Faire le point (Denise Vella-Chemla, 25.02.2018)

Cette note est destinée à conserver la trace de réflexions éparses, une manière de faire le point.

1) Ensembles de Cantor, nombres réels, nombres premiers

Ci-dessous, un extrait du premier magazine Accromaths “Les Fractales”, téléchargeable ici :
http://accromath.uqam.ca/2006/07/les-fractales/
au sujet de l’ensemble de Cantor.

“En 1883, Cantor publie son fameux ensemble triadique (ou poussières de Cantor). Pour construire l’ensemble, il prend l’intervalle [0,1] et retire le tiers central en conservant les extrémités. Ensuite, il enlève le tiers central de chacun des nouveaux segments et ce, indéfiniment. Le résultat trouble à l’époque puisqu’il s’agit d’un exemple d’ensemble qui contient une quantité non-dénombrable de points mais dont la mesure est nulle.”

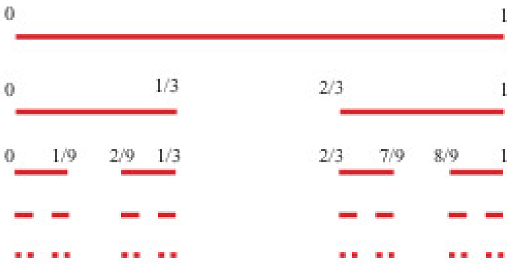


FIGURE 1 : L’ensemble de Cantor

Dans la mesure où les nombres premiers ne sont ni divisibles par 2, ni par 3, ni par 5, etc., il semblerait naturel de représenter leur ensemble par l’ensemble de Cantor suivant (on n’arrive cependant pas trop à savoir comment gérer le fait qu’un nombre premier est divisible par lui-même) :

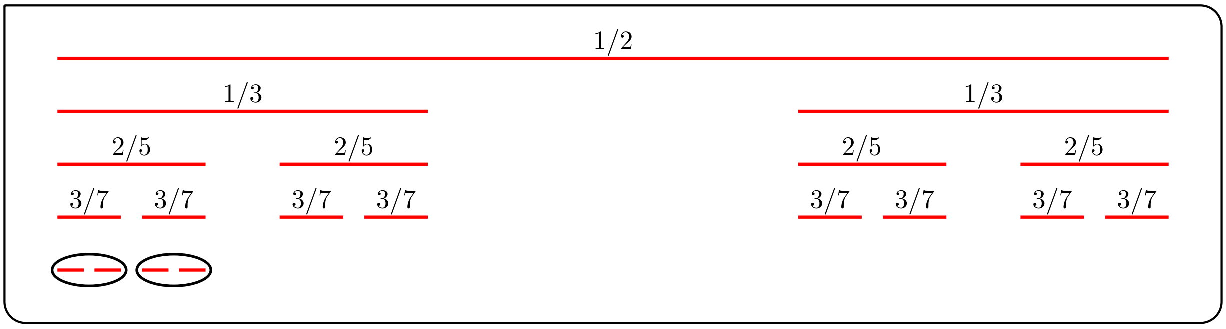


FIGURE 2 : L’ensemble de Cantor dédié aux nombres premiers

avec comme zoom sur les parties encerclées :

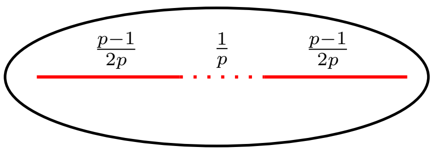


FIGURE 3 : Zoom sur les parties encerclées de la figure 2

Pour mieux cerner, si c’était possible, les points d’un tel espace, on revient au Snurpf, le Système de NUmération par les Restes dans les Parties Finies de $\mathbb{N}$. On associe à chaque entier n un réel compris entre 0 et 1 dans la partie décimale duquel sont codés les restes des divisions euclidiennes de n par l’infinité des nombres premiers. On normalise les tranches de décimales pour que les décimales correspondant aux restes des différents entiers selon un même nombre premier “tombent bien en face” : si on note $nbdigits(p)$ le nombre de chiffres de p, on réserve $nbdigits(p)$ décimales du réel pour coder le reste de la division euclidienne de n par p.

