

# Différentes formulations équivalentes de la Conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

Mai 2009

## 1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce “*il semble que tout nombre supérieur à 2 soit la somme de trois nombres premiers*”. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est “*tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers*”.

On fournira ici une formulation équivalente à la conjecture de Goldbach utilisant des mots binaires, une formulation utilisant le concept de graphe, puis une formulation utilisant des ensembles d’entiers.

Dans la suite de cette note, on s’intéresse à cette restriction de la conjecture : “*tout nombre pair supérieur ou égal à 24 est la somme de deux nombres premiers impairs*”.

## 2 Formulation utilisant des mots binaires

### 2.1 Définitions

Nous allons représenter les entiers par des mots binaires bâtis sur l’alphabet  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ . L’ensemble de ces mots est muni de l’opération de *concaténation* :

$$(a_1a_2\dots a_m).(b_1b_2\dots b_n) = (a_1a_2\dots a_mb_1b_2\dots b_n)$$

Si  $f = a_1a_2\dots a_m$  est un mot, son *image-miroir* est le mot  $f^t = a_ma_{m-1}\dots a_1$ .

Un mot égal à son image-miroir est un *palindrome*, comme par exemple (000010010000).

Soient  $f$  et  $g$  des mots de  $\mathcal{A}^*$  ;  $g$  est un *préfixe propre* de  $f$  s’il existe  $h$  non vide tel que  $f = gh$ .

Dans toute la suite, nous omettrons les parenthèses autour des mots.

La lettre 1 représentera d’une manière générale le fait pour un nombre entier d’être composé parce que divisible par un nombre impair inférieur à lui, et différent de 1. Inversement, la lettre 0 sera utilisée pour représenter le fait pour un nombre entier d’être non divisible par un nombre impair inférieur à lui, et différent de 1.

## 2.2 Caractère symétrique de la conjecture de Goldbach

Observons un exemple. Si  $2a = 40$ ,  $\varphi(40)$  est le nombre de nombres inférieurs à 40 et premiers à 40 : on appelle ces nombres les unités génératrices du groupe  $\mathbb{Z}/40$ .  $\varphi(x)$  est appelée la fonction indicatrice d'Euler.

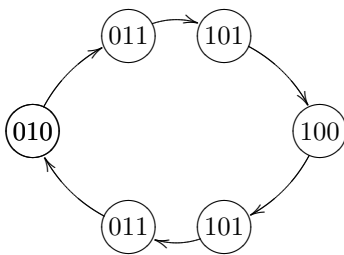
Il y a  $\varphi(40)/2$  couples d'impairs dont la somme vaut 40 ; il s'agit des couples (1, 39), (3, 37), (5, 35), (7, 33), (9, 31), (11, 29), (13, 27) et (15, 25). Les sommes associées à chacun de ces couples se réécrivent de la façon suivante, en utilisant les unités génératrices :  $1 + 3.13$ ,  $3 + 37$ ,  $7 + 3.11$ ,  $31 + 3.3$ ,  $11 + 29$ ,  $13 + 3.9$ ,  $17 + 23$  et  $19 + 3.7$ .

Intéressons-nous successivement à la divisibilité par 3 des nombres de ces différents couples, puis à leur divisibilité par 5, puis à leurs différentes divisibilités par tous les nombres impairs inférieurs ou égaux à  $a$ .

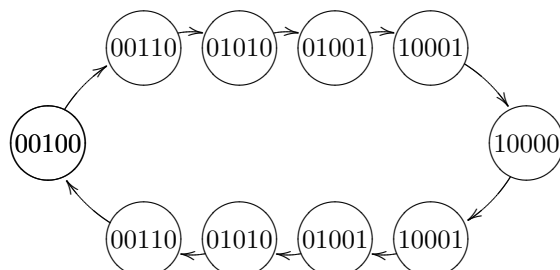
La divisibilité par 3 étant de périodicité 3, on choisit d'associer à 40 le mot 101 de longueur 3. Ce mot représente le caractère de divisibilité par 3 des nombres  $20 \pm 1$ ,  $20 \pm 3$  et  $20 \pm 5$

Plus généralement, au nombre  $2a$  est associé pour la divisibilité par 3, le mot binaire  $l_1l_2l_3$  de longueur 3 dans lequel  $l_i$  représente le caractère de divisibilité par 3 de  $x \pm (2i - 1)$  si  $a$  est pair (resp.  $x \pm (2i - 2)$  si  $a$  est impair).

