Quelques expérimentations autour de la Conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

20 février 2011

1 Introduction

Dans cette note, on étudie les nombres de décompositions de Goldbach de nombres pairs de formes particulières, dans le but de mettre à jour certaines propriétés (qui amèneraient peut-être à une idée de démonstration).
Ce travail fait suite à des expérimentations menées autour de ce que l'on a coutume d'appeler la "comète de Goldbach"[1].
Il a été réalisé en utilisant des outils logiciels spécifiques dédiés à la Conjecture de Goldbach et programmés par Daniel Diaz, que l'on remercie vivement.

2 Doubles de premiers, puissances de 2

Les doubles de nombres premiers vérifient trivialement la Conjecture de Goldbach qui stipule que tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers.

Le tableau suivant fournit les nombres de décompositions de Goldbach des puissances de 2 inférieures à 10^7. Dans la suite, on notera $r(n)$ le nombre de décompositions différentes de n comme somme de deux nombres premiers.

[1] Les résultats de ces expérimentations sont consignés à l'adresse http://denise.vella.chemla.free.fr/cometes1111landscape.pdf.

n $= 2^k$	$r(n)$
4	1
8	1
16	2
32	2
64	5
128	3
256	8
512	11
1024	22
2048	25
4096	53
8192	76
16384	151
32768	244
65536	435
131072	749
262144	1314
524288	2367
1048576	4239
2097152	7471
4194304	13705
8388608	24928

3 Les $\mathbf{2}^k.p$

Le tableau suivant fournit les nombres de décompositions de Goldbach de certains nombres pairs, inférieurs à 10^7, de la forme $2^k.p$, avec p premier impair.

n = $2^k.3$	$r(n)$	n = $2^k.5$	$r(n)$	n = $2^k.7$	$r(n)$	n = $2^k.11$	$r(n)$	n = $2^k.13$	$r(n)$
6	1	10	2	14	2	22	3	26	3
12	1	20	2	28	2	44	3	52	3
24	3	40	3	56	3	88	4	104	5
48	5	80	4	112	7	176	7	208	7
96	7	160	8	224	7	352	10	416	10
192	11	320	11	448	13	704	18	832	22
384	19	640	18	896	20	1408	25	1664	28
768	31	1280	27	1792	36	2816	40	3328	46
1536	47	2560	48	3584	55	5632	74	6656	80
3072	79	5120	76	7168	94	11264	124	13312	139
6144	145	10240	141	14336	152	22528	206	26624	230
12288	226	20480	234	28672	276	45056	346	53248	404
24576	397	40960	387	57344	467	90112	638	106496	688
49152	675	81920	671	114688	818	180224	1066	212992	1222
98304	1185	163840	1194	229376	1424	360448	1938	425984	2146
196608	2110	327680	2133	458752	2516	720896	3385	851968	3874
393216	3679	655360	3809	917504	4503	1441792	6151	1703936	6972
786432	6639	1310720	6762	1835008	8102	2883584	11147	3407872	12558
1572864	11952	2621440	12226	3670016	14633	5767168	20027	6815744	22769
3145728	21367	5242880	22134	7340032	26662				
6291456	38887								

4 Les 2.p^k

Le tableau suivant fournit les nombres de décompositions de Goldbach de certains nombres pairs, inférieurs à 10^7, de la forme $2.p^k$ avec p premier impair.

n = 2.3^k	$r(n)$	n = 2.5^k	$r(n)$	n = 2.7^k	$r(n)$	n = 2.11^k	$r(n)$	n = 2.13^k	$r(n)$
6	1	10	2	14	2	22	3	26	3
18	2	50	4	98	3	242	8	338	9
54	5	250	9	686	16	2662	44	4394	55
162	10	1250	28	4802	64	29282	251	57122	406
486	23	6250	95	33614	309	322102	1756	742586	3431
1458	48	31250	326	235298	1442	3543122	13202	9653618	30833
4374	102	156250	1179	1647086	7407				
13122	245	781250	4359						
39366	561	3906250	17187						
118098	1369								
354294	3418								
1062882	8599								
3188646	21650								
9565938	55711								

