous remplissent d'étonnement et d'admiration. Si donc la mathématique doit subsister telle qu'elle est apparue jusqu'ici à ses adeptes, il faut que les complications techniques dont plus d'un sujet s'y trouve hérissé ne soient qu'apparentes ou provisoires, il faut que, dans l'avenir comme par le passé, les grandes idées soient simplifcatrices, que le créateur soit toujours celui qui débrouille, pour lui-même et pour les autres, l'écheveau complexe de formules ou de notions. Déjà Hilbert se demandait : «Ne va-t-il pas devenir impossible au chercheur individuel d'embrasser toutes les branches de notre science ?» et justifiait sa réponse négative, non seulement par l'exemple, mais en observant que tout progrès important en mathématique est lié à la simplification des méthodes, à la dispariion d'anciens développements devenus inutiles, à l'unification de domaines jusque là étrangers. Il est probable que par exemple les contemporains d'Apollonius, ou ceux de Lagrange, ont connu cette même impression de complexité croissante qui aujourd'hui tend à nous accabler, Sans doute, un mathématicien moderne ne connaît plus si bien qu'Apollonius, ou qu'un candidat à l'agrégation, tels détails de la théorie des coniques ; nul ne croit pour cela que celle-ci doive former une science autonome. Peut-être le même sort est-il réservé à telles de nos théories dont nous sommes le plus fiers. L'unité des mathématiques n'en sera pas menacée.

Le danger est ailleurs. Pour être de nature plus contingente, il ne nous en paraît pas moins sérieux ; et nous ne pensons pas pouvoir conclure nos réflexions sur l'avenir des mathématiques sans en dire quelques mots. Nous l'avons dit, notre civilisation même nous semble attaquée de toutes parts ; mais c'était là parler en termes trop généraux. *Ne sutor ultra crepidam* ; c'est en mathématiciens qu'il nous faut jeter un regard sur le monde d'aujourd'hui. Notre tradition est saine ; sommes-nous assurés de la transmettre intacte ? En quelques pays d'Europe, et surtout en Allemagne jusqu'au début du régime hitlérien, on trouvait, il n'y a pas longtemps encore, un enseignement universitaire, appuyé sur un enseignement secondaire solide, qui assurait à l'apprenti mathématicien à la fois les connaissances spécifiques et la culture générale sans lesquels rien d'important ne peut être fait. Que voyons-nous aujourd'hui ? En France, aucune des branches essentielles des mathématiques modernes n'est enseignée, sinon par raccroc, dans nos universités ; c'est en vain qu'on chercherait dans celles-ci un cours qui mette l'étudiant avancé au contact d'un seul des grands problèmes que nous avons énumérés ; les éléments mêmes y sont trop souvent enseignés de telle manière que l'étudiant a tout à réapprendre s'il veut pousser plus loin ; l'extrême rigidité d'un mandarinat fondé sur de désuètes institutions académiques fait que toute tentative de renouvellement, si elle ne reste purement verbale, paraît vouée à l'échec. L'Italie, autrefois siège d'une école mathématique florissante, semble tombée dans un état de sclérose, analogue à celui dont la France se trouve menacée, mais qui a eu là des effets encore plus prompts et plus destructeurs. Quant à l'U.R.S.S. nous ne saurions (faute d'expérience personnelle) juger du point de vue qui nous intéresse ici, de son enseignement, secondaire et supérieur : on compte en ce pays nombre de mathématiciens de premier ordre ; mais il leur est rigoureusement interdit, semble-t-il, d'en franchir les frontières et il n'est guère possible qu'à la longue une telle pratique, si elle devait subsister, ait d'autre résultat que l'asphyxie lente de toute vie scientifique ; l'histoire de notre science, la plus lointaine comme la plus récente, montre suffisamment à quel point les contacts d'un pays à l'autre, non pas séances d'apparat où l'on boit des toasts entre deux avions, mais séjours prolongés d'étudiants et de maîtres auprès d'universités étrangères, sont une condition indispensable de tout progrès. Des conditions plus favorables, croyons-nous, se rencontrent en Angleterre, et dans quelques-unes de ces nations de l'Europe occidentale qui ne sont petites que dans les statistiques militaires. Quant à l'Allemagne, l'avenir seul peut montrer si elle retrouvera en elle-même les éléments nécessaires pour renouer avec la brillante tradition interrompue par quinze ans d'abêtissement collectif. Au delà de l'Atlantique, enfin, nous voyons un grand pays, qui compte les universités par centaines, les étudiants par centaines de mille, et où, suivant le mot de H. Morrison, le grand spécialiste américain des problèmes d'enseignement, «on a voulu l'éducation des masses, on a la production de masse en matière d'éducation». Thorstein Veblen, dans un petit livre trop peu lu, a tracé un jour le tableau de l'enseignement supérieur aux Etats-Unis, et l'a fait de main de maître ; indiquons seulement comment on forme le futur mathématicien, en ce pays qui produit plus de «mathématiciens» que peut-être tout le reste du monde. On y voit l'étudiant, dans les cas les plus favorables, disposer de trois ou quatre ans, vers la fin de son séjour à l'université, pour acquérir à la fois les connaissances, la méthode de travail, et l'élémentaire initiation intellectuelle, à quoi rien de ce qu'il a connu jusque là n'a pu en rien le préparer ; sa seule ressource est alors de se réfugier dans la spécialisation la plus étroite, grâce à quoi, s'il est intelligent et bien guidé, il pourra parfois faire œuvre utile ; encore risque-t-il fort, par la suite, de ne pas résister aux effets abrutissants de l'enseignement purement mécanique qu'il devra, pour gagner son pain, infliger à autrui après l'avoir lui-même trop longtemps subi. Qu'en d'autres domaines la production de masse, ainsi entendue, puisse avoir d'heureux résultats, c'est ce que nous ne sommes pas qualifié pour examiner ; les lignes qui précèdent font assez voir qu'il ne saurait en être ainsi en mathématiques. Par malheur, si, dans un pays dépourvu, il est vrai, de solides traditions intellectuelles, la plausible doctrine de l'éducation à la portée de tous a eu de pareilles conséquences, n'est-il pas à craindre que la contagion s'étende à une Europe affaiblie par une catastrophe sans précédent ? Mais si, comme Panurge, nous posons à l'oracle des questions trop indiscrètes, l'oracle nous répondra comme à Panurge : Trinck ! Conseil auquel le mathématicien obéit volontiers, satisfait qu'il est de croire étancher sa soif aux sources mêmes du savoir, satisfait qu'elles jaillissent toujours aussi pures et abondantes, alors que d'autres doivent recourir aux ruisseaux boueux d'une actualité sordide. Que si on lui fait reproche de la superbe de son attitude, si on le somme de s'engager, si on demande pourquoi il s'obstine en ces hauts glaciers où nul de ses congénères ne peut le suivre, il répond avec Jacobi : «Pour l'honneur de l'esprit humain.»

André Weil.

“Science française”
André Weil

J’en ai assez. J’aime voyager à l’étranger ; mes amis savent que mon amour-propre national n’est pas chatouilleux à l’excès, et j’ai pris dès longtemps l’habitude d’entendre, sans trop m’émouvoir, qu’on discute, parfois sans bienveillance, de mon pays, de ses hôtels, de ses femmes, de ses politiciens. Qu’y ferais-je, si tout cela, est vrai ? Que m’importe, si tout cela est faux ? Mais j’en ai assez, quand je rencontre un chimiste, qu’il me demande invariablement : “Pourquoi la chimie francaise est-elle tombée si bas ?” ; si c’est un biologiste : “Pourquoi la biologie française va-t-elle si mal ?” ; si c’est un physicien : “Pourquoi la physique française...” mais je n’achève pas, c’est toujours la même question dont on me rebat les oreilles, et j’en suis encore à chercher la réponse. Bien sûr, quand je demande des précisions, il arrive qu’on reconnaisse qu’il existe encore chez nous, dans tel ou tel domaine, quelques savants fort distingués. Quant à moi, mathématicien tout à fait ignorant de toute science sinon de la mienne, je ne puis discuter ; souvent je me risque, en réponse à l’éternelle question, à suggérer “Mais un tel ... ?” et je cite un nom, illustre chez nous ; mais j’ai fini par y renoncer, car pour une fois qu’on m’avoue “En effet, il y a tout de même un tel,” trop souvent l’illustre collègue est assommé aussitôt d’un mot dédaigneux, d’un sourire, ou simplement d’un haussement d’épaule...

Entendons-nous : les mœurs de la gent universitaire, depuis quelque douze ans que je la fréquente, me sont un peu connues, et qu’on ne vienne pas me parler ici de jalousie, d’ignorance ou de préjugé : on n’expliquera pas ainsi que tous ces collègues étrangers, et surtout les jeunes, me posent toujours, à peu près dans les mêmes termes, la même question. Ils reconnaissent sans se gêner, de quelque pays qu’ils soient, l’importance des centres scientifiques anglais, américains, russes, allemands ; ils savent apprécier aussi, parfois avec beaucoup de chaleur, les mérites de tel savant français. Ce ne peut être la jalousie qui les fait tous parler, il y a autre chose ; il y a, faut-il le dire, un fait : ils doivent avoir raison. Cela est fâcheux ; expliquons-le comme nous pouvons, mais mieux vaut le reconnaître ; mieux vaut même, comme je le fais ici à dessein, s’exagérer peut-être l’étendue du mal que de sottement fermer les yeux. Assez parlé (avec des majuscules) de Science Francaise, assez invoquer les mânes de Pasteur, de Poincaré, de Lavoisier : qu’ils se reposent en paix, car ils l’ont bien mérité, ce repos qu’on ne veut pas accorder à leurs ombres ; la Science Française, après tout, c’est nous, c’est les vivants et leurs noms ne sont pas une mine dont on nous ait octroyé la concession à perpétuité ; si nous ne savons pas nous examiner avec sévérité, sans complaisance facile, d’autres le font pour nous. Quelques-uns diront “Qu’importe ?” : je ne parle pas pour ceux-là. Quant à moi, je l’ai dit, une question cent fois répétée est venue à bout de mes nerfs ; j’en ai assez, il faut que je parle, ça n’y changera peut-être rien,

texte de 1938, p. 232 du volume I des Œuvres complètes d’André Weil.

mais ça me soulagera.

Elle va donc si mal, cette pauvre science française, dont on a tant rebattu les oreilles au badaud public ? au nom de laquelle on a organisé des souscriptions ? pour laquelle on a créé un ministère ? Est-ce manque de talents ? Il se pourrait, et il faudrait alors en rechercher les causes ; réorganisation de notre enseignement, de nos Facultés, de nos grandes écoles, on ne guide peut-être pas toujours nos jeunes gens les mieux doués vers les voies qui leur conviendraient le mieux. Universitaire moi-même, je n'ai pas la naïveté de croire, ou de vouloir faire croire (malgré nombre d'assentiments trop faciles) que la science, et la science universitaire, possède une vertu si éminente qu'il y faille acheminer bon gré mal gré la fleur de nos écoles et la crème de nos universités ; mais enfin, le recrutement de nos institutions scientifiques est un problème qu'il ne serait peut-être pas inutile d'examiner sans trop de délais ; on ne fabriquera pas à volonté des génies, mais qui sait, il s'en trouve peut-être qui manquent leur voie, et, si ce sont la des spéculations vaines, en tout cas on peut, par une organisation méthodique, former pour les maîtres éventuels un terrain favorable.