Dans la mesure où l'on considère la divisibilité par 3 non seulement des nombres inférieurs à  $a$ , mais simultanément des nombres supérieurs à  $a$  (par *disjonction booléenne*), on comprend que la représentation du caractère de divisibilité par 3 va associer aux nombres pairs  $2a$  successifs les mots du cycle de 6 mots suivant, selon la classe de congruence à laquelle appartient  $a$  modulo 6 (selon le positionnement de leur "ligne de pli" sur le mot 100 : le pli peut être sur le 1, entre le 1 et le premier 0, sur le premier 0, entre les deux 0, sur le deuxième 0 ou entre le deuxième 0 et le 1 suivant du fait de la périodicité) :



Une étude similaire (et évidente) concernant le caractère de divisibilité par 5 nous fait aboutir au cycle contenant les 10 mots suivants :



L'affectation des mots à un nombre pair peut être vue comme utilisant des automates séquentiels élémentaires qu'on appellera *Machine*<sub>3</sub>, *Machine*<sub>5</sub>, ..., *Machine*<sub>2k+1</sub>.

La première machine appelée *Machine*<sub>3</sub> renvoie successivement les 6 mots de longueur 3 suivants 010, 011, 101, 100, 101, 011, et retour au premier mot de longueur 3, puis répétition des mots de la liste dans le même ordre, indéfiniment. La deuxième machine appelée *Machine*<sub>5</sub> renvoie successivement les 10 mots de longueur 5 suivants 00100, 00110, 01010, 01001, 10001, 10000, 10001, 01001, 01010, 00110, et retour au premier mot de longueur 5, puis répétition des mots de la liste dans le même ordre, indéfiniment.

Pour trouver les mots fournis par la machine *Machine*<sub>2k+3</sub> quand on a les mots de la machine *Machine*<sub>2k+1</sub>, il faut procéder de la manière suivante :

- les  $k$  premiers mots de la machine *Machine*<sub>2k+3</sub> sont les  $k$  premiers mots de la machine *Machine*<sub>2k+1</sub> auxquels on a appliqué le traitement suivant : les mots de rang pair se voient concaténer un 0 au début et à la fin tandis que les mots de rang impair se voient concaténer un 0 à la fin, et rajouter un 0 comme deuxième lettre (toute lettre après la deuxième se voit décaler d'un rang à droite) ;
- les  $k$  derniers mots de la machine *Machine*<sub>2k+3</sub> sont les  $k$  derniers mots de la machine *Machine*<sub>2k+1</sub> auxquels on a appliqué un traitement identique à celui qui a été appliqué aux  $k$  premiers mots ;
- le mot central de la machine *Machine*<sub>2k+3</sub> est le mot central de la machine *Machine*<sub>2k+1</sub> auquel on a concaténé deux 0 à l'extrémité droite ;
- on ajoute deux mots entre les  $k$  premiers mots et le mot central qui sont :  $0.1.0^{2k}.1$  et  $1.0^{2k+1}.1$  ;
- on ajoute deux mots entre le mot central et les  $k$  derniers mots qui sont :  $1.0^{2k+1}.1$  et  $0.1.0^{2k}.1$ .

Pour le premier nombre pair que l'on considère (i.e. 24), les curseurs dans les 5 premières machines sont dans une position particulière.

Pour trouver les mots associés aux nombres pairs successifs suivant 24, on peut imaginer que les curseurs avancent d'un cran dans chaque machine, et pour

chaque nouveau double de nombre impair  $2k + 1$ , on ajoute une nouvelle machine qui renvoie les mots de longueur  $2k + 1$  qu'il faudra affecter à tous les nombres pairs à venir (lorsqu'on introduit une nouvelle machine son curseur est positionné sur le mot que l'on a coutume d'appeler *central* de la machine en question, i.e. un 1 suivi de  $2k$  zéros).