Le chiffre des dixièmes code le reste de la division euclidienne de n par 2, celui des centièmes code le reste de la division euclidienne de n par 3, les deux chiffres des 100000-èmes et millionièmes codent le reste de la division euclidienne de n par 11. Fournir les réels associés aux nombres de 1 à 16 pour des décimales associées aux nombres premiers de 2 à 13 sera plus explicite :

$$\begin{array}{rl}
1 \rightarrow & 0,1\ 1\ 1\ 1\ 01\ 01\ \ldots \\
2 \rightarrow & 0,0\ 2\ 2\ 2\ 02\ 02\ \ldots \\
3 \rightarrow & 0,1\ 0\ 3\ 3\ 03\ 03\ \ldots \\
4 \rightarrow & 0,0\ 1\ 4\ 4\ 04\ 04\ \ldots \\
5 \rightarrow & 0,1\ 2\ 0\ 5\ 05\ 05\ \ldots \\
6 \rightarrow & 0,0\ 0\ 1\ 6\ 06\ 06\ \ldots \\
7 \rightarrow & 0,1\ 1\ 2\ 0\ 07\ 07\ \ldots \\
8 \rightarrow & 0,0\ 2\ 3\ 1\ 08\ 08\ \ldots \\
9 \rightarrow & 0,1\ 0\ 4\ 2\ 09\ 09\ \ldots \\
10 \rightarrow & 0,0\ 1\ 0\ 3\ 10\ 10\ \ldots \\
11 \rightarrow & 0,1\ 2\ 1\ 4\ 00\ 11\ \ldots \\
12 \rightarrow & 0,0\ 0\ 2\ 5\ 01\ 12\ \ldots \\
13 \rightarrow & 0,1\ 1\ 3\ 6\ 02\ 00\ \ldots \\
14 \rightarrow & 0,0\ 2\ 4\ 0\ 03\ 01\ \ldots \\
15 \rightarrow & 0,1\ 0\ 0\ 1\ 04\ 02\ \ldots \\
16 \rightarrow & 0,0\ 1\ 1\ 2\ 05\ 03\ \ldots
\end{array}$$

Le réel associé à un nombre premier p est à une distance maximale du réel associé à $p-1$, si on choisit comme distance la somme des différences des décimales "associées" (i.e. celles correspondant à la division par un même nombre premier). On n'arrive pas à voir comment il faut procéder pour ordonner correctement les éléments de l'ensemble de réels obtenu par cette représentation.

On trouve dans la littérature qu'on peut également considérer chaque entier n comme une fonction qui associe à tout nombre premier p le reste de la division euclidienne de n par p.

2) Coïncidences numériques

Après avoir constaté que $e^{2\pi} = 535.492$ ressemble à une fréquence de note de la gamme [1] et lu que "Logarithmiquement, la racine, c'est la moitié" [2], on a l'idée de calculer les valeurs de la fonction f définie sur les réels par :

$$f(x) = \frac{\left(zerozeta[x]^2 - zerozeta[1]^2\right)}{e^{2\pi}}$$

avec $zerozeta(x)$ la partie réelle du x-ème zéro de zêta [3].

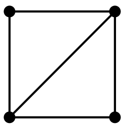
Les valeurs obtenues sont étonnantes :

$zerozeta(i)$	$(zerozeta(i))^2$	$f(zerozeta(i))$	$zerozeta(i)$	$(zerozeta(i))^2$	$f(zerozeta(i))$
14.1347	199.79	0.373097	60.8318	3700.51	6.91048
21.022	441.926	0.825272	65.1125	4239.64	7.91729
25.0109	625.543	1.16817	67.0798	4499.7	8.40293
30.4249	925.673	1.72864	69.5464	4836.7	9.03226
32.9351	1084.72	2.02565	72.0672	5193.68	9.69889
37.5862	1412.72	2.63818	75.7047	5731.2	10.7027
40.9187	1674.34	3.12674	77.1448	5951.33	11.1138
43.3271	1877.24	3.50563	79.3374	6294.42	11.7545
48.0052	2304.49	4.30351	82.9104	6874.13	12.837
49.7738	2477.43	4.62647	84.7355	7180.1	13.4084
52.9703	2805.85	5.23977	87.4253	7643.18	14.2732
56.4462	3186.18	5.95001	88.8091	7887.06	14.7286
59.347	3522.07	6.57727			

