Programme de calcul de la formule de Connes-Consani d'une fonction de comptage liée à la fonction zêta de Riemann (Denise Vella-Chemla, 22.4.2018)

On fournit ici le programme de calcul de la fonction de comptage fournie dans le cours d'Alain Connes au Collège de France de l'année 2008-2009 "Le monoïde des classes d'Adèles", consultable ici : https://www.college-de-france.fr/media/alain-connes/UPL59830$_{c}onnes_{r}es$0809.pdf.

Cette fonction de comptage $N(q)$ vaut, pour $q \in [1, \infty)$ et Z l'ensemble des zéros non-triviaux de la fonction zêta de Riemann :

$$N(q) = q - \sum_{\rho \in Z} order(\rho) q^{\rho} + 1$$

```
import math
from math import *
import cmath
from cmath import *
import mpmath
from mpmath import *
import scipy
from scipy import integrate
import numpy
from numpy import *

def prime(atester):
  pastrouve = True
  k = 2
  if (atester == 1): return False
  if (atester == 2): return True
  if (atester == 3): return True
  if (atester == 5): return True
  if (atester == 7): return True
  while (pastrouve):
    if ((k * k) > atester):
        return True
    else:
        if ((atester % k) == 0):
            return False
        else: k=k+1

"""for x in range(1,1000000):
    if prime(x):
        print(x)"""

"""zeros=[0.5+ 14.1347251417346937904572519835624766j,
   0.5- 14.1347251417346937904572519835624766j,
   0.5+ 21.0220396387715549926284795938969162j,
   0.5- 21.0220396387715549926284795938969162j,..."""
```

```
zeros=[]
with open('leszerosdezeta', 'r') as f:
   for p in f.readlines():
      z = float(p.split()[1])
      zeros.append(0.5+z*j)
      zeros.append(0.5-z*j)
f.close()
"""
print('')
print('les zeros')
for z in zeros:
   print(z)
"""
print('')
print('la fonction')
for p in range(2,12):
  if (prime(p)):
   for l in range(1,12):
      x = p**l
      s=''
      s+='{0:d}^{1:d}={2:d}'.format(p,l,x)
      print('')
      print(s)
      somme = x+1
      for z in zeros:
         """print(z.imag)"""
         somme = somme - x**z
      print(somme)
```

On note dans les tableaux ci-dessous les résultats du calcul de $N(q)$ avec $q = p^l$ pour p nombre premier inférieur à 48 et l compris entre 1 et 12, avec Z l'ensemble des 200000 premiers zéros non-triviaux de zêta (100000 de parties imaginaires positives et leur conjugué) fournis sur la toile par Odlyzko. On voit clairement la formule être “de plus en plus” juste, plus la taille des nombres augmente.

p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$
2^1	2	16526.022751118	3^1	3	26202.3597929168	5^1	5	38379.993254418
2^2	4	16526.8723080138	3^2	9	26193.5141189349	5^2	25	38376.4744394744
2^3	8	16541.8346696773	3^3	27	26215.9897049863	5^3	125	38497.7951430358
2^4	16	16529.9378096922	3^4	81	26215.0292622448	5^4	625	38212.7669195398
2^5	32	16517.1894144178	3^5	243	26234.1241967476	5^5	3125	39692.8475347931
2^6	64	16541.3837311068	3^6	729	25557.1812357914	5^6	15625	38978.1712748674
2^7	128	16596.457314137	3^7	2187	25139.34262301	5^7	78125	-21909.0320787703
2^8	256	16530.1027525653	3^8	6561	22813.9543148104	5^8	390625	34087.6262616789
2^9	512	16677.4128374294	3^9	19683	60904.2606401426	5^9	1953125	1822603.05018823
2^{10}	1024	16924.5256439669	3^{10}	59049	19819.9498798134	5^{10}	9765625	8812263.10212509
2^{11}	2048	16487.7126061848	3^{11}	177147	128839.908639892	5^{11}	48828125	53338264.3395279

p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$
7^1	7	46404.9338047014	11^1	11	57188.4645348426
7^2	49	46376.3368749039	11^2	121	57156.8354495423
7^3	343	46397.6984599656	11^3	1331	56511.0593488764
7^4	2401	42855.8567832658	11^4	14641	36201.8474304666
7^5	16807	40850.3069858886	11^5	161051	433036.226139666
7^6	117649	92518.822968482	11^6	1771561	1037835.49029106
7^7	823543	943094.788109194	11^7	19487171	19883161.943641
7^8	5764801	5592070.70530986	11^8	214358881	222968138.395264
7^9	40353607	40259900.2377517	11^9	2357947691	2375040033.44047
7^{10}	282475249	275547273.890145	11^{10}	25937424601	25929023679.1753
7^{11}	1977326743	2013531665.95512	11^{11}	285311670611	285325042242.14