### 2.3 Calcul des mots associés à un nombre pair

L'algorithme ci-dessous calcule les mots associés à un nombre pair donné.

$$\begin{aligned}
 m &= \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor \\
 &\text{pour } i \text{ allant de } 1 \text{ à } m \text{ de } 1 \text{ en } 1 \\
 &\quad \text{si } (x \bmod 4i + 2 = 2i + 1) \text{ alors } \text{mot}(2x, i) = 1.0^{2i} \\
 &\quad \text{sinon si } (x \bmod 4i + 2 = 0) \text{ alors } \text{mot}(2x, i) = 0^i.1.0^i \\
 &\quad \text{sinon pour } j \text{ allant de } 2 \text{ à } 4i \text{ de } 2 \text{ en } 2 \\
 &\quad \quad \text{si } (2x \bmod 8i + 4 = j) \text{ ou } (2x \bmod 8i + 4 = 8i + 4 - j) \text{ alors} \\
 &\quad \quad \quad \text{si } (x \bmod 2 = 0) \text{ alors} \\
 &\quad \quad \quad \quad \text{mot}(2x, i) = 0^{i-\frac{j}{4}}.1.0^{\frac{j}{2}-1}.1.0^{i-\frac{j}{4}} \\
 &\quad \quad \quad \text{sinon} \\
 &\quad \quad \quad \quad \text{mot}(2x, i) = 0.0^{i-\frac{j}{4}-1}.1.0^{\frac{j}{2}-1}.1.0^{i-\frac{j}{4}-1}
 \end{aligned}$$

### 2.4 Remplissage de la matrice carrée

L'étape suivante consiste à mettre ces mots dans une matrice carrée  $M$  de taille  $m \times m$ , dans l'ordre dans lequel on les a trouvés, en effectuant ce qu'on appellera la "complétion" des mots.

L'opération de multiplication qu'on utilise sur deux mots est la *concaténation* des mots. On peut ainsi parler de *puissance* quand on concatène plusieurs fois un même mot.

Si le mot  $\text{mot}(2x, i)$  est d'une longueur supérieure à  $m$ , on met dans la ligne  $i$  de la matrice le préfixe propre de  $\text{mot}(2x, i)$  de  $m$  lettres.

Si le mot  $\text{mot}(2x, i)$  est d'une longueur inférieure à  $m$ , on prend le préfixe de  $m$  lettres d'une puissance de  $\text{mot}(2x, i)$  qui a quant à elle (la puissance de  $\text{mot}(2x, i)$ ) plus de  $m$  lettres.

On lit maintenant les mots dans les colonnes de la matrice au lieu de les lire dans les lignes.

L'un des mots (celui de la colonne *colonne*) ne contient qu'un seul 1 (ce 1 est situé sur une ligne bien précise : la ligne *ligne* telle que  $\text{ligne} + \text{colonne} = m + 1$ ).

La bijection colonne / décomposant de Goldbach s'effectue de la manière suivante :

$\begin{aligned} & \text{si } (x \bmod 2 = 1) \ f(\text{colonne}) = x + 2 - 2.\text{colonne} \\ & \text{sinon } f(\text{colonne}) = x + 1 - 2.\text{colonne} \\ & \text{si } ((f(\text{colonne}) = x) \vee (2x \bmod f(x) \neq 0)) \\ & \text{alors } f(\text{colonne}) \text{ est un décomposant de Goldbach de } 2x. \end{aligned}$
---

## 2.5 Traitement d'un cas simple

Les 5 mots associés au nombre pair 24 sont :

010  
01010  
0010100  
010000010  
10000000001

La matrice carrée de taille  $5 \times 5$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les mots verticaux ne contenant qu'un seul 1 sont ceux des colonnes 1, 3 et 4, qui correspondent aux décomposants de Goldbach de 24 que sont 11, 7 et 5 ( $24 = 11 + 13 = 7 + 17 = 5 + 19$ ).

## 3 Formulation utilisant des graphes

Les éléments  $M(i, j)$  de la matrice  $M$ , obtenus par la première formulation présentée au paragraphe 2, sont tels que :

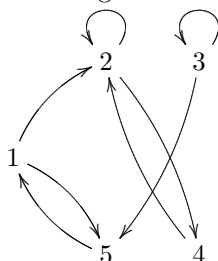
$$M(i, j) = 1 \iff (2i + 1 \mid a - 2j + 1) \vee (2i + 1 \mid a + 2j - 1)$$

Pour le nombre pair 24, la matrice ainsi obtenue est :

	13	15	17	19	21
	11	9	7	5	3
3	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
7	0	0	1	0	1
9	0	1	0	0	0
11	1	0	0	0	0

Trouver les décomposants de Goldbach de  $2a$  est équivalent à trouver dans la matrice d'adjacence les colonnes ne comptant qu'un seul 1 (qui est sur la diagonale ascendante).