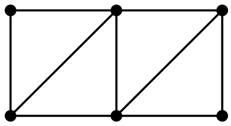
1. cf http://denise.vella.chemla.free.fr/gammes.pdf.
2. Pour passer de la fréquence d'un *do* à la fréquence d'un $fa\#$, la note située à 6 demi-tons de *do* quand l'octave contient 12 demi-tons, i.e. la note "au milieu d'une gamme", on multiplie cette fréquence par $\sqrt{2}$ (il faut la multiplier par 2 pour obtenir la fréquence d'une note à l'octave).
3. Les parties réelles des zéros de zêta sont fournies par Odlyzko ici http://www.dtc.umn.edu/ odlyzko/zeta$_tables/index.html$.

3) Triangulation du tore et formule d'Euler

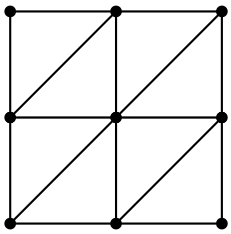
On veut se rappeler ici qu'on a lu que la formule invariante d'Euler s'applique sur un tore triangulé de la façon suivante : $S-A+T=0$ avec S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et T le nombre de triangles de la triangulation. Voyons l'application sur 3 exemples, on note à droite des dessins les nombres de sommets du carré initial, puis les 2 soustractions à effectuer du fait du repli horizontal puis vertical pour obtenir un tore :



$$S = 4-2-1 = 1,\ A = 5-1-1 = 3,\ T = 2$$
$$S - A + T = 0$$



$$S = 6-3-1 = 2, A = 9-2-1 = 6, T = 4$$
$$S - A + T = 0$$



$$S = 9-3-2 = 4, A = 16-2-2 = 12, T = 8$$
$$S - A + T = 0$$

FIGURE 4 : Formule de Descartes-Euler sur le tore triangulé

4) Ordre dans lequel doivent être effectués les calculs dans l'article de Riemann

La dernière phrase de l'extrait de la note de Riemann ci-dessous explique l'importance d'effectuer certains calculs faisant intervenir les zéros de ζ (ou de ξ qui leur sont égaux sur l'axe réel) en les considérant dans l'ordre dans lequel ils apparaissent sur la droite critique en s'écartant progressivement de 0 (i.e. dans l'ordre $1/2+14,...i$ puis $1/2-14,...i$ puis $1/2+21,...i$ puis $1/2-21,...i$, etc.).

"En portant ces valeurs dans l'expression de $f(x)$ on obtient

$$f(x) = Li(x) - \sum_{\alpha} \left[Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) \right]$$
$$+ \int_x^{\infty} \frac{1}{x^2-1} \frac{dx}{x \log x} + \log \xi(0),$$

où, dans la série $\sum_{\alpha}$ on donnera à α pour valeurs toutes les racines positives (ou à parties réelles positives) de l'équation $\xi(\alpha) = 0$ en les rangeant par ordre de grandeur. On peut alors, après une discussion plus approfondie de la fonction ξ, démontrer aisément que lorsque les termes sont rangés, comme il est prescrit ci-dessus, dans la série

$$\sum \left[Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) \right],$$

celle-ci converge vers la même limite que l'expression

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-bi}^{a+bi} \frac{d\frac{1}{s} \sum \log \left[1 + \frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha^2} \right]}{ds} x^s ds,$$

lorsque la grandeur b croît sans limites. Mais, si l'on changeait cet ordre des termes de la série, on pourrait obtenir pour résultat n'importe quelle valeur réelle."

La note [7] de la traduction en français de l'article de Riemann explique qu'une erreur typographique doit faire lire *log* $\zeta(0)$ à la place de *log* $\xi(0)$.