5 Nombre de décompositions de Goldbach de quelques nombres pairs n'ayant que 7 et 11 comme facteurs premiers impairs

Sont fournies ci-dessous les nombres de décompositions de Goldbach de nombres pairs qui ont soit seulement 7, soit seulement 11, soit seulement 7 et 11 comme facteurs premiers impairs dans leur décomposition.

n=$2^k.7^2$	$r(n)$	n=$2^k.7^3$	$r(n)$	n=$2^k.11^2$	$r(n)$	n=$2^k.11^3$	$r(n)$	n=$2^k.7^k.11^k$	$r(n)$
98	3	686	16	242	8	2662	44	154	8
196	9	1372	27	484	14	5324	69	23716	254
392	11	2744	50	968	17	10648	116	3652264	16256
784	18	5488	80	1936	33	21296	199		
1568	25	10976	125	3872	52	42592	337		
3136	49	21952	229	7744	94	85184	600		
6272	78	43904	373	15488	153	170368	1075		
12544	147	87808	645	30976	265	340736	1823		
25088	236	175616	1130	61952	439	681472	3276		
50176	429	351232	2007	123904	809	1362944	5839		
100352	718	702464	3688	247808	1413	2725888	10563		
200704	1246	1404928	6446	495616	2533	5451776	19198		
401408	2234	2809856	11654	991232	4497				
802816	4032	5619712	21212	1982464	8056				
1605632	7224			3964928	14377				
3211264	13194			7929856	26463				
6422528	23805								

On constate que, en général, si $a < b < c$ alors $r(a) < r(b) < r(c)$, mais ça n'est pas toujours le cas.
Par exemple, 23716 ($9^{ème}$ colonne) est compris entre 12544 et 25088 ($1^{ère}$ colonne), entre 21952 et 43904 ($3^{ème}$ colonne), entre 15488 et 30976 ($5^{ème}$ colonne) et entre 21296 et 42592 ($7^{ème}$ colonne).
r(23716)=254 est bien compris entre r(21952)=229 et r(43904)=373 ($4^{ème}$ colonne) ou bien entre r(15488)=153 et r(30976)=265 ($6^{ème}$ colonne) ou encore entre r(21296)=199 et r(42592)=337 ($8^{ème}$ colonne).
r(23716)=254 n'est cependant pas compris entre r(12544)=147 et r(25088)=236 ($2^{ème}$ colonne).
On peut de la même façon intercaler un $2^k.7.11$ entre un $2^k.7.7$ et un $2^k.11.11$ et constater que les images par la fonction r respectent l'ordre des antécédents. De même, on peut intercaler un $2.p^k$ entre deux éléments $2^{k_1}.p$ et $2^{k_2}.p$ convenablement choisis et constater que l'ordre se transmet des antécédents aux images.

Pour les nombres dans la factorisation desquels interviennent plusieurs nombres premiers impairs, il semblerait que *si* $a|b$ *alors* $r(a) \leq r(b)$.

6 Quelques constats

C.P.Bruter me fait remarquer que, pour les nombres de la forme $2^k.p$, $r(n)$ est souvent la somme de plusieurs nombres $r(a_i)$ de la même forme avec $a_i < n$.

Effectivement, dans le tableau des $2^k.13$, on relève les partitions suivantes :
$r(2^5.13) = 10 = r(2^4.13) + r(2^2.13) = 7 + 3$
$22 = 10 + 7 + 5$
$28 = 10 + 7 + 5 + 3 + 3$
$46 = 28 + 10 + 5 + 3$
$80 = 46 + 28 + 3 + 3$
$139 = 80 + 46 + 10 + 3$
$230 = 139 + 46 + 28 + 10 + 7$
$404 = 230 + 139 + 28 + 7$
$688 = 404 + 230 + 46 + 5 + 3$
$1222 = 688 + 404 + 80 + 28 + 22$
$2146 = 1222 + 688 + 230 + 3 + 3$
$3874 = 2146 + 1222 + 404 + 80 + 22$
$6972 = 3874 + 2146 + 688 + 230 + 28 + 3 + 3$
$12558 = 6972 + 3874 + 1222 + 404 + 80 + 3 + 3$
$22769 = 12558 + 6972 + 2146 + 688 + 230 + 139 + 28 + 5 + 3$