Mais voilà : où sont-ils à présent ces maîtres, et s'ils ne sont pas là, vont-ils nous tomber du ciel ? Car comprenons-le bien : si les étrangers nous disent que dans trop de domaines, la France, en tant que centre d'études, n'existe plus, ils veulent dire qu'elle manque de maîtres ; non qu'il s'agisse d'âge : je parle de ces hommes, parvenus au premier rang, qui s'y maintiennent ; de ces hommes, peu nommés des journaux, insoucieux des diversions de la publicité et de la politique, autour desquels se forment les écoles et se groupent, avides d'idées plutôt que de places, les jeunes gens ; pour tout dire, des maîtres, non des pontifes. Nous en avons, certes je veux le croire, nous en avons, je ne veux pas désespérer, nous en avons, j'en pourrais nommer bien un ou deux parmi ceux de ma spécialité, et en dehors de celle-ci j'ai déjà dit que je n'y entends rien. Il y en a ; mais enfin je soupçonne, malgré des bonimenteurs pas toujours désintéressés, que ce ne sont pas ceux qu'on nous dit, et qu'il n'y en a pas tant qu'on ne nous le fait croire. Oui, je sais bien : les prix Nobel, les membres de l'Institut, les professeurs à la Sorbonne... les dictateurs au placement des jeunes et à la distribution des vivres : car il faut bien vivre.

Oui, je me trompe, mon Cher Collègue, je l'avoue ; il y a X et Y devant qui tout le monde s'incline, et puisque je n'entends rien à leurs travaux, je puis bien m'incliner aussi. Mais admettez un instant, voulez-vous, que pour telle autre spécialité j'aie raison ; examinons ensemble les conséquences. Supposons que dans tel ou tel domaine, disons la Théorie des Nombres (il ne me coûte rien d'en parler, elle n'est pas enseignée dans les universités françaises), les maîtres véritables soient venus à faire défaut ; que les chaires les plus en vue et les positions dominantes se trouvent occupées par des hommes, non pas ignorants ou sans compétence, mais sans éclat, ou, chose peut-être plus grave encore, par de ces savants (ils sont nombreux, et, pour des raisons qu'il faudrait bien examiner, ils le sont tout particulièrement dans les universités françaises) à qui quelques travaux brillants ont valu au début de leur carrière une réputation qu'ils n'ont pu ou ne se sont pas souciés de soutenir. Que va-t'il se passer, si de tels hommes (chargés d'honneur, sans doute, et de titres) sont installés au pouvoir ? Car, reconnaissons-le, c'est un pouvoir véritable qu'ils détiennent ; pouvoir de distribuer les places ; pouvoir, plus important encore lorsqu'il s'agit de science expérimentale (c'est pourquoi chaque matin en me levant je remercie Dieu de m'avoir fait mathématicien) d'allouer les crédits de laboratoire et les moyens de recherche ; pouvoir, de par les positions qu'ils occupent, d'attirer à soi les jeunes, et de conserver pour soi des collaborateurs qui à d'autres sont refusés. De ces jeunes, que va-t-il arriver ? Quel est avenir d'une science dont l'enseignement est une fois tombé entre les mains de pontifes de cette espèce ? Maints exemples, que j'ai pu étudier (et non pas seulement en France, qu'on le croie bien ; je ne crois pas tout parfait ailleurs, et j'ai observé en d'autres pays des phénomènes tout semblables), permettent de donner de ce qui doit se passer une description assez précise : le tableau clinique de la maladie (comme disent, je crois, les médecins) est bien connu. De tels hommes ne tardent pas à tomber en dehors des grands courants de la science ; non pas de la Science Française, mais de la science (sans majuscule) qui est universelle ; ils travaillent, souvent honnêtement, de très bonne foi et non sans talent, ou d'autres fois ils font semblant de travailler, mais en tout cas ils sont étrangers aux grands problèmes, aux idées vivantes de la science de leur époque ; et à leur suite, c'est toute leur école qui se trouve égarée dans des eaux stagnantes (parfois bourbeuses, mais cela c'est une autre histoire) ; des jeunes gens bien doués passent les années les plus importantes de leur carrière scientifique, les premières, à travailler à des problèmes sans portée et dans des voies sans issue. Il faudrait les envoyer à l'étranger, ces jeunes gens, les initier à toutes les méthodes, à toutes les idées car, quand bien même il s'agirait du maître le plus éminent, qu'est-ce que l'éléve d'un seul maître ? Mais quoi ? L'on a trop peur de perdre des collaborateurs et des disciples, et, à leur place, de voir revenir des juges, des juges sévères. Qu'il est préférable de les garder auprès de soi, de s'en faire aider, de les maintenir autant qu'il se peut dans des voies tracées ! Qu'ils aient du talent, c'est bien ; qu'ils soient sages de plus, et (sans nuire à la hiérarchie ni à l'ordre d'ancienneté) toutes les voies leur sont ouvertes ; et s'ils sont sages, le talent même après tout n'est pas indispensable, ume bonne petite chaire les récompensera.

Bien sûr, le génie perce quand même ; le génie se fait toujours sa place, à travers tous les obstacles ; bien sûr... (je n'en suis pas si sûr que ça). Oui, mais pour le génie même que d'années perdues ; quel retard, quelles sordides difficultés ; et tous les autres, ceux qui auraient pu faire œuvre utile, maintenir, en attendant la venue du génie, une tradition honorable et parfois glorieuse, tous ces autres, quoi d'eux ? Souvent ils s'aperçoivent des années perdues ; un peu trop tard, ils se remettent à l'école ; ils tentent de se refaire une place dans la colonne en marche, quand leur esprit a perdu sa souplesse et sa plasticité ; ils se hissent avec difficultés à un échelon où d'autres avant eux parvinrent, puis, effort fourni, ils y restent, ils sont dépassés. Ils y restent, et l'histoire recommence... Une fois provincialisé, une fois tombé dans l'ornière, on y reste. Sauf miracle, bien sûr : car l'esprit, c'est le miracle ; mais n'y comptons pas trop, ou plutôt, le miracle arrive à qui aura su le mériter.

Mériter le miracle : c'est tout le travail du savant, pour qui le miracle c'est l'idée. Et quand le miracle c'est le génie, ne croyons pas qu'il ne faille le mériter aussi. Un tas de savants éminents crient au public "De l'argent ! De l'argent ! La science coûte cher !". C'est vrai, la science coûte cher ; bibliothèques, laboratoires modernes, instruments de travail indispensables, ne s'obtiennent pas à peu de frais ; et si autrefois, et même quoi qu'on nous dise aujourd'hui, l'on a pu faire avec des moyens très modestes d'importantes découvertes, l'on n'imagine guère que la science dans son ensemble puisse avancer de même. Je vous ferai de bonne chère, disait maître Jacques, si vous me donnez bien de l'argent. Il avait raison. Mais est-ce tout, quand la nation, désireuse qu'on lui fasse de bonne science, a donné de l'argent à maître Jacques ? Maître Jacques est membre de l'Institut, prix Nobel peut-être ; il occupe un rang distingué dans la Légion d'Honneur. Va-t-il nous donner de bonne science ? En dehors de ma spécialité je l'ai dit, je suis Français moyen, désireux qu'on fasse de l'argent que je verse chaque année à l'Etat le meilleur usage ; de ma spécialité je ne parle pas, car là c'est par mes travaux que je puis agir, mieux que par des paroles sans doute vaines. J'ai voulu décharger ma bile. Je n'ai pas tout dit ; je n'ai pas parlé de la rigidité de notre système universitaire ; des occasions manquées, lorsque tant de savants éminents, chassés d'Allemagne, étaient prêts à accepter n'importe où la place la plus modeste : l'Angleterre, l Amérique les ont recueillis tandis que nos universités, retranchées derriére de commodes règlements, les laissaient partir ; je n'ai rien dit de la dispersion d'efforts dans des universités provinciales trop nombreuses, où s'enlisent, faute d'un milieu où is se sentiraient encouragés, tant de jeunes savants. Le système est médiocre, ou mauvais ; mais un système meilleur, ce ne serait tout au plus qu'une machine mieux graissée. Qu'importe le système ? Ce sont les hommes qui importent.

Science française ?
André Weil

L'an dernier, un homme politique assez connu déjà, et qui l'est encore plus à présent, s'étonnait que, depuis, fort longtemps, aucun savant français n'ait reçu de prix Nobel. L'occasion était solennelle ; il exposait son programme de gouvernement. S'il faisait cette constatation, ce n'était pas seulement, sans doute, pour s'attrister d'une situation si humiliante pour notre amour-propre national. C'est qu'il entendait que la prise du pouvoir lui donnerait la faculté d'y porter remède.

Où sont-ils, ces remèdes ? Sont-ils fort cachés ? Et ce qui est pour nos hommes politiques un sujet d'étonnement en est-il un pour les initiés ? Ici, je demande la permission de raconter mon histoire, ou plutôt de copier quelques passages d'un article que j'écrivis, fort jeune encore, à mon retour d'un voyage en Amérique, il y a près de vingt ans. Ce voyage faisait suite à beaucoup d'autres, en Allemagne, en Angleterre, en Italie, en Russie même (est-il prudent de l'avouer ?), et jusqu'en Asie. Mon article fut soumis à quelques revues, qui le jugèrent impubliable ; il y a des vérités qui ne sont pas bonnes à dire ; on ne se priva pas de me le faire savoir ; je ne profitai guère de la leçon...

> *"J'en ai assez J'en ai assez. J'aime voyager à l'étranger ; mes amis savent que mon amour-propre national n'est pas chatouilleux à l'excès, et j'ai pris dès longtemps l'habitude d'entendre, sans trop m'émouvoir, qu'on discute, parfois sans bienveillance, de mon pays, de ses hôtels, de ses femmes, de ses politiciens. Qu'y ferais-je, si tout cela, est vrai ? Que m'importe, si tout cela est faux ? Mais j'en ai assez, quand je rencontre un chimiste, qu'il me demande invariablement : "Pourquoi la chimie francaise est-elle tombée si bas ?" ; si c'est un biologiste : "Pourquoi la biologie française va-t-elle si mal ?" ; si c'est un physicien : "Pourquoi la physique française..." mais je n'achève pas, c'est toujours la même question dont on me rebat les oreilles, et j'en suis encore à chercher la réponse. Bien sûr, quand je demande des précisions, il arrive qu'on reconnaisse qu'il existe encore chez nous, dans tel ou tel domaine, quelques savants fort distingués. Quant à moi, mathématicien tout à fait ignorant de toute science sinon de la mienne, je ne puis discuter ; souvent je me risque, en réponse à l'éternelle question, à suggérer "Mais un tel... ?" et je cite un nom, illustre chez nous ; mais j'ai fini par y renoncer, car pour une fois qu'on m'avoue "En effet, il y a tout de même un tel," trop souvent l'illustre collègue est assommé aussitôt d'un mot dédaigneux, d'un sourire, ou simplement d'un*

texte de 1955, p. 277 du volume II des Œuvres complètes d'André Weil. qui est une réimpression de La Nouvelle N.R.F., Paris, Imp. Crété, Corbeil-Essonnes (Seine-et-Oise), 3ème année, nº 25, p. 97-108.

> *haussement d'épaule...*
>
> *Entendons-nous : les mœurs de la gent universitaire, depuis quelque douze ans que je la fréquente, me sont un peu connues, et qu'on ne vienne pas me parler ici de jalousie, d'ignorance ou de préjugé : on n'expliquera pas ainsi que tous ces collègues étrangers, et surtout les jeunes, me posent toujours, à peu près dans les mêmes termes, la même question. Ils reconnaissent sans se gêner, de quelque pays qu'ils soient, l'importance des centres scientifiques anglais, américains, russes, allemands ; ils savent apprécier aussi, parfois avec beaucoup de chaleur, les mérites de tel savant français. Ce ne peut être la jalousie qui les fait tous parler, il y a autre chose ; il y a, faut-il le dire, un fait : ils doivent avoir raison. Cela est fâcheux ; expliquons-le comme nous pouvons, mais mieux vaut le reconnaître ; mieux vaut même, comme je le fais ici à dessein, s'exagérer peut-être l'étendue du mal que de sottement fermer les yeux. Assez parlé (avec des majuscules) de Science Francaise, assez invoquer les mânes de Pasteur, de Poincaré, de Lavoisier : qu'ils se reposent en paix, car ils l'ont bien mérité, ce repos qu'on ne veut pas accorder à leurs ombres ; la Science Française, après tout, c'est nous, c'est les vivants et leurs noms ne sont pas une mine dont on nous ait octroyé la concession à perpétuité ; si nous ne savons pas nous examiner avec sévérité, sans complaisance facile, d'autres le font pour nous. Quelques-uns diront "Qu'importe ?" : je ne parle pas pour ceux-là. Quant à moi, je l'ai dit, une question cent fois répétée est venue à bout de mes nerfs ; j'en ai assez, il faut que je parle, ça n'y changera peut-être rien, mais ça me soulagera."*

Ainsi s'exprimait, naïvement sans doute, mon indignation juvénile.