p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$
13^1	13	61173.455982275	17^1	17	67570.864210361
13^2	169	61152.1842074158	17^2	289	67488.2796872391
13^3	2197	61595.0817517291	17^3	4913	64494.4571301473
13^4	28561	35119.101318525	17^4	83521	95126.1413652707
13^5	371293	842806.502153679	17^5	1419857	1527796.0967923
13^6	4826809	4844105.03767551	17^6	24137569	26266974.9339189
13^7	62748517	66948670.668413	17^7	410338673	405312134.16939
13^8	815730721	804835326.305623	17^8	6975757441	6972350256.91798
13^9	10604499373	10625393957.1387	17^9	118587876497	118773726755.062
13^{10}	137858491849	137927288531.251	17^{10}	2015993900449	2016130632947.47
13^{11}	1792160394037	1792181268163.27	17^{11}	34271896307633	34271018666148.3

p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$
19^1	19	70244.6576283392	23^1	23	74795.6836331307
19^2	361	70626.4147101706	23^2	529	74556.3563989949
19^3	6859	71558.4933286857	23^3	12167	61902.2398292989
19^4	130321	120687.966682127	23^4	279841	90297.7769623467
19^5	2476099	3108778.96872056	23^5	6436343	5808412.75514133
19^6	47045881	41647361.006971	23^6	148035889	145563305.665317
19^7	893871739	888579108.932336	23^7	3404825447	3382857937.92773
19^8	16983563041	17062763333.8805	23^8	78310985281	78448993931.1218
19^9	322687697779	322562612953.024	23^9	1801152661463	1801519334170.95
19^{10}	6131066257801	6129947084940.08	23^{10}	41426511213649	41426393227455.9
19^{11}	116490258898219	116488446544531.0	23^{11}	952809757913927	952800960795587.0

p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$
29^1	29	80323.6441199599	31^1	31	81900.3203876187
29^2	841	80751.8276029748	31^2	961	81705.2330983772
29^3	24389	51337.2372113353	31^3	29791	33791.6242719332
29^4	707281	890987.725034893	31^4	923521	982442.746257106
29^5	20511149	17317106.4403853	31^5	28629151	27728902.3587587
29^6	594823321	605265022.769502	31^6	887503681	896751867.654895
29^7	17249876309	17185843641.7054	31^7	27512614111	27517818436.106
29^8	500246412961	500492898863.202	31^8	852891037441	853222584696.395
29^9	14507145975869	14510068897520.6	31^9	26439622160671	26437295777642.8
29^{10}	420707233300201	420710600489541.0	31^{10}	819628286980801	819638888298087.0
29^{11}	12200509765705829	$1.22006051245098e+16$	31^{11}	25408476896404831	$2.5408429837307e+16$

p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$
37^1	37	86115.7665596133	41^1	41	88557.9701305219
37^2	1369	85426.9937307177	41^2	1681	89285.021388377
37^3	50653	118992.562151978	41^3	68921	67825.0760413148
37^4	1874161	1924935.75138671	41^4	2825761	3290709.52789768
37^5	69343957	67824350.7908732	41^5	115856201	112903420.619561
37^6	2565726409	2610041137.45719	41^6	4750104241	4739603369.24744
37^7	94931877133	95041507191.6032	41^7	194754273881	194660225230.829
37^8	3512479453921	3512577903295.74	41^8	7984925229121	7986619198004.87
37^9	129961739795077	129952955798711.0	41^9	327381934393961	327384739370054.0
37^{10}	4808584372417849	$4.8085634376082e+15$	41^{10}	13422659310152401	$1.34226913543118e+16$
37^{11}	177917621779460413	$1.7791766795618e+17$	41^{11}	550329031716248441	$5.50329233007557e+17$

p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$
43^1	43	89681.4528919395	47^1	47	91791.6074703618
43^2	1849	88460.612053587	47^2	2209	88865.4662431519
43^3	79507	108705.324306434	47^3	103823	174505.824660669
43^4	3418801	4147830.65155219	47^4	4879681	6082031.07152182
43^5	147008443	144403785.698815	47^5	229345007	237611519.978432
43^6	6321363049	6349617605.81833	47^6	10779215329	10716283351.5966
43^7	271818611107	272082250666.8	47^7	506623120463	506835012007.946
43^8	11688200277601	11687472448563.0	47^8	23811286661761	23810227304479.1
43^9	502592611936843	502593505096544.0	47^9	1119130473102767	$1.11911124064231e+15$
43^{10}	21611482313284249	$2.16114155590442e+16$	47^{10}	52599132235830049	$5.25990765071702e+16$
43^{11}	929293739471222707	$9.29293155038425e+17$	47^{11}	2472159215084012303	$2.47215916414308e+18$