Dans le tableau des $2^k.5$, on peut trouver une partition du nombre de décompositions $r(2^{20}.5) = r(5242880) = 22134$:
$22134 = 12226 + 6762 + 2133 + 671 + 234 + 76 + 18 + 8 + 4 + 2$

Il semblerait que l'on puisse toujours, pour les nombres de décompositions des nombres pairs de la forme $2^k.p$ avec p premier impair, obtenir le nombre de décompositions d'un certain d'entre eux par addition de certains nombres de décompositions de nombres pairs de la même forme et plus petits.

Un élément important est le suivant : on pourrait croire que ces partitions ne sont possibles que parce que les ensembles de nombres premiers dont on additionne les cardinaux sont disjoints deux à deux, ce qui n'est pas le cas : 71 et 91 par exemple sont tous deux décomposants des nombres 13312 et 3328 et appartiennent à des ensembles dont on va ajouter les cardinaux pour obtenir le cardinal de l'ensemble de décompositions de 26624. C'est donc bien la relation qu'entretiennent les décomposants de Goldbach au pair qu'ils décomposent et non leurs qualités intrinsèques qui intervient vraisemblablement ici.

Les partitions utilisées dans le tableau des $2^k.3$, celui des $2^k.5$ ou celui des $2^k.13$ ne présentent pas de similarité entre elles (les lignes utilisées pour en trouver une autre ne sont pas les mêmes dans l'un et l'autre cas).

Quand on essaie de trouver similairement des partitions des $r(n)$ faisant intervenir des “$r(m)$ plus petits” dans les tableaux des nombres de la forme $2.p^k$, on ne peut y parvenir car les $r(n)$ croissent trop rapidement.

On essaie de comparer plutôt de façon transversale les $r(n)$ des nombres de la forme $2p^k$ à ceux de leur correspondant de la forme $2kp$. C'est ce qui est présenté dans le tableau suivant :

Il semble qu'on ait toujours la relation suivante : $r(2p^k) > r(2kp)$.

n = $2p^k$	$r(n)$	$n' = 2kp$	$r(n')$
$18 = 2.3^2$	2	2.2.3	1
$50 = 2.5^2$	4	2.2.5	2
$98 = 2.7^2$	3	2.2.7	2
$242 = 2.11^2$	8	2.2.11	3
$54 = 2.3^3$	5	2.3.3	2
$250 = 2.5^3$	9	2.3.5	3
$686 = 2.7^3$	16	2.3.7	4
$2662 = 2.11^3$	44	2.3.11	6
$162 = 2.3^4$	10	2.4.3	3
$1250 = 2.5^4$	28	2.4.5	3
$4802 = 2.7^4$	64	2.4.7	3
$29282 = 2.11^4$	251	2.4.11	4
$486 = 2.3^5$	23	2.5.3	3
$6250 = 2.5^5$	95	2.5.5	4
$33614 = 2.7^5$	309	2.5.7	5
$322102 = 2.11^5$	1756	2.5.11	6
$1458 = 2.3^6$	48	2.6.3	4
$31250 = 2.5^6$	326	2.6.5	6
$235298 = 2.7^6$	1442	2.6.7	8
$3543122 = 2.11^6$	13202	2.6.11	9
$4374 = 2.3^7$	102	2.7.3	4
$156250 = 2.5^7$	1179	2.7.5	5
$1647086 = 2.7^7$	7407	2.7.11	3