> *"Où sont les maîtres, disais-je, dont nous avons besoin ? Où sont ces hommes, peu nommés des journaux, insoucieux des diversions de la publicité et de la politique, autour desquels se forment les écoles et se groupent, avides d'idées plutôt que de places, les jeunes gens ; pour tout dire, des maîtres, non des pontifes. Nous en avons, certes je veux le croire, nous en avons, je ne veux pas désespérer, nous en avons, j'en pourrais nommer bien un ou deux parmi ceux de ma spécialité, et en dehors de celle-ci j'ai déjà dit que je n'y entends rien. Il y en a ; mais enfin je soupçonne, malgré des bonimenteurs pas toujours désintéressés, que ce ne sont pas ceux qu'on nous dit, et qu'il n'y en a pas tant qu'on ne nous le fait croire.".*

Ici, il vaut mieux interrompre la citation ; j'aperçois le mot de "pontifes".

> *"Oui, je sais bien : les prix Nobel, les membres de l'Institut, les professeurs à la Sorbonne... les dictateurs au placement des jeunes et à la distribution des rations de soupe."*

Il n'y a qu'un esprit aigri, ne manquera-t-on pas de dire, qui ait pu proférer de si horribles blasphèmes contre tout ce qu'il y a au monde de plus respectable. A qui ferai-je comprendre que je ne me croyais victime d'aucune injustice, que j'étais fort satisfait de mon sort et de ma position dans l'Université française, que des maîtres parisiens pour qui j'avais une profonde admiration voulaient bien me témoigner de la bienveillance ? Aussi n'était-ce pas de ma spécialité que j'entendais parler ; je savais bien que, là, c'était par mes travaux que je pouvais agir, bien mieux que par de vaines paroles. Sur toutes les autres, j'étais fort ignorant, et je le suis encore ; mais je n'avais pas fermé mes oreilles à ce qui s'en était dit autour de moi à l'étranger ; j'en ai entendu bien plus depuis lors, et de la bouche des savants les plus capables d'en juger avec impartialité et compétence. Je soupçonnais alors, je sais maintenant, qu'il y a des chercheurs et des laboratoires français dont on ne parle dans le monde qu'avec estime, parfois avec respect. Je sais qu'on les compte sur les doigts, et que leur éminence ne rend que plus sensible la platitude de la contrée environnante. Pourquoi n'y en a-t-il pas plus ? Dès 1937, j'avais cru en apercevoir les raisons :

> *"Supposons que dans tel ou tel domaine, disons la Théorie des Nombres (il ne me coûte rien d'en parler, elle n'est pas enseignée dans les universités françaises), les maîtres véritables soient venus à faire défaut ; que les chaires les plus en vue et les positions dominantes se trouvent occupées par des hommes, non pas ignorants ou sans compétence, mais sans éclat, ou, chose peut-être plus grave encore, par de ces savants (ils sont nombreux, et, pour des raisons qu'il faudrait bien examiner, ils le sont tout particulièrement dans les universités françaises) à qui quelques travaux brillants ont valu au début de leur carrière une réputation qu'ils n'ont pu ou ne se sont pas souciés de soutenir. Que va-t'il se passer, si de tels hommes (chargés d'honneur, sans doute, et de titres) sont installés au pouvoir ? Car, reconnaissons-le, c'est un pouvoir véritable qu'ils détiennent ; pouvoir de distribuer les places ; pouvoir, plus important encore lorsqu'il s'agit de science expérimentale (c'est pourquoi chaque matin en me levant je remercie Dieu de m'avoir fait mathématicien) d'allouer les crédits de laboratoire et les moyens de recherche ; pouvoir, de par les positions qu'ils occupent, d'attirer à soi les jeunes, et de conserver pour soi des collaborateurs qui à d'autres sont refusés. De ces jeunes, que va-t-il arriver ? Quel est avenir d'une science dont l'enseignement est une fois tombé entre les mains de pontifes de cette espèce ? Maints exemples, que j'ai pu étudier (et non pas seulement en France, qu'on le croie bien ; je ne crois pas tout parfait ailleurs, et j'ai observé en d'autres pays des phénomènes tout semblables), permettent de donner de ce qui doit se passer une description assez précise : le tableau clinique de la maladie (comme disent, je crois, les médecins) est bien connu. De tels hommes ne tardent pas à tomber en dehors des grands courants de la science ; non pas de la Science Française, mais de la science (sans majuscule) qui est universelle ; ils travaillent, souvent honnêtement, de très bonne foi et non sans talent,*

ou d'autres fois ils font semblant de travailler, mais en tout cas ils sont étrangers aux grands problèmes, aux idées vivantes de la science de leur époque ; et à leur suite, c'est toute leur école qui se trouve égarée dans des eaux stagnantes (parfois bourbeuses, mais cela c'est une autre histoire) ; des jeunes gens bien doués passent les années les plus importantes de leur carrière scientifique, les premières, à travailler à des problèmes sans portée et dans des voies sans issue. Il faudrait les envoyer à l'étranger, ces jeunes gens, les initier à toutes les méthodes, à toutes les idées car, quand bien même il s'agirait du maître le plus éminent, qu'est-ce que l'éléve d'un seul maître ? Mais quoi ? L'on a trop peur de perdre des collaborateurs et des disciples, et, à leur place, de voir revenir des juges, des juges sévères. Qu'il est préférable de les garder auprès de soi, de s'en faire aider, de les maintenir autant qu'il se peut dans des voies tracées ! Qu'ils aient du talent, c'est bien ; qu'ils soient sages de plus, et (sans nuire à la hiérarchie ni à l'ordre d'ancienneté) toutes les voies leur sont ouvertes ; et s'ils sont sages, le talent même après tout n'est pas indispensable, ume bonne petite chaire les récompensera."

J'ai copié mot pour mot, et mon manuscrit de 1937 est là pour le prouver. J'avais bien écrit "théorie des nombres" ; je n'avais pour cela d'autre raison que celle que j'en donnais, c'est-à-dire qu'il n'existait alors aucune chaire de ce titre. J'étais assez naïf pour espérer ainsi ne blesser personne, dans cet article où je blessais tout le monde. Je ne prévoyais pas qu'un jour serait créée à la Sorbonne une chaire de théorie des nombres, ni que ce serait au profit d'un administrateur chevronné, ancien recteur et directeur de ministère ; encore moins pouvais-je prévoir que la nomination de son successeur serait l'occasion d'un épisode qu'il vaut la peine de raconter ici, car il complète, fort heureusement du point de vue du clinicien, fort fâcheusement de tout autre point de vue, le "tableau clinique" que j'esquissais en 1937. Pour plus de clarté, j'y joindrai le récit d'une nomination universitaire récente en Allemagne ; la comparaison sera instructive.

Parmi les nombreux savants européens émigrés aux Etats-Unis, on comptait, vers la fin de la guerre, deux des plus grands mathématiciens contemporains, l'un allemand, l'autre français. Nous les appellerons A et B. Tous deux se sont particulièrement distingués en théorie des nombres.

A était resté en Allemagne jusqu'au début de 1940. Il n'était pas juif. Ses sentiments d'hostilité au régime étaient bien connus de ses collègues et n'étaient pas ignorés des autorités universitaires ; mais il n'avait jamais eu aucune activité politique et n'avait pas été inquiété. Peut-être aurait-il quitté son pays plus tôt s'il n'avait pas pensé, par sa présence, renforcer ce qui restait alors en Allemagne de pensée libre ; il est vrai aussi qu'un voyage en Amérique l'avait convaincu que le climat intellectuel de ce pays lui convenait mal. S'il se décida à émigrer en 1940, ce qui n'alla pas sans difficultés ni risques, ce fut sans doute qu'alors il désespéra de l'avenir de l'Europe. Pendant la guerre, il fut traité par les Américains en réfugié, c'est-à-dire assez mal. Du moins y trouva-t-il de quoi vivre et poursuivre ses travaux, tandis que la plupart et les meilleurs des savants allemands qui avaient cherché un asile en France à la suite des premières persécutions hitlériennes avaient dû en repartir faute de possibilités de travail. Vers la fin de la guerre, l'une des chaires si enviées de l'Institute for Advanced Study, de Princeton, lui fut offerte ; il l'accepta, et se fit citoyen américain.

Mais l'Allemagne se relevait de ses ruines matérielles et intellectuelles plus vite qu'on n'avait pu s'y attendre ; le travail scientifique y redevenait possible. Malgré la longueur de son séjour en Amérique, A n'avait pu s'accoutumer à bien des aspects de la vie américaine qui lui avaient déplu dès l'abord ; quelques-uns de ses amis restés en Allemagne s'en aperçurent. Il n'en fallut pas plus. Bientôt, la plus célèbre des universités d'Allemagne occidentale lui offrit une chaire. Il ne pouvait être question là d'une situation matérielle comparable à celle qu'il avait à Princeton ; mais on sait que les universités allemandes peuvent, dans une certaine mesure, proportionner le traitement à la valeur et à la réputation scientifiques ; on lui en offrit un fort supérieur à celui de la plupart de ses collègues allemands ; pour l'attirer, on lui offrit le remboursement de tous ses frais de déménagement. Suivant la loi allemande, la nomination d'un étranger à une chaire universitaire lui confère de plein droit la naturalisation ; on offrit au professeur A, à son choix, de reprendre la nationalité allemande ou de conserver la nationalité américaine. Et tout cela fut fait sans qu'il eût rien demandé, sans qu'il eût eu à rien demander. Il accepta ; et sa présence et son enseignement n'ont pas peu contribué à rendre à l'Université dont il s'agit une partie du lustre qu'elle avait eu autrefois.

Quant au Francais, la déclaration de guerre l'avait surpris à Princeton ; mobilisable, il prit l'avis de l'ambassade de France, qui lui recommanda de rester où il était ; un professeur francais à l'étranger, pensait-on alors assez raisonnablement, était plus utile à la France qu'un soldat de plus sous l'uniforme. Il passa donc la guerre aux Etats-Unis. Celle-ci finie, les postes les plus brillants lui furent bientôt offerts ; Princeton, Harvard, Columbia se le disputèrent. C'est dans cette dernière université qu'il se fixa, dans l'une des meilleures chaires qu'elle eût à offrir ; quelque temps auparavant, il s'était fait naturaliser américain. Mais lui aussi se lassa des Etats-Unis, et désira rentrer en France. C'est ici que son histoire cesse de ressembler à la précédente.

Tout d'abord, en France, on n'offre pas une chaire à un savant, si distingué soit-il ; il faut qu'il fasse acte de candidature ; il faut le plus souvent qu'il fasse ses visites de candidature, formalité destinée principalement à permettre à ceux dont il postule les suffrages de juger de la souplesse de son échine. Les amis du professeur B, mis au courant de ses intentions, attendirent longtemps une occasion favorable. Plusieurs chaires devinrent vacantes, mais chaque fois les jeux étaient faits. Enfin le titulaire de la chaire de théorie des nombres prit sa retraite ; les amis de B pensèrent qu'il ne convenait pas de différer plus longtemps. Pour cette chaire, B était si éminemment qualifié qu'il ne semblait pas que quiconque, en France ou ailleurs, put la lui disputer sans ridicule.