[7]. Note HME 1974, p. 31. Riemann écrit log $\xi(0)$ *à la place de* $-log\ 2$ *, mais puisqu'il utilise* ξ *pour noter une fonction différente à savoir la fonction* $\xi(\frac{1}{2}+it)$*, son* $\xi(0)$ *dénote* $\xi(\frac{1}{2}) \neq \frac{1}{2}$*. Cette erreur a été détectée du vivant de Riemann par Angelo Genocchi (1817-1889), Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite, in Annali di Matematica Pura ed Applicata 3 (1860), p. 52-59.*

On a :

$$log\ \xi(0) = log\ \frac{-1}{2} = -log\ 2 + \pi i.$$

Dans l'article d'Alain Connes extrait du livre Open Problems in Mathematics de J.F. Nash et M.T. Rassias [4] (téléchargeable à l'adresse https://arxiv.org/pdf/1509.05576.pdf), le $+\pi i$ est omis.

On a souhaité ici programmer en python la fonction $f(x)$ de l'article de Riemann pour calculer $\pi(x)$, i.e. le nombre de nombres premiers inférieurs à x.

Cette formule est :

$$f(x) = Li(x) - \sum_{\rho}(Li(x^{\rho}) + Li(x^{\overline{\rho}})) + \int_x^{\infty} \frac{du}{u(u^2-1)ln\ u} - ln\ 2$$

avec $\rho = \frac{1}{2} + \alpha\ i$ et $\overline{\rho} = \frac{1}{2} - \alpha\ i$

Le programme python ci-dessous code la formule.

4. paru chez Springer eds. en 2016.

```
import math
from math import *
import cmath
from cmath import *
import mpmath
from mpmath import *
import scipy
from scipy import integrate
import numpy
from numpy import *

"""zeros=[0.5+ 14.134725141734693790457251983562476 6j,
      0.5- 14.134725141734693790457251983562476 6j,
      0.5+ 21.022039638771554992628479593896916 2j,
      0.5- 21.022039638771554992628479593896916 2j,..."""
zeros=[]
with open('leszerosb', 'r') as f:
   for p in f.readlines():
      z = float(p.split()[1])
      zeros.append(0.5+z*j)
      zeros.append(0.5-z*j)
f.close()
print('')
print('les zeros')
for z in zeros:
    print(z)
print('')
print('la fonction')
Li = lambda z : li(z)-li(2)
f = lambda x : 1/((x**2-1)*x*log(x))
for x in range(2,101):
    print('')
    print(x)
    somme = 0
    for z in zeros:
        somme = somme + Li(x**z)
    pi_x = Li(x)
    pi_x = pi_x - somme
    pi_x = pi_x + integrate.quad(f, x, numpy.inf)[0]
    pi_x = pi_x - ln(2)
    print(pi_x)
```

Voici les images des entiers de 2 à 100 par la fonction f, obtenus par exécution du programme en utilisant 3 zéros seulement.

	21 → -2.516313	41 → 11.261739	61 → 11.058728	81 → 16.721597
2 → 2.552851	22 → 2.557449	42 → 12.607959	62 → 12.812713	82 → 14.054151
3 → 3.972725	23 → 9.106070	43 → 11.429642	63 → 14.580415	83 → 11.007882
4 → 3.614547	24 → 5.206529	44 → 10.311043	64 → 13.855415	84 → 8.073442
5 → 4.933246	25 → 0.744832	45 → 8.467303	65 → 12.832935	85 → 5.380225
6 → -0.919238	26 → -0.787661	46 → 7.490361	66 → 12.002598	86 → 3.049299
7 → 5.151988	27 → 1.357078	47 → 7.300341	67 → 11.500934	87 → 1.187144
8 → 1.059366	28 → 6.597947	48 → 7.691295	68 → 11.441763	88 → -0.119387
9 → 1.132025	29 → 10.833081	49 → 8.422025	69 → 10.757353	89 → -0.806673
10 → 0.058194	30 → 13.213916	50 → 6.393970	70 → 10.299160	90 → -0.836393
11 → 0.058194	31 → 11.090516	51 → 4.382955	71 → 10.429712	91 → -0.196099
12 → 3.115234	32 → 5.106740	52 → 2.950471	72 → 11.115368	92 → 1.101528
13 → 3.055617	33 → -0.282600	53 → 2.274725	73 → 12.286638	93 → 3.020415
14 → 2.371227	34 → -3.544514	54 → 2.451181	74 → 13.846118	94 → 5.503451
15 → -2.651217	35 → -4.140278	55 → 3.482370	75 → 15.675854	95 → 8.475321
16 → -0.335024	36 → -2.154444	56 → 5.290759	76 → 17.645653	96 → 11.845845
17 → 8.242808	37 → 1.752106	57 → 6.589052	77 → 18.044536	97 → 15.513863
18 → 11.807454	38 → 6.666511	58 → 7.081729	78 → 17.894065	98 → 19.371596
19 → 3.188116	39 → 8.664084	59 → 8.064510	79 → 17.640197	99 → 23.309205
20 → -2.493924	40 → 9.914963	60 → 9.432731	80 → 17.253096	100 → 27.219271

Voici le résultat de son exécution avec 10 zéros.