Enfin, on essaie d'établir des relations en utilisant le tableau des $r(n)$ pour les n de la forme $2^k.7.11$ en le mettant en regard des tableaux fournissant l'un les $r(n)$ des nombres de la forme $2^k.7$ et l'autre les $r(n)$ des nombres de la forme $2^k.11$.

n = $2^k.7$	$r(n)$	n = $2^k.11$	$r(n)$	n = $2^k.7.11$	$r(n)$
14	2	22	3	154	8
28	2	44	3	308	8
56	3	88	4	616	19
112	7	176	7	1232	28
224	7	352	10	2464	5
448	13	704	18	4928	70
896	20	1408	25	9856	130
1792	36	2816	40	19712	219
3584	55	5632	74	39424	371
7168	94	11264	124	78848	654
14336	152	22528	206	157696	1179
28672	276	45056	346	315392	2037
57344	467	90112	638	630784	3689
114688	818	180224	1066	1261568	6520
229376	1424	360448	1938	2523136	11918
458752	2516	720896	3385	5046272	21503
917504	4503	1441792	6151		
1835008	8102	2883584	11147		
3670016	14633	5767168	20027		
7340032	26662				

Il semblerait que l'on ait $r(2^k ab) > r(2^k a) + r(2^k b)$ ou encore $r(2^k ab) > 2r(2^{k-2}ab)$.

7 Rappel de l'objectif initial

Fournissons maintenant les valeurs de $\sigma(n)$ et de $r(n)$ pour les nombres de 3 à 100. En suivant l'exemple de l'article d'Euler "Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs", nous aurions aimé atteindre l'objectif suivant : trouver une relation de récurrence qui fournisse le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair en fonction des nombres de décompositions de Goldbach de nombres plus petits que lui. Mais force est de constater que cette tâche semble insurmontable.

n	$\sigma(n)$	r(n)	n	$\sigma(n)$	r(n)	n	$\sigma(n)$	r(n)	n	$\sigma(n)$	r(n)
3	4	1	28	56	3	53	54	6	78	168	11
4	7	1	29	30	4	54	120	8	79	80	5
5	6	2	30	72	6	55	72	6	80	186	8
6	12	1	31	32	3	56	120	7	81	121	10
7	8	2	32	63	5	57	80	10	82	126	5
8	15	2	33	48	6	58	90	6	83	84	6
9	13	2	34	54	2	59	60	6	84	224	13
10	18	2	35	48	5	60	168	12	85	108	9
11	12	3	36	91	6	61	62	4	86	132	6
12	28	3	37	38	5	62	96	5	87	120	11
13	14	3	38	60	5	63	104	10	88	180	7
14	24	2	39	56	7	64	127	3	89	90	7
15	24	3	40	90	4	65	84	7	90	234	14
16	31	2	41	42	5	66	144	9	91	112	6
17	18	4	42	96	8	67	68	6	92	168	8
18	39	4	43	44	5	68	126	5	93	128	13
19	20	2	44	84	4	69	96	8	94	144	5
20	42	3	45	78	9	70	144	7	95	120	8
21	32	4	46	72	4	71	72	8	96	252	11
22	36	3	47	48	5	72	195	11	97	98	7
23	24	4	48	124	7	73	74	6	98	171	9
24	60	5	49	57	3	74	114	5	99	156	13
25	31	4	50	93	6	75	124	12	100	217	8
26	42	3	51	72	8	76	140	4			
27	40	5	52	98	5	77	96	8			

Il serait intéressant de comprendre ne-serait-ce que pourquoi la conjecture est vraie (car peu en doutent) pour des nombres de la forme $2.p^2$, ou bien de la forme $2^k.p$ parce qu'ils semblent fournir les valeurs minimales de la comète.
2.3^6, par exemple, a 48 décomposants, comme toute une série de nombres tels que $900, 1092, 1368, 1404, 1458, 1524, 1750, 1960, 2080, 2320, 2420, 2548, 2560, 2620$
$2674, 2690, 2912, 3034, 3098, 3110, 3208, 3232,$ *etc* parmi lesquels il doit sûrement y avoir un $2p$ notamment en vertu du théorème de Dirichlet. En quelque sorte, on fait une projection d'un point de la comète sur un point d'abscisse plus élevée et de même ordonnée, à cause de certaines propriétés. Mais cette manière de voir est contraire à la notion même de récurrence que l'on cherchait à obtenir et qui veut qu'on puisse calculer $r(n)$ en fonction de $r(n_i)$ plus petits ; pour les nombres qui ne sont pas dans la ligne basse de la comète, il s'agirait plutôt de trouver $r(n)$ comme étant égal au $r(n')$ d'un nombre n' plus grand que n.