Mais il fallait d'abord que cette candidature fût recevable. La loi française n'admet plus, depuis longtemps déjà, que nos universités puissent s'enrichir par des nominations de savants étrangers, comme c'est l'usage dans presque tous les autres pays ; il en est ainsi, quand bien même l'étranger ne serait tel que par naturalisation. Mais, par hasard, B n'avait pas perdu sa nationalité française en acquérant la nationalité américaine. Force fut à la Sorbonne d'enregistrer sa candidature.

Alors se déclencha une campagne d'une violence extraordinaire. On vit un membre de l'Institut monter en personne sur la brèche pour défendre la citadelle menacée. On feignit de mettre en doute la valeur mathématique du candidat. Parmi les éloges que la critique avait décernés à ses ouvrages, on rechercha les réserves et les objections de détail ; par un montage habile de citations tronquées, on composa un texte qui put impressionner défavorablement les incompétents ; or, comme c'est l'ensemble d'une Faculté qui vote sur chaque nomination, toutes spécialités réunies (depuis les mathématiques jusqu'à la botanique), c'est nécessairement, en chaque cas, une majorité d'incompétents qui décide. On reprocha à B de n'être pas rentré endosser un uniforme en 1939 ; on mobilisa contre lui les "anciens combattants" et "anciens résistants" professionnels ; il n'en manque pas dans l'Université, dont toute la carrière ne se fonde que là-dessus ; et je ne parle pas de ces patriotes tardifs, toujours cherchant à faire oublier qu'ils se sont déshonorés, et obligeant par là même, quoi qu'on en ait, à s'en souvenir toujours. On gonfla les mérites du suppléant du précédent titulaire de la chaire. On fit si bien que ce suppléant l'emporta. La seule consolation de B fut que son éloignement l'avait préservé de participer à cette mêlée sordide. Ses amis s'étaient chargés pour lui des visites de candidature ; cétaient des savants fort distingués, eux aussi ; le résultat a prouvé qu'ils auraient pu mieux employer leur temps.

Mais l'histoire ne finit pas là. A tort ou à raison, le bruit se répandit que la direction de l'enseignement supérieur désirait récupérer pour la France un mathématicien si éminent et ne se refuserait pas à une création de chaire en sa faveur pour peu que la Sorbonne la demandât. N'était-ce pas occasion pour ces Messieurs de réparer leur erreur sans chagriner personne ? Si le ministère n'avait pas les intentions qu'on lui prêtait, du moins l'honneur de la Sorbonne serait sauf, ou presque. Mais non : c'était bien le talent trop distingué du candidat qui l'excluait. Nouveau vote, nouvel échec. Et le professeur B est toujours à l'Université Columbia, qui s'en félicite et eût été bien en peine de le remplacer.

Ainsi joue la loi de la cooptation des médiocres, que je m'imaginais découvrir en 1937 ; loi d'autant plus fatale qu'il faut à un homme des qualités de premier ordre pour qu'il désire attirer auprès de lui ses égaux, au risque qu'ils lui soient supérieurs. Un homme médiocre, au contraire, cherchera toujours à s'entourer non pas seulement de médiocres, mais de plus médiocres que lui ; il le faut bien, pour faire briller ses minces mérites. Ce n'est pas d'hier que la plupart de nos institutions scientifiques sont prises dans les rouages de ce mécanisme inexorable.

La situation est-elle sans remède ? Peut-on imaginer des réformes qui en amèneraient le redressement ? Ce n'est pas douteux. Il reste assez d'éléments sains dans le monde scientifique francais, il y a assez de talent parmi les jeunes pour permettre les plus sérieux espoirs si on se décidait faire le nécessaire. J'en ai assez dit pour faire comprendre qu'une telle réforme ne peut partir que d'en haut. Il y faudrait un acte d'autorité ; et elle se heurterait à la plus violente résistance de la part de la majorité des universitaires francais, de l'Institut, du Collège de France, de corps constitués et de personnalités dont il est d'usage de ne parler en public que sur un ton de profond respect. Peut-être, après tout, n'y faudrait-il qu'encore un peu plus de courage que pour s'attaquer aux intérêts des viticulteurs ou au privilège des bouilleurs de cru. La politique, dit-on, est l'art du possible ; où, en pareille matière, est le possible ? Je ne suis pas politicien ; ce n'est pas mon métier de le savoir. Rien de ce que je vais dire n'est impossible en soi, puisque tout cela se pratique sous nos yeux dans les pays qui sont à la tête du mouvement scientifique moderne. Sommes-nous encore capables de nous instruire à leur exemple ? Je n'en sais rien ; si nous ne le sommes pas, tant pis pour nous.

Quelles sont donc ces réformes qui pourraient nous tirer de la profonde ornière où nous sommes ? Il n'y a pas là grand mystère ; tous ceux qui y ont quelque peu réfléchi sans préjugé et de bonne foi savent bien à quoi s'en tenir là-dessus. Il suffira ici d'indiquer brièvement quelques points essentiels.

D'abord, il faut s'attaquer à une organisation vicieuse, qui fait de l'Université de France un monstre hydrocéphale, dont la Sorbonne est la tête difforme et les universités de province sont les membres exsangues. Lors de la réforme de Liard, il est notoire que celui-ci céda à des pressions électorales en acceptant beaucoup plus d'universités qu'il ne le jugeait souhaitable. Il disait, paraît-il, que cela n'avait pas d'importance, parce que la plupart mourraient d'elles-mêmes. Il n'avait pas prévu que les autorités locales, municipalités, chambres de commerce, fières du prestige qui en rejaillissait sur elles, leur accorderaient tout juste le soutien nécessaire pour les faire subsister et en tirer quelques menus services, sans bien entendu leur donner les ressources qui en auraient fait de vrais centres intellectuels. Là où par hasard se forme en province un noyau scientifique intéressant, il végète faute d'étudiants ; les bons étudiants se dirigent sur Paris où ils se trouvent noyés dans la foule et ne peuvent que rarement tirer profit de l'enseignement de maîtres débordés de tous côtés.

Même dans les quelques domaines où la France tient encore son rang, il ne saurait être question de trouver assez de maîtres et de chercheurs pour monter plus de quatre ou cinq grands centres. Donc, la première réforme doit consister à rabaisser la plupart de nos universités au rang de centres propédeutiques intermédiaires entre le secondaire et le supérieur ; à créer, en province, environ quatre grands centres scientifiques bien dotés en hommes et en moyens, dans des localités bien choisies qui ne seraient pas nécessairement des grandes villes ; à décharger Paris de son trop-plein sur ces centres par des mesures appropriées, dont le détail ne serait pas difficile à formuler.

En second lieu, il faut changer radicalement le mode de nomination des professeurs. Le mieux serait de s'inspirer du système anglais et de mettre toutes les nominations importantes entre les mains de comités restreints offrant un minimum de garanties d'impartialité et de compétence, comités qui devraient obligatoirement (comme il se fait en Angleterre, avec d'autant plus de soin qu'il s'agit d'une chaire plus importante) consulter largement l'opinion scientifique internationale et en tenir le plus grand compte. Dans ces comités devraient entrer pour une large part des savants désignés par le ministre et choisis eux-mêmes en tenant compte de l'opinion internationale. Notons en passant qu'en Angleterre une visite de candidature serait suffisante pour disqualifier aussitôt un candidat.

En troisième lieu, mais en troisième lieu seulement, il faudrait donner, non aux universités actuelles, mais aux quatre ou cinq grands centres qu'il s'agit de constituer, non seulement des ressources, mais aussi une autonomie financière qui les mit sur le même plan que les grandes universités anglaises, allemandes, américaines, et que notre Haut Commissariat de l'Energie Atomique. Je ne veux pas me donner le ridicule ici de répéter, après tant d'autres qui le crient bien fort depuis vingt ans, que la science coûte cher. C'est vrai, encore qu'on ait pu assez souvent autrefois, et qu'on puisse peut-être encore (mais exceptionnellement) aujourd'hui faire avec des moyens modestes d'importantes découvertes. Je ne veux pas rappeler les statistiques humiliantes qu'on a publiées à maintes reprises sur le budget de la recherche scientifique en France comparé à celui qu'on y consacre ailleurs, "Je vous ferai de bonne chère, disait Maître Jacques, si vous me donnez bien de l'argent.". Il avait raison ; et, quand même il aurait été un fripon, cela n'aurait pas suffi à lui donner tort sur ce point. Il faudra donc de l'argent, bien de l'argent, pour les laboratoires, les bibliothèques, le personnel subalterne. Il faudra bien aussi se décider à payer décemment le personnel scientifique proprement dit. Il faudra permettre à nos grands centres scientifiques de recruter celui-ci par contrats individuels, comme le fait le Haut Commissariat de l'Energie Atomique et comme le font les grandes Universités étrangères. Il faudra qu'on puisse, le cas échéant, nommer à nos grandes chaires et à la direction de nos grands laboratoires des étrangers qualifiés. Les Anglais, dont les traditions scientifiques valent bien les nôtres, le font parfois et s'en trouvent bien ; la France l'a fait autrefois ; pourquoi faut-il que notre amour-propre national en soit arrivé à emporter sur notre intérêt bien compris ? Il faudra que les contrats que nos grands centres seront en mesure d'offrir leur permettent d'entrer en concurrence, avec quelque chance de succès, avec les institutions similaires à l'étranger.

Bien entendu, lorsqu'on se sera résolu à traiter convenablement nos savants, on sera en droit d'attendre d'eux qu'ils se consacrent honnêtement à leur enseignement et leurs recherches. Mais il ne sera pas besoin pour cela de règlements draconiens. Ce n'est pas de gaieté de cœur que tant d'universitaires, chez nous, cherchent un supplément à de maigres ressources dans des pratiques variées où se consume leur temps et leur énergie, cumul d'enseignements de bas étage, trust des examens et concours, et trop souvent mise à la disposition de l'industrie privée de laboratoires officiellement consacrés à la science pure. En Angleterre, en Amérique, en Allemagne, l'industrie privée a ses propres laboratoires de recherche, souvent si largement conçus qu'il s'y fait de nombreux travaux scientifiques de grande valeur. En France, les industriels, quand ils ne travaillent pas sur licences étrangères, trouvent trop souvent plus économique de faire travailler à leur compte un laboratoire universitaire en échange d'un supplément de traitement dérisoire accordé au professeur qui le dirige. Bien entendu, la liaison entre science pure et science appliquée est chose hautement souhaitable ou plutôt indispensable, mais qui ne s'obtient pas en étouffant celle-là au profit de celle-ci par des arrangements qui constituent de véritables escroqueries aux dépenses de l'Etat.

Assurément, bien d'autres questions se posent : recrutement des jeunes, rôle des “grandes écoles”, liaison entre l'enseignement et la recherche. Je ne crois pas utile d'en discuter ici. Je ne pense pas qu'aucune d'elles puisse offrir de difficulté sérieuse dans un climat redevenu favorable.

Le redeviendra-t-il ? Se trouvera-t-il un chirurgien pour mettre sur la table d'opération un malade qui prétend qu'il ne s'est jamais mieux porté ? S'il ne s'en rencontre pas, faut-il désespérer ? ou attendre le salut de l'intervention miraculeuse du génie ?

> *“Bien sûr, le génie perce quand même ; le génie se fait toujours sa place, à travers tous les obstacles ; bien sûr... (je n'en suis pas si sûr que ça). Oui, mais pour le génie même que d'années perdues ; quel retard, quelles sordides difficultés ; et tous les autres, ceux qui auraient pu faire œuvre utile, maintenir, en attendant la venue du génie, une tradition honorable et parfois glorieuse, tous ces autres, quoi d'eux ? Souvent ils s'aperçoivent des années perdues ; un peu trop tard, ils se remettent à l'école ; ils tentent de se refaire une place dans la colonne en marche, quand leur esprit a perdu sa souplesse et sa plasticité ; ils se hissent avec difficultés à un échelon où d'autres avant eux parvinrent, puis, effort fourni, ils y restent, ils sont dépassés. Ils y restent, et l'histoire recommence... Une fois provincialisé, une fois tombé dans l'ornière, on y reste. Sauf miracle, bien sûr : car*

> *l'esprit, c'est le miracle ; mais n'y comptons pas trop, ou plutôt, le miracle arrive à qui aura su le mériter."*

Je nétais guère optimiste en 1937. Je ne le suis pas plus à présent.