	21 → -26.072	41 → -0.241	61 → 4.187	81 → -6.321
2 → 10.674	22 → -5.023	42 → 4.618	62 → -1.964	82 → -8.865
3 → 9.542	23 → -2.423	43 → -3.293	63 → -15.050	83 → -10.236
4 → 6.853	24 → -11.188	44 → -17.094	64 → -28.435	84 → -12.589
5 → 7.611	25 → -9.944	45 → -20.940	65 → -34.846	85 → -17.877
6 → 0.116	26 → -15.700	46 → -14.401	66 → -32.481	86 → -22.608
7 → 7.025	27 → -16.521	47 → -6.018	67 → -22.161	87 → -24.474
8 → 0.796	28 → -5.549	48 → -10.002	68 → -6.519	88 → -23.729
9 → -0.835	29 → -7.428	49 → -14.445	69 → 4.418	89 → -25.175
10 → -10.869	30 → -3.326	50 → -15.840	70 → 7.105	90 → -27.780
11 → 6.216	31 → -0.722	51 → -19.421	71 → 5.515	91 → -28.381
12 → -13.693	32 → -4.902	52 → -20.634	72 → -2.141	92 → -29.371
13 → 4.956	33 → -25.194	53 → -16.271	73 → -12.332	93 → -30.857
14 → -14.961	34 → -31.762	54 → -13.963	74 → -22.201	94 → -32.370
15 → -9.961	35 → -22.449	55 → -21.963	75 → -27.307	95 → -30.936
16 → -9.687	36 → -6.973	56 → -25.894	76 → -26.613	96 → -26.490
17 → 4.893	37 → -2.515	57 → -26.241	77 → -22.294	97 → -21.625
18 → -11.774	38 → -18.933	58 → -19.629	78 → -15.262	98 → -15.597
19 → 0.888	39 → -26.168	59 → -8.854	79 → -10.220	99 → -7.517
20 → -9.249	40 → -16.603	60 → 2.435	80 → -5.757	100 → -0.451

Avec 1000 zéros, le temps d'exécution est trop important pour qu'on ait le courage de patienter.

Les résultats en calculant $f(x)$ avec 3 zéros seulement semblant pertinents, on relance l'exécution jusqu'à 1000, le dernier résultat trouvé est $f(1000) = 173$ (alors que $\pi(1000) = 168$).

Jusqu'à 10000, après avoir écrit le sympathique message *"lib/python2.7/site-packages/scipy/integrate/quadpack.py :364 : IntegrationWarning : The integral is probably divergent, or slowly convergent. warnings.warn(msg, IntegrationWarning)"*, $f(10000) = 1192$ alors que $\pi(x) = 1229$.
$f(100000) = 9500$ alors que $\pi(x) = 9629$.
$f(1000000) = 77811$ alors que $\pi(x) = 78498$ (temps d'exécution : 30 minutes).

Tout ça n'est pas probant ; il faudrait réessayer en utilisant plutôt la fonction $\xi(t)$, dont Riemann écrit *"Cette fonction est finie pour toutes les valeurs finies de t et peut être développée suivant les puissances de t^2 en une série qui converge très rapidement."*. Les définitions à utiliser sont fournies plus haut dans la note de Riemann :

$$\sum_1^\infty e^{-n^2\pi x} = \psi(x)$$

et

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} cos\left(\frac{1}{2} t \; log \; x\right) dx,$$

ou encore

$$\xi(t) = 4 \int_1^\infty \frac{d\left[x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right]}{dx} x^{-\frac{1}{4}} cos\left(\frac{1}{2} t \; log \; x\right) dx.$$