8 Tentative d'explication des propriétés de partitions découvertes sur les $2^k.p$

On rappelle que l'on cherche, pour un nombre pair $2n$ donné, l'ensemble des nombres premiers p non congrus à $2n$ selon tout p' premier inférieur ou égal à $\sqrt{2n}$. Ces nombres sont des unités du groupe multiplicatif : ils sont premiers à $2n$.
On cherche à trouver une explication à la propriété de "somme des cardinaux" qui fait

que $r(i) = r(i_1) + r(i_2) + ... + r(i_n)$ avec $i_k < i$ pour tout k.
Admettons que l'on ait réussi à répondre à la question *Quels i_k doivent être choisis comme sommants* ?, il subsiste une interrogation quant au fait que tous les décomposants ne se transmettent pas toujours directement au produit. On comprend à quelle condition un décomposant se transmet à un produit : on a vu qu'un décomposant de Goldbach de $2x$ est une unité qui est non-congrue à $2x$ selon tout module inférieur à $\sqrt{2x}$. Dans la suite, on utilisera la notation $a \not\equiv b \ (mod\ ?)$ pour exprimer que a est non-congru à b selon tout module *adéquat* (i.e. inférieur à la racine du pair considéré) alors que la notation $a \equiv b \ (mod\ ?)$ exprimera que a est congru à b selon un module (la première proposition étant la négation logique de la deuxième).

Si $p \not\equiv x \ (mod\ ?)$ et si $p.\frac{1}{y} \not\equiv x \ (mod\ ?)$ alors $p \not\equiv xy \ (mod\ ?)$ et p est un décomposant du produit xy. Il faut ici mettre des conditions sur l'implication pour respecter le paragraphe 23 de la section Seconde des Recherches Arithmétiques de Gauss qui stipule que *Si a est premier avec m, que e et f soient des nombres incongrus suivant le module m, ae et af seront aussi incongrus.*

Tandis que si $p \not\equiv x \ (mod\ ?)$ et si $p.\frac{1}{y} \equiv x \ (mod\ ?)$ alors $p \equiv xy \ (mod\ ?)$ et p n'est pas un décomposant du produit xy mais alors puisque les cardinaux sont égaux, il doit y avoir la possibilité de trouver *un autre p* qui remplace p dans l'ensemble des décomposants du produit puisque, finalement, on en trouve autant.

9 Une autre piste utilisant les résidus quadratiques

La loi de réciprocité quadratique a reçu de si nombreuses démonstrations (notamment par Gauss) qu'elle doit être un théorème *puissant*, dont doivent découler de nombreux autres théorèmes.
On cherche p tel que $p \not\equiv 2a \ (mod\ ?)$. Cela équivaut à $p.\frac{1}{a} \not\equiv 2 \ (mod\ ?)$[2].
Si l'on prend l'ensemble des modules dont 2 n'est pas résidu quadratique, et que parmi eux, on considère ceux dont $p.\frac{1}{a}$ est résidu quadratique, alors ces modules seront tels que $p.\frac{1}{a} \not\equiv 2 \ (mod\ ?)$.
De telles hyothèses peuvent avoir pour conséquence les partitions sur les cardinaux que l'on a constatées, c'est à dire le fait que les décompositions de Goldbach des grands nombres découlent des décompositions de Goldbach de nombres plus petits.

[2]Se référer aux sections 112 à 116 des Recherches Arithmétiques de Gauss.