André Weil
Professeur à l'Université de Chicago.

Histoire des mathématiques : pourquoi et comment
André Weil

Mon premier point sera un point évident. Contrairement à certaines sciences dont l'histoire complète consiste en l'assemblage de souvenirs de quelques-uns de nos contemporains, les mathématiques ont non seulement une histoire, mais elles ont même une histoire longue, qui a été écrite au moins depuis Eudemos (un élève d'Aristote). En effet, la question "Pourquoi ?" est peut-être superflue, ou serait mieux reformulée en "Pour qui ?"

Pour qui quelqu'un écrit-il une histoire générale ? Pour le profane éduqué, comme Hérodote l'a fait ? Pour les hommes d'état et les philosophes, comme Thucydides ? Pour quelques historiens, comme cela se fait la plupart du temps de nos jours ? Quelle est l'audience d'un historien de l'art ? Ses collègues, ou bien un public amateur d'art, ou encore les artistes (qui semblent n'en avoir que peu d'utilité) ? Qu'en est-il d'une histoire de la musique ? Concerne-t-elle principalement des amoureux de la musique, ou des compositeurs, ou des artistes en exercice, ou des historiens, ou est-elle une discipline totalement indépendante dont l'appréciation ne peut être que restreinte à ceux qui la pratiquent ? Des questions similaires ont été chaudement débattues pendant de nombreuses années parmi les historiens éminents des mathématiques, Moritz Cantor, Gustav Enestrém, Paul Tannery. Même Leibniz avait quelque chose à dire à ce propos, comme à propos de nombreux autres sujets :

> *"Son utilité n'est pas seulement que l'Histoire peut donner à chacun son dû et que d'autres pourraient souhaiter recevoir de telles louanges, mais également que l'art de la découverte doit être promu et que ces méthodes doivent être connues à travers des exemples illustres[1]."*

Que l'humanité puisse être aiguillée vers de plus hautes réalisations par la perspective d'une renommée éternelle est bien sûr un thème classique, hérité de l'antiquité ; il semblerait que nous y soyons devenus moins sensibles que nos aïeux ne l'étaient, même si cette idée n'a peut-être pas perdu toute sa force. Comme l'indique la dernière phrase de Leibniz, son objectif est clair. Il souhaite que l'historien des sciences écrive

Exposé au Congrès international des informaticiens en 1978 à Helsinki.

1. Utilissimum est cognosci veras inventionum memorabilium origines, praesertim earum, quae non casu, sed vi meditandi innotuere. Id enim non eo tantum prodest, ut Historia literaria suum cuique tribuat et alii ad pares laudes invitentur, sed etiam ut augeatur ars inveniendi, cognita methodo illustribus exemplis. Inter nobiliora hujus temporis inventa habetur novum Analyseos Mathematicae genus, Calculi differentialis nomine notum..." (Math, Schr., ed. C. I. Gerhardt, t. V, p. 392).

en premier lieu pour les scientifiques créatifs, ou potentiellement créatifs. C'était l'audience qu'il avait en tête en écrivant rétrospectivement à propos de son “invention la plus noble” du calcul différentiel.

D'un autre côté, comme l'a observé Moritz Cantor, on peut traiter l'histoire mathématique en la considérant comme une discipline auxiliaire, destinée à fournir aux vrais historiens des catalogues fiables de faits mathématiques, arrangés par dates, pays, sujets et auteurs. L'histoire mathématique serait alors une portion, et une portion pas vraiment significative, de l'histoire des techniques et des technologies, et il serait juste de la regarder alors complètement de l'extérieur. L'historien du XIX$^{\text{ème}}$ siècle a besoin d'avoir quelques connaissances sur les progrès qui ont été fait sur les moteurs de trains. Il dépend de spécialistes pour obtenir cette information, mais il se moque de la façon dont fonctionne un moteur, ou bien de l'immense effort intellectuel qu'il a fallu pour créer la thermodynamique. De manière similaire, le développement des tables nautiques et d'autres aides à la navigation est de peu d'importance pour l'historien du XVII$^{\text{ème}}$ siècle en Angleterre, mais l'importance de Newton dans ce domaine lui fournira au mieux une note de bas de page ; le fait que Newton ait été un “gardien de la Menthe” (une position honorifique anglaise de représentation de la Royauté) ou l'oncle de la maîtresse d'un grand gentilhomme, l'intéressera davantage historiquement que Newton le mathématicien.

D'un autre point de vue, les mathématiques peuvent occasionnellement fournir à l'historien de la culture une sorte de “traceur” pour étudier l'interaction entre différentes cultures. Avec cela, nous approchons d'éléments présentant un véritable intérêt pour nous les mathématiciens ; mais même là, nos attitudes diffèrent largement de celles des historiens professionnels. Pour eux, une pièce romaine, trouvée quelque part en Inde, a une signification précise ; c'est rarement le cas d'une théorie mathématique.

Cela ne signifie pas pour autant qu'il n'est pas possible qu'un théorème ne soit pas redécouvert de temps à autre, voire même dans des environnements culturels assez différents. Quelques séries de puissances semblent avoir été découvertes indépendamment en Inde, au Japon et en Europe. Des méthodes pour la solution de l'équation de Pell ont été exposées en Inde par Bhaskara au XX$^{\text{ème}}$ siècle, et ensuite à nouveau, à la suite d'un défi de Fermat, par Wallis et Brouncker en 1657. On peut même ajouter des arguments au sujet du fait que des méthodes similaires aient été connues des Grecs, peut-être par Archimède lui-même ; comme l'a suggéré Tannery, la solution indienne pourrait être d'origine grecque ; jusque là, cela reste une spéculation peu suivie. Il est certain que personne ne suggèrerait de connexion entre Bhaskara et nos auteurs du XVII$^{\text{ème}}$ siècle.

D'un autre côté, quand les équations quadratiques, résolues algébriquement dans des textes cunéiformes, refont surface chez Euclide, habillées d'un costume géométrique sans aucune motivation géométrique du tout, le mathématicien trouvera approprié de décrire ce dernier traitement comme étant de l'"algèbre géométrique" et il sera enclin à assumer la connexion avec Babylone, même en l'absence d'une évidence "historique" concrète. Personne ne demande de documents pour attester de l'origine commune du grec, du russe et du sanskrit, ou ne fait d'objection à leur désignation comme langages indo-européens.

Maintenant, laissant de côté les vues et souhaits des profanes et des spécialistes des autres disciplines, il est temps de revenir à Leibniz, et de considérer la valeur de l'histoire mathématique, à la fois intrinsèquement et de notre propre point de vue en tant que mathématiciens. En modifiant très légèrement le point de vue de Leibniz, nous pouvons dire que sa première utilité pour nous est de mettre ou de garder devant nos yeux des "exemples illustres" d'un travail mathématique de premier ordre.

Cela rend-il les historiens nécessaires ? Peut-être que non. Eisenstein est tombé amoureux des mathématiques très jeune en lisant Euler et Lagrange ; aucun historien ne lui a dit de le faire ou ne l'a aidé à les lire. Mais à son époque, les mathématiques progressaient d'une manière moins trépidante qu'aujourd'hui. Il ne fait aucun doute qu'un jeune homme peut de nos jours chercher des modèles et une inspiration dans le travail de ses contemporains ; mais cela se montrera rapidement comme étant une sévère imitation. D'un autre côté, s'il souhaite aller plus loin en arrière, il peut ressentir le besoin d'être quelque peu guidé ; c'est la fonction de l'historien, ou à tout niveau du mathématicien qui a un certain sens de l'histoire, de lui fournir une telle aide.

L'historien peut aussi aider d'une autre manière. Nous connaissons tous d'expérience ce qui peut être gagné à travers les connaissances personnelles quand nous souhaitons étudier le travail contemporain ; nos rencontres et conférences n'ont en fait aucun autre but. Les vies des grands mathématiciens du passé peuvent souvent avoir été ternes et peu excitantes, ou peuvent le sembler au profane ; pour nous, les biographies présentent moins de valeur pour nous rendre vivantes les personnes et leur environnement que leurs écrits. Quel mathématicien ne souhaiterait pas en savoir davantage sur Archimède que sa contribution supposée à la défense de Syracuse ? Notre compréhension de la théorie des nombres d'Euler serait-elle la même si nous n'avions pas ses publications à notre disposition ? L'histoire n'est-elle pas plus intéressante quand nous lisons son emménagement en Russie, ses échanges de lettres avec Goldbach, l'amenant presque accidentellement au contact du travail de Fermat, puis, plus tard dans sa vie, le début de sa correspondance avec Lagrange sur la théorie des nombres et les intégrales elliptiques ? Ne serions-nous pas ravis, qu'à travers ses lettres, un tel homme ne soit pas devenu pour nous comme un proche qui nous est plus intimement connu ?

Jusque là, pourtant, je n'ai fait qu'aborder la surface de mon thème. Leibniz suggérait l'étude d'"exemples illustres", non pour le plaisir esthétique que cela pourrait procurer, mais principalement de telle manière à "promouvoir l'art de la découverte". Ici, il est nécessaire de clarifier la distinction, dans les matières scientifiques, entre la tactique et la stratégie.

Par tactique, j'entends la gestion des outils quotidiens à la disposition des scientifiques ou des étudiants à un moment donné ; ils sont mieux appris d'un enseignant compétent et de l'étude du travail contemporain. Pour le mathématicien, cela peut inclure l'utilisation du calcul différenciel à un moment donné, ou de l'algèbre homologique à un autre moment. Pour l'historien des mathématiques, la tactique a beaucoup en commun avec celle des historiens. Il doit chercher sa documentation à sa source, ou aussi près d'elle que possible ; l'information de seconde main est de peu de valeur. Dans certains domaines de recherche, on doit partir à la chasse et lire des manuscrits ; dans d'autres, on peut se contenter des textes publiés, mais alors la question de leur fiabilité ou manque de fiabilité au contraire doit toujours être gardée à l'esprit. Une exigence indispensable est une connaissance adéquate de la langue des sources ; c'est un principe basique et sensé de toute recherche historique qu'une traduction ne peut jamais remplacer une œuvre originale quand cette dernière est disponible. Par chance, l'histoire des mathématiques occidentales après le $\text{XV}^{\text{ème}}$ siècle ne nécessite aucune connaissance en plus du latin et des langages modernes d'Europe de l'ouest ; pour de nombreux objectifs, le français et l'allemand, et parfois l'anglais, peuvent même être suffisants.

En contraste avec cela, la stratégie signifie l'art de reconnaître les problèmes principaux, de les attaquer sur leurs points faibles, de mettre en place les futures lignes à l'avance. La stratégie mathématique est concernée par les objectifs à long terme ; elle nécessite une profonde compréhension des grandes tendances et de l'évolution des idées sur de longues périodes. Elle est presque indiscernable de ce que Gustav Eneström avait l'habitude de décrire comme l'objet principal de l'histoire mathématique, à savoir "les idées mathématiques, considérées historiquement" [2], ou, comme l'a noté Paul Tannery, "la filiation des idées et l'enchaînement des découvertes" [3]. Là nous sommes au cœur de la discipline dont nous discutons, et c'est un fait heureux que l'aspect vers lequel, selon Eneström et Tannery, l'historien mathématique doit diriger principalement son attention est aussi celui de la plus grande importance pour tout mathématicien qui veut regarder au-delà de la pratique journalière de son métier.

La conclusion à laquelle nous sommes amenés a peu de substance, c'est vrai, à moins que nous soyons d'accord sur ce qui est et ce qui n'est pas une idée mathématique.

2. Die mathematischen Ideen in historischer Behandlung (Bibl. Math. 2 (1901), p.1).
3. cf. *La filiation des idées et l'enchaînement des découvertes* (P. Tannery, Œuvres, vol. X, p. 166).

A ce sujet, le mathématicien est très enclin à consulter les autres. Selon les mots de Housman (lorsqu'on lui demanda de définir la poésie), il est possible qu'il ne soit pas capable de définir ce qu'est une idée mathématique, mais il aime à penser que quand il en sent une, il la reconnaît. Il est susceptible de ne pas en voir une, par exemple, dans les spéculations d'Aristote à propos de l'infini, ou bien chez un certain nombre de penseurs médiévaux sur le même sujet, même si certains d'entre eux étaient plus intéressés par les mathématiques qu'Aristote ne l'était ; l'infini est devenu une idée mathématique après que Cantor ait défini les ensembles équipotents et prouvé quelques théorèmes à leur propos. Les idées des philosophes grecs à propos de l'infini peuvent être d'un grand intérêt en tant que telles ; mais sommes-nous prêts à croire qu'elles ont eu une grande influence sur le travail des mathématiciens grecs ? A cause d'elles, Euclide aurait dû s'abstenir de dire qu'il y a une infinité de nombres premiers, et aurait dû énoncer ce fait différemment.

Comment se fait-il alors que, quelques pages plus loin, il établisse qu'"il y a une infinité de segments"[4] incommensurables à un segment donné ? Certaines universités ont créé des chaires d'"histoire et philosophie des mathématiques" ; il est difficile pour moi d'imaginer ce que ces deux sujets peuvent avoir en commun.

Il est difficile de déterminer où ces "notions communes" (pour utiliser l'expression d'Euclide) s'arrêtent et où commencent les mathématiques. La formule pour la somme des n premiers entiers, liée de façon proche au concept "Pythagoréen" de nombres triangulaires, mériterait certainement d'être appelée idée mathématique ; mais que devrions-nous dire à propos de l'arithmétique commerciale élémentaire, comme elle apparaît dans tant et tant de livres depuis l'antiquité jusqu'au livre de recettes d'Euler sur le même sujet ? Le concept d'icosaèdre régulier appartient clairement aux mathématiques ; devrions-nous dire la même chose à propos du concept de cube, ou de celui de rectangle, ou de celui de cercle (qui ne doit peut-être pas être séparé de l'invention de la roue) ? Ici nous avons une zone de crépuscule entre l'histoire culturelle et l'histoire mathématique ; cela n'a pas trop d'importance de savoir où l'on place la frontière. Tout ce que le mathématicien peut dire est que plus son intérêt tend à fléchir, plus il se met à traverser cette frontière.

Cependant, une fois qu'on s'est mis d'accord sur le fait que les idées mathématiques sont les objets réels de l'histoire mathématique, il est possible d'en tirer des conséquences utiles ; l'une a été formulée ainsi par Tannery (*loc. cit.* note 3, p. 164). Il n'y a aucun doute, dit-il, sur le fait qu'un scientifique peut posséder ou acquérir toutes les qualités nécessaires pour faire un excellent travail sur l'histoire des sciences ; plus grand est son talent en tant que scientifique, meilleur sera son travail historique. Comme exemples, il mentionne Chasles pour la géométrie ; ainsi que Laplace pour l'astronomie, Berthelot pour la chimie ; peut-être pensait-il également à son ami Zeu-

4. traduction de la phrase en grec ancien (Bk. X, Def. 3).

then. Il aurait pu également mentionner Jacobi, si Jacobi avait suffisamment vécu pour publier son travail historique [5].

Mais les exemples sont grandement nécessaires. En effet, il est évident que la capacité à reconnaître les idées mathématiques sous une forme obscure et fruste, et d'en poursuivre la trace sous les nombreux déguisements qu'elles sont capables de prendre avant de sortir en pleine lumière, doit être associée à une compétence mathématique plus que moyenne. De plus, elle est la composante essentielle du talent mathématique en question, puisque pour une large part, la découverte consiste à saisir fermement les idées vagues qui sont "dans l'air", quelques-unes d'entre elles volant tout autour de nous, quelques-autres (pour citer Platon) flottant dans nos propres cerveaux.

Combien de connaissances mathématiques doit-on posséder pour traiter l'histoire mathématique ? Selon certains, on doit en connaître aussi peu que ce qui était connu des auteurs que l'on souhaite étudier [6] ; d'autres vont même jusqu'à penser que moins l'on en sait, mieux on est préparé à lire ces auteurs avec un esprit ouvert et à éviter les anachronismes. C'est plutôt l'opposé qui est vrai. Une compréhension en profondeur des mathématiques à une période donnée ne peut être obtenue sans une connaissance étendue bien au-delà de son sujet visible. Plus souvent que le contraire, ce qui rend une telle étude intéressante, c'est précisément l'occurrence tôt dans l'histoire de concepts et méthodes destinés à émerger seulement plus tard dans l'esprit conscient des mathématiciens ; la tâche de l'historien est de s'en désengager et de tracer leur influence ou leur manque d'influence sur les développements ultérieurs. L'anachronisme consiste à attribuer à un auteur une telle connaissance consciente qu'il n'a jamais eue ; il y a une grande différence entre le fait de reconnaître Archimède comme le précurseur du calcul différentiel et intégral, dont l'influence sur les découvreurs du calcul ne peut être sous-estimée, et avoir la fantaisie de le voir, comme cela a pu parfois être fait, comme un praticien ancien de tels calculs. D'un autre côté, il n'y a aucun anachronisme dans le fait de considérer Desargues comme le découvreur de la géométrie projective des sections coniques ; mais l'historien doit souligner que son travail, et celui de Pascal, seraient sûrement tombés dans l'oubli le plus total, et n'ont pu être sauvés de cet oubli qu'après que Poncelet et Chasles aient indépendamment redécouvert le sujet dans son ensemble.

De manière similaire, considérons l'assertion suivante : les logarithmes établissent

5. Jacobi, comme étudiant, avait hésité entre la philologie classique et les mathématiques ; il en a toujours gardé un profond intérêt pour les mathématiques grecques et l'histoire mathématique ; des extraits de ses écrits à ce sujet ont été publié par Koenigsberger dans sa biographie de Jacobi (incidemment, un bon modèle de biographie orientée vers les mathématiques d'un grand mathématicien) : voir L. Koenigsberger, *Carl Gustav Jacob Jacobi*, Teubner, 1904. pp. 385-395 et 413-414.

6. Cela semble être l'avis de Loria : "Per comprendere e giudicare gli scritti appartenenti alle età passate, basta di essere esperto in quelle parti delle scienze che trattano dei numeri e delle figure e che si considerano attualmente come parte della cultura generale dell'uomo civile" (G. Loria, *Guida allo Studio della Storia delle Matematiche*, U. Hoepli, Milano, 1946, p. 271).

un isomorphisme entre le semi-groupe multiplicatif des nombres entre 0 et 1 et le semi-groupe additif des nombres réels positifs. Cela aurait pu ne pas faire sens jusqu'à assez récemment. Si, pourtant, nous laissons les mots de côté, et regardons les faits derrière une telle assertion, il n'y a aucun doute qu'elle était bien comprise par Neper quand il a inventé les logarithmes, excepté que sa conception des nombres réels n'était pas aussi claire que la nôtre ; c'est pourquoi il dût utiliser les concepts cinématiques pour clarifier sa signification, de la même façon qu'Archimède l'avait fait, pour des raisons similaires, dans sa définition de la spirale [7]. Allons encore plus loin ; le fait que la théorie des rapports de grandeurs et des rapports d'entiers, telle que développée par Euclide dans les livres V et VII des Eléments, doive être regardée comme un chapitre du début de la théorie des groupes est mise hors de doute par l'expression "double ratio" qu'il utilise pour ce qu'il appelle le carré d'un rapport. Historiquement, il est plausible que la théorie musicale ait fourni la motivation originale de la théorie grecque des groupes de rapports d'entiers, en net contraste avec le traitement purement additif des fractions en Egypte ; si tel est le cas, nous avons là un exemple ancien de l'interaction mutuelle entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées. En tous cas, il est impossible pour nous d'analyser correctement le contenu des livres V et VII d'Euclide sans le concept de groupe et même sans celui des groupes d'opérateurs, puisque les rapports de grandeurs sont traités comme des groupes multiplicatifs agissant sur le groupe additif des grandeurs elles-mêmes [8]. Une fois que ce point de vue est adopté, ces livres d'Euclide perdent leur caractère mystérieux, et il devient facile de suivre la ligne qui amène directement d'eux à Oresme et Chuquet, puis à Neper et aux logarithmes (cf. NB, pp. 154-159 et 167-168). Ce faisant, nous ne sommes bien sûr pas en train d'attribuer le concept de groupe à l'un de ces auteurs ; on ne devrait pas non plus l'attribuer à Lagrange, même quand il faisait ce que nous appelons maintenant de la théorie de Galois. D'un autre côté, quand Gauss n'avait pas le terme, il avait certainement le concept clair de groupe commutatif fini, et avait bien été préparé à cela par son étude de la théorie des nombres d'Euler.

Laissez-moi citer quelques exemples de plus. Les écrits de Fermat indiquent qu'il connaissait la théorie des formes quadratiques X^2+nY^2 pour $n=1,2,3$, en utilisant des démonstrations par "descente infinie". Il n'a pas conservé ces preuves ; mais plus tard, Euler a développé cette théorie, en utilisant également la descente infinie, ce qui nous permet de supposer que les démonstrations de Fermat ne différaient pas beaucoup de celles d'Euler. Pourquoi la descente infinie réussit-elle dans ces cas-là ? C'est aisément expliqué par les historiens qui savent que les corps quadratiques ont un algorithme d'Euclide ; ce dernier, transcrit dans le langage et les notations de Fer-

7. cf. N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1960, pp. 167-168 et 174 ; cette collection d'essais historiques, extraites du livre *Eléments de mathématique* du même auteur sous un titre fallacieux, sera désormais dénotée NB.

8. Qu'Euclide ait cru ou non que le groupe des rapports de grandeurs soit indépendant du type des grandeurs étudiées reste un point discutable ; cf. O, Becker, Quellen u, Studien **2** (1933), 369-387.

mat et Euler, donne-t-il précisément leurs preuves par descentes infinies, exactement comme la démonstration de Hurwitz pour l'arithmétique des quaternions, transcrite de la même manière, fournit la preuve d'Euler (qui était peut-être aussi celle de Fermat) de la représentation des entiers en sommes de quatre carrés.

Prenons à nouveau la notation de Leibniz $\int y\, dx$ dans le calcul. Il insiste de manière répétée sur son caractère invariant, d'abord dans sa correspondance avec Tschirnhaus (qui n'en a pas montré sa compréhension), puis dans le *Acta Eruditorum* de 1686 ; il avait même un mot pour cela ("*universalitas*"). Les historiens se sont âprement opposés à lui notamment sur le résultat comparativement moins important que Leibniz avait découvert et qui, dans certains livres, est appelé "le théorème fondamental du calcul". Mais l'importance de la découverte par Leibniz de l'invariance de la notation ydx n'a pu être pleinement appréciée avant qu'Elie Cartan n'introduise le calcul des formes extérieures des différentielles et montre l'invariance des notations $ydx_1 \dots dx_m$, non seulement sous les changements de variables indépendantes (ou de coordonnées locales), mais même sous "pull-back" [9].

Considérons maintenant le débat qui eut lieu entre Descartes et Fermat à propos des tangentes (Cf. NB, p. 192). Descartes, ayant décidé, une fois pour toutes, que seules les courbes algébriques étaient un sujet valable pour les géomètres, inventa une méthode pour trouver leurs tangentes, basée sur l'idée qu'une courbe variable, intersectant une courbe C en un certain point P, devient tangente à C en P quand l'équation de leurs intersections a une racine double correspondant à P. Bientôt, Fermat, ayant trouvé la tangente de la cycloïde par une méthode infinitésimale, posa le défi à Descartes de faire de même avec sa propre méthode. Bien sûr, celui-ci ne put le faire ; étant l'homme qu'il était, il trouva la réponse (Œuvres, I, p. 308), en donna une démonstration ("plutôt courte et plutôt simple", en utilisant le centre de rotation instantané qu'il avait inventé pour l'occasion) et il ajouta qu'il aurait pu fournir une autre preuve "plus à son goût et plus géométrique" qu'il avait omise "pour se préserver de la fatigue de l'écrire" ; cependant, dit-il, "de telles lignes sont mécaniques" et il les excluait de la géométrie. Ceci, bien sûr, était ce que Fermat essayait de faire ; il savait, aussi bien que Descartes, ce qu'est une courbe algébrique, mais restreindre la géométrie à ces courbes était assez étranger à sa manière de penser et à celle de la plupart des géomètres du XVII$^{\text{ème}}$ siècle.

Acquérir des idées sur le caractère d'un grand mathématicien et sur ses faiblesses est un plaisir innocent que même les historiens sérieux ne peuvent nier eux-mêmes. Mais que pouvons-nous conclure d'autre de cet épisode ? Très peu, dans la mesure où la distinction entre la géométrie différentielle et la géométrie algébrique doit être clarifiée. La méthode de Fermat appartenait à la première ; elle dépendait des premiers termes de l'expansion en séries entières locales ; elle fournit le point de départ

9. Cf. NB, p. 208, et A. Weil, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 683.

de tous les développements ultérieurs en géométrie différentielle et calcul différentiel. D'un autre côté, la méthode de Descartes appartient à la géométrie algébrique, mais, si on l'y restreint, elle reste une curiosité jusqu'à ce que le besoin se fasse sentir de méthodes valides sur les corps de base arbitraires.

En effet, le point en litige ne pouvait être et ne fut pas perçu correctement jusqu'à ce que la géométrie algébrique ne lui donne son sens complet.

Il y a également une autre raison pour laquelle le métier d'historien des mathématiques peut être mieux exercé par ceux qui sont ou ont été des mathématiciens actifs, ou au moins qui sont au contact proche de mathématiciens actifs ; il y a plusieurs types d'incompréhensions fréquentes dont notre propre expérience peut nous aider à nous préserver. Nous ne savons que trop bien, par exemple, que nous ne devrions pas supposer systématiquement qu'un mathématicien est toujours complètement au courant des travaux de ses prédécesseurs, même quand il inclut les travaux en question dans ses références bibliographiques ; lequel d'entre nous a-t-il lu tous les livres qu'il a listés dans les bibliographies de ses propres écrits ? Nous savons que les mathématiciens sont rarement influencés dans leur travail par des considérations philosophiques, même quand ils prétendent les prendre très au sérieux ; nous savons qu'ils ont leur propre manière de gérer les matériaux sur lesquels ils appuient leurs travaux, qui vont du mépris téméraire à l'attention critique la plus douloureuse. Par dessus tout, nous avons appris la différence entre une pensée originale et la sorte de raisonnement routinier qu'un mathématicien met souvent en œuvre lorsqu'il doit "faire tourner la machine" dans le but de satisfaire ses pairs, ou peut-être seulement de se satisfaire lui-même. Une démonstration fastidieusement laborieuse peut être un signe de ce que son rédacteur a été moins heureux à s'exprimer ; mais plus souvent que le contraire, comme nous le savons, elle indique qu'il a travaillé sous des contraintes qui l'ont empêché de traduire directement en mots ou en formules quelques idées très simples. Un nombre incalculable de tels exemples peuvent être fournis de cela, allant de la géométrie grecque (qui a peut-être été finalement étouffée par de telles limitations) jusqu'à ce qu'on appelle "epsilontic" et jusqu'à Nicolas Bourbaki, qui a même jugé pertinent d'utiliser un signe spécial dans la marge pour mettre en garde le lecteur de preuves de cette sorte. Une tâche importante d'un historien sérieux des mathématiques, et parfois l'une des tâches les plus difficiles qu'il ait à effectuer, consiste précisément à passer au crible de telles habitudes pour trouver ce qui était réellement nouveau dans le travail des grands mathématiciens du passé.

Bien sûr, le talent et l'expérience mathématique ne suffisent pas pour qualifier une personne d'historien des mathématiques. Pour citer à nouveau Tannery (loc. cit. note 3, p. 165), "ce qui est nécessaire par-dessus tout, c'est un goût pour l'histoire ; on doit développer un certain sens historique". En d'autres termes, une qualité de sympathie intellectuelle est requise, qui embrasse les époques passées aussi bien que l'époque actuelle. Même des mathématiciens très reconnus peuvent manquer de l'une et l'autre de ces qualités ; chacun d'entre nous pourrait peut-être nommer certains d'entre nous qui refusent résolument de se familiariser avec tout autre travail que le leur propre. Il est nécessaire de ne pas céder à la tentation (naturelle pour un mathématicien) de se concentrer sur les plus grands mathématiciens connus du passé et négliger le travail de valeur seulement subsidiaire. Même du point de vue du plaisir esthétique, on risque de perdre beaucoup par une telle attitude, comme le sait tout amateur d'art ; cela peut être historiquement fatal, car la rareté du génie prospère en l'absence d'un environnement adéquat et parce qu'une certaine familiarité avec le second est un prérequis essentiel pour une véritable compréhension et appréciation du premier. Même les livres en usage à chaque étape du développement mathématique devraient être examinés attentivement de manière à trouver, quand c'est possible, ce qui était et ce qui n'était pas, la connaissance commune à un moment donné.

Les notations aussi ont leur importance. Même lorsqu'elles semblent ne pas en avoir du tout, elles peuvent fournir des pointeurs utiles pour l'historien ; par exemple, quand il trouve que pendant longtemps, et également de nos jours, la lettre K a été utilisée pour dénoter les corps et les lettres allemandes pour dénoter les idéaux, il fait partie de sa tâche d'expliquer pourquoi. D'un autre côté, il arrive souvent que ces notations soient inséparables des avancées théoriques majeures. Cela a été le cas avec le lent développement des notations algébriques, amenées finalement à leur terme dans les mains de Viète et Descartes. Cela a également été le cas à nouveau avec la création hautement individuelle des notations pour le calcul par Leibniz (peut-être le plus grand maître du langage symbolique qui ait jamais existé) ; comme nous l'avons vu, ces notations incarnaient les découvertes de Leibniz si magnifiquement que les historiens après lui, déçus par la simplicité de ces notations, n'ont pas vu certaines des découvertes correspondantes.

Ainsi, l'historien a ses propres tâches, même si elles chevauchent celles du mathématicien et peuvent parfois coïncider avec elles. Ainsi, au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, il arrivait que quelques-uns des meilleurs mathématiciens, en l'absence de prédécesseurs immédiats dans tous les champs des mathématiques sauf en algèbre avaient beaucoup de travail à faire qui, selon nous, étaient plutôt du ressort des historiens, de l'édition, de la publication, de la reconstruction du travail des Grecs, d'Archimède, Apollonios, Pappos, Diophante. Même de nos jours, l'historien et le mathématicien se rencontreront fréquemment sur des terrains communs en étudiant les productions mathématiques des XIX$^{\text{ème}}$ et XX$^{\text{ème}}$ siècles, sans parler de quoi que ce soit de plus ancien. De ma propre expérience, je peux attester de la valeur des suggestions trouvées chez Gauss et chez Eisenstein, et du fait que les congruences de Kummer pour les nombres de Bernoulli, après avoir été regardées comme pas grand chose de plus que des curiosités pendant de nombreuses années, ont trouvé une nouvelle vie dans la théorie des L-fonctions p-adiques, tandis que les idées de Fermat sur l'utilité de la descente infinie dans l'étude des équations Diophantiennes de genre 1 ont prouvé leur valeur dans le travail contemporain sur ce même sujet.

Qu'est-ce qui sépare, alors, l'historien du mathématicien quand tous deux étudient les travaux du passé ? En partie, sans aucun doute, leurs techniques, ou comme je l'ai proposé, leurs tactiques ; mais principalement, peut-être, leurs attitudes et motivations. L'historien tend à diriger son attention vers un passé plus lointain et vers une plus grande variété de cultures ; le mathématicien peut tirer moins de profit de telles études, si ce n'est la satisfaction esthétique qui en découle et le plaisir de découvertes vicariantes. Le mathématicien quant à lui, tend à choisir ses lectures en fonction d'un objectif précis, ou du moins avec l'espoir que des suggestions fructueuses en émergeront. Ici nous pouvons citer les mots de Jacobi dans ses jeunes années à propos d'un livre qu'il venait de lire : "Jusqu'à maintenant, dit-il, à chaque fois que j'ai étudié des travaux d'une certaine valeur, ils ont suscité en moi des pensées originales ; cette fois-ci, je me suis retrouvé un peu les mains vides" [10]. Comme cela a été remarqué par Dirichlet, à qui j'ai emprunté cette citation, il est ironique que le livre en question n'ait été autre que le livre de Legendre *Exercices de calcul intégral*, contenant son travail sur les intégrales elliptiques, source qui fournirait très vite à Jacobi l'inspiration pour ses plus grandes découvertes ; mais ces mots sont typiques. Le mathématicien choisit ses lectures la plupart du temps dans le but de stimuler des pensées originales (ou, pourrais-je ajouter, parfois pas si originales) ; il n'y a pas d'injustice, je pense, à dire que son but est plus directement utilitaire que celui de l'historien. Cependant, le travail essentiel de l'un comme de l'autre est d'étudier les idées mathématiques, celles du passé, celles du présent, et quand ils le peuvent, celles du futur. Tous peuvent trouver des apports de grande valeur et des éclaircissements dans le travail des autres. Ainsi ma question originale "Pourquoi une histoire des mathématiques ?" se réduit finalement à la question "Pourquoi les mathématiques ?", question à laquelle je ne me sens pas appelé à répondre.

10. "Wenn ich sonst ein bedeutendes Werk studiert habe, hat es mich immer zu eignen Gedanken angeregt... Diesmal bin ich ganz leer ausgegangen und nicht zum geringsten Einfall inspiriert worden". (Dirichlet, *Werke*, Bd, II, S. 231).

De la métaphysique aux mathématiques
André Weil

(à propos d'un colloque récent)

Les mathématiciens du XVI[ème] siècle avaient coutume de parler de la "métaphysique du calcul infinitésimal", de la "métaphysique de la théorie des équations". Ils entendaient par là un ensemble d'analogies vagues, difficilement saisissables et difficilement formulables, qui néanmoins leur semblaient jouer un rôle important à un moment donné dans la recherche et la découverte mathématiques. Calomniaient-ils la "vraie" métaphysique en empruntant son nom pour désigner ce qui, dans leur science, était le moins clair ? Je ne chercherai pas à élucider ce point. En tout cas, le mot devra être entendu ici en leur sens ; à la "vraie" métaphysique, je me garderai bien de toucher.

Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe, le pressentiment se change en certitude ; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître ; comme l'enseigne la Gita, on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir.

Ainsi nous savons, nous, ce que cherchait à deviner Lagrange, quand il parlait de métaphysique à propos de ses travaux d'algèbre ; c'est la théorie de Galois, qu'il touche presque du doigt, à travers un écran qu'il n'arrive pas à percer. Là où Lagrange voyait des analogies, nous voyons des théorèmes. Mais ceux-ci ne peuvent s'énoncer qu'au moyen de notions et de "structures" qui pour Lagrange n'étaient pas encore des objets mathématiques : groupes, corps, isomorphismes, automorphismes, tout cela avait besoin d'être conçu et défini. Tant que Lagrange ne fait que pressentir ces notions, tant qu'il s'efforce en vain d'atteindre à leur unité substantielle à travers la multiplicité de leurs incarnations changeantes, il reste pris dans la métaphysique. Du moins y trouve-t-il le fil conducteur qui lui permet de passer d'un problème à un autre, d'amener les matériaux à pied d'œuvre, de tout mettre en ordre en vue de la théorie générale future. Grâce à la notion décisive de groupe, tout cela devient mathématique chez Galois.

De même encore, nous voyons les analogies entre le calcul des différences finies et le calcul différentiel servir de guide à Leibniz, à Taylor, à Euler, au cours de la période

texte de 1960, p. 408 du volume II des Œuvres complètes d'André Weil, Hermann, éditeurs des sciences et des arts.

héroïque durant laquelle Berkeley pouvait dire, avec autant d'humour que d'à-propos, que les "croyants" du calcul infinitésimal étaient peu qualifiés pour critiquer l'obscurité des mystères de la religion chrétienne, celui-là étant pour le moins aussi plein de mystères que celle-ci. Un peu plus tard, d'Alembert, ennemi de toute métaphysique en mathématique comme ailleurs, soutint dans ses articles de l'Encyclopédie que la vraie métaphysique du calcul infinitésimal n'était pas autre chose que la notion de limite. S'il ne tira pas lui-même de cette idée tout le parti dont elle était susceptible, les développements du siècle suivant devaient lui donner raison ; et rien ne saurait être plus clair aujourd'hui, ni, il faut bien le dire, plus ennuyeux, qu'un exposé correct des éléments du calcul différentiel et intégral.

Heureusement pour les chercheurs, à mesure que les brouillards se dissipent sur un point, c'est pour se reformer sur un autre. Une grande partie du colloque de Tokyo s'est déroulée sous le signe des analogies entre la théorie des nombres et la théorie des fonctions algébriques. Là, nous sommes encore en pleine métaphysique. C'est de ces analogies, parce que j'en ai quelque expérience personnelle, que je voudrais parler ici, avec l'espoir, vain peut-être, de donner aux lecteurs "honnêtes gens" de cette revue quelque idée des méthodes de travail en mathématique.

Dès l'enseignement élémentaire, on fait voir aux élèves que la division des polynômes (à une variable) ressemble beaucoup à la division des entiers et conduit, à des lois toutes semblables. Pour les uns comme pour les autres, il y a un plus grand commun diviseur, dont la détermination se fait par division successive. A la décomposition des nombres entiers en facteurs premiers correspond la décomposition des polynômes en facteurs irréductibles ; aux nombres rationnels correspondent les fonctions rationnelles, qui, elles aussi, peuvent toujours se mettre sous forme de fractions irréductibles ; celles-ci s'ajoutent par réduction au plus petit commun dénominateur, etc. Il est donc tout naturel de penser qu'il y a analogie entre les nombres algébriques (racines d'équations dont les coefficients sont des nombres entiers) et les fonctions algébriques d'une variable (racines d'équations dont les coefficients sont des polynômes à une variable).

Le fondateur de la théorie des fonctions algébriques d'une variable aurait sans doute été Galois s'il avait vécu ; c'est ce que permettent de penser les indications qu'on trouve sur ce sujet dans sa célèbre lettre-testament, écrite à la veille de sa mort, d'où on peut conclure qu'il touchait déjà à quelques-unes des principales découvertes de Riemann. Peut-être aurait-il donné à cette théorie une allure algébrique, conforme à l'esprit des travaux contemporains d'Abel et de ses propres recherches d'algèbre pure. Au contraire, Riemann, l'un des moins algébristes sans doute parmi les grands mathématiciens du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, mit la théorie sous le signe du "transcendant" (mot qui, pour le mathématicien, s'oppose à "algébrique", et désigne tout ce qui appartient en propre au continu). Les méthodes très puissantes mises en œuvre par Riemann amenèrent presque du premier coup la théorie à un degré d'achèvement qui n'a guère été dépassé. Mais elles ne tiennent aucun compte des analogies avec les nombres algébriques, et ne peuvent être transposées telles quelles en vue de l'étude de ceux-ci, étude qui relève traditionnellement de l'arithmétique ou de la théorie des nombres, et qui, du vivant déjà de Riemann, était, en voie de développement rapide.

C'est Dedekind, ami intime de Riemann, mais algébriste consommé, qui devait le premier tirer parti des analogies en question et en faire un instrument de recherche. Il appliqua avec succès, aux problèmes traités par Riemann par voie transcendante, les méthodes qu'il avait lui-même créées et mises au point en vue de l'étude arithmétique des nombres algébriques ; et il fit voir qu'on peut retrouver ainsi la partie proprement algébrique de l'œuvre de Riemann.

A première vue, les analogies ainsi mises en évidence restaient superficielles, et ne paraissaient pas pouvoir porter sur les problèmes les plus profonds de l'une ni de l'autre théorie. Hilbert alla plus loin dans cette voie, à ce qu'il semble ; mais, s'il est probable que ses élèves subirent l'influence de ses idées sur ce sujet, il n'en est resté quelque trace que dans un compte rendu obscur qui n'a même pas été reproduit dans ses Œuvres complètes. Les lois non écrites de la mathématique moderne interdisent, en effet, de publier des vues métaphysiques de cette espèce. Sans doute est-ce mieux ainsi ; autrement on serait accablé d'articles encore plus stupides, sinon plus inutiles, que tous ceux qui encombrent à présent nos périodiques. Mais il est dommage que les idées de Hilbert n'aient été développées par lui nulle part. Il y avait loin encore, cependant, de l'arithmétique, où règne le discontinu, à la théorie des fonctions au sens classique. Or, en disant que les fonctions algébriques sont racines d'équations dont les coefficients sont des polynômes, j'ai volontairement omis un point important : ces polynômes eux-mêmes ont des coefficients mais ceux-ci, quels sont-ils ? Lorsqu'on traite de la division des polynômes dans l'enseignement élémentaire, il va sans dire que les coefficients sont des “nombres” : nombres “réels” (rationnels ou non, mais donnés en tout cas, si on veut, par un développement décimal), ou, à un niveau un peu plus élevé, nombres “réels ou imaginaires”, ou, comme on dit, “nombres complexes”. C'est exclusivement de nombres complexes qu'il s'agit dans la théorie riemannienne.

Mais, du point de vue de l'algébriste pur, tout ce qu'on demande aux “nombres” en question, c'est qu'ils se laissent combiner entre eux au moyen des quatre opérations (ce que l'algébriste exprime en disant qu'ils forment un “corps”). Si on n'en suppose pas plus sur leur compte, on obtient une théorie des fonctions algébriques, fort riche déjà (comme en témoigne le volume récent et déjà classique qu'a publié Chevalley sur ce sujet), mais qui ne l'est pas assez, pour que les analogies avec les nombres algébriques puissent être poursuivies jusqu'au bout.

Heureusement il s'est trouvé un domaine intermédiaire entre l'arithmétique et la théorie riemannienne, et qui possède, avec chacune de ces deux dernières théories, des ressemblances beaucoup plus étroites qu'elles n'en ont entre elles ; il s'agit des fonctions algébriques "sur un corps fini". Comme on le savait depuis Gauss, s'il ne s'agit que de pouvoir faire les quatre opérations, il suffit d'un nombre fini d'éléments. Il suffit par exemple d'en avoir deux, qu'on nommera 0 et 1, et pour lesquels on posera par convention la table d'addition et la table de multiplication que voici :

$$\begin{array}{lll} 0+0=0 & 0+1=1+0=1 & 1+1=0 \\ 0\times 0=0 & 0\times 1=1\times 0=0 & 1\times 1=1 \end{array}$$

Quelque paradoxale que puisse paraître au profane la règle $1+1=0$, quelque tentant qu'il soit de dire que c'est là un pur jeu de l'esprit qui ne répond à aucune "réalité", un tel système est monnaie courante pour le mathématicien ; et Galois en étendit beaucoup l'usage en construisant les "imaginaires de Galois".

Prenant donc les coefficients de nos polynômes dans un "corps de Galois", on construit des fonctions algébriques dont la théorie remonte à Dedekind mais s'est particulièrement développée depuis la thèse d'Artin. Pour dire en quoi elle consiste, il faudrait entrer dans des détails beaucoup trop techniques qui n'auraient pas leur place ici. Mais on peut, je crois, en donner une idée imagée en disant que le mathématicien qui étudie ces problèmes a l'impression de déchiffrer une inscription trilingue. Dans la première colonne se trouve la théorie riemannienne des fonctions algébriques au sens classique. La troisième colonne, c'est la théorie arithmétique des nombres algébriques. La colonne du milieu est celle dont la découverte est la plus récente ; elle contient la théorie des fonctions algébriques sur un corps de Galois.

Ces textes sont l'unique source de nos connaissances sur les langues dans lesquels ils sont écrits ; de chaque colonne, nous n'avons bien entendu que des fragments ; la plus complète et celle que nous lisons le mieux, encore à présent, c'est la première. Nous savons qu'il y a de grandes différences de sens d'une colonne à l'autre, mais rien ne nous en avertit à l'avance. A l'usage, on se fait des bouts de dictionnaire, qui permettent de passer assez souvent d'une colonne à la colonne voisine.

C'est ainsi qu'on avait déchiffré depuis longtemps, dans la dernière colonne, le début d'un paragraphe intitulé "fonction zéta". Vers la fin de ce paragraphe, on croit lire une phrase très mystérieuse ; elle dit que tous les zéros de la fonction se trouvent sur une certaine droite. Jamais on n'a pu savoir s'il en est bien ainsi, ou s'il y a eu erreur de lecture. C'est le célèbre problème de l'"hypothèse de Riemann", qui dans quelques mois sera tout juste centenaire.

La principale découverte d'Artin, dans sa thèse, c'est qu'il y a, dans la seconde colonne, un paragraphe intitulé aussi "fonction zéta", et qui est à peu de chose près une traduction de celui qu'on connaissait déjà ; notre dictionnaire s'en est trouvé beaucoup enrichi. Artin aperçut aussi, dans cette colonne, la phrase sur l'hypothèse de

Riemann ; elle lui parut tout aussi mystérieuse que l'autre. Ce nouveau problème, à première vue, ne semblait pas plus facile que le précédent. En réalité, nous savons maintenant que la première colonne contenait déjà tous les éléments de sa solution. Il n'était que de traduire, d'abord en théorie "abstraite" des fonctions algébriques, puis dans le langage "galoisien" de la seconde colonne, des résultats obtenus depuis longtemps par Hurwitz en "riemannien", et que les géomètres italiens avaient ensuite traduits dans leur propre langage. Mais les meilleurs spécialistes des théories arithmétique et "galoisienne" ne savaient plus lire le riemannien, ni à plus forte raison l'italien ; et il fallut vingt ans de recherches avant que la traduction fut mise au point et que la démonstration de l'hypothèse de Riemann dans la seconde colonne fut complètement déchiffrée.

Si notre dictionnaire était suffisamment complet, nous passerions aussitôt de là à la troisième colonne, et l'hypothèse de Riemann, la vraie, se trouverait démontrée, elle aussi. Mais nos connaissances n'atteignent pas jusque là ; bien des déchiffrements patients seront encore nécessaires avant que la traduction puisse être faite. Au cours du colloque auquel il a été fait allusion plus haut, il a été beaucoup discuté de "métaphysique" à propos de ces problèmes ; un jour celle-ci fera place à une théorie mathématique dans le cadre de laquelle ils trouveront leur solution. Peut-être, comme c'était le cas pour Lagrange, ne nous manque-t-il, pour franchir ce pas décisif, qu'une notion, un concept, une "structure". D'ingénieux philologues ont bien trouvé le secret des archives de Nestor et de celles de Minos. Combien de temps faudra-t-il encore pour que notre pierre de Rosette, à nous autres arithméticiens, rencontre son Champollion ?