Cette matrice peut être regardée comme la matrice d'adjacence du graphe d'ordre 5 suivant :



Dans le contexte de la théorie des graphes, trouver les décomposants de Goldbach de  $2a$  est équivalent à trouver les sommets du graphe de divisibilité étendue (on l'appelle ainsi car on se rappelle qu'un arc exprime la divisibilité d'un nombre ou de son complémentaire à  $2a$ ) qui n'ont qu'un seul antécédent.

Ce qui est intéressant ici, c'est le fait qu'un même sommet (par exemple pour le graphe associé au nombre pair 24 le sommet 1) représente de façon conjointe d'une part le diviseur 3 (entête de ligne) et d'autre par le couple (11, 13) qui est à distance 1 de 12 la moitié de 24.

Si l'on reprend la façon dont sont définis les éléments de la matrice, un sommet  $y$  n'a qu'un seul antécédent si et seulement si, quel que soit  $x$  différent de  $m + 1 - y$ ,  $M(x, y) = 0$ .

Ceci est équivalent à :

$$(2x + 1 \nmid a - 2y + 1) \wedge (2x + 1 \nmid a + 2y - 1)^1$$

Dans le graphe, on trouve que les trois sommets 1, 3 et 4 n'ont qu'un seul antécédent.

$y=1$  est une colonne satisfaisante car pour  $x=1, 2, 3$  et  $4$ ,

$$(3 \nmid 11) \wedge (3 \nmid 13) \wedge (5 \nmid 11) \wedge (5 \nmid 13) \wedge (7 \nmid 11) \wedge (7 \nmid 13) \wedge (9 \nmid 11) \wedge (9 \nmid 13)$$

$y=3$  est également une colonne satisfaisante car pour  $x = 1, 2, 4$  et  $5$ ,

$$(3 \nmid 7) \wedge (3 \nmid 17) \wedge (5 \nmid 7) \wedge (5 \nmid 17) \wedge (9 \nmid 7) \wedge (9 \nmid 17) \wedge (11 \nmid 7) \wedge (11 \nmid 17)$$

Enfin,  $y=4$  est également une colonne satisfaisante car pour  $x = 1, 3, 4$  et  $5$ ,

$$(3 \nmid 5) \wedge (3 \nmid 19) \wedge (7 \nmid 5) \wedge (7 \nmid 19) \wedge (9 \nmid 5) \wedge (9 \nmid 19) \wedge (11 \nmid 5) \wedge (11 \nmid 19).$$

Dans ce contexte, la conjecture de Goldbach devient : "pourquoi, lorsqu'on choisit  $m - 1$  impairs tous différents parmi les  $m$  premiers impairs supérieurs ou égaux à 3, il existe toujours 2 nombres à égale distance de  $2m + 2$  que tous les  $m - 1$  impairs choisis ne divisent pas ?".

## 4 Formulation utilisant des ensembles d'entiers

Voici une façon supplémentaire de considérer le problème de la conjecture de Goldbach.

On cherche les décomposants de  $2a$ , un nombre pair.

On va associer à  $2a$  un ensemble de nombres  $E_{2a}$  initialement vide.

Cette formulation utilise la notion de *résidum minimum absolu* définie par Gauss dans les Recherches Arithmétiques (Cf Annexe 1).

<sup>1</sup>Cette formule est légèrement différente dans le cas du double d'un nombre impair.

#### 4.1 Description de l'algorithme utilisant les valeurs absolues des résidus minima absolus

On calcule  $m$ , le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à  $a$ .  $m = \left\lfloor \frac{a-1}{2} \right\rfloor$ .

*Pour  $i$  allant de 1 à  $m$ , on calcule les valeurs absolues des résidus minima absolus de  $2a$  pour les modules de la forme  $8i + 4$  (remarque :  $i > 0$ ).*

*Si  $2a \equiv 0 \pmod{8i + 4}$ , on ajoute le singleton  $\{i + 1\}$  à l'ensemble  $E_{2a}$  ;  
sinon si  $2a \equiv 4i + 2 \pmod{8i + 4}$ , on ajoute le singleton  $\{1\}$  à l'ensemble  $E_{2a}$  ;  
sinon pour  $j$  allant de 0 à  $4i + 2$  de 2 en 2,*

*si  $(2a \equiv j \pmod{8i + 4})$  ou si  $(2a \equiv 8i + 4 - j \pmod{8i + 4})$*

*on ajoute à l'ensemble  $E_{2a}$  le singleton  $\{i - \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor + 1\}$*

*si  $a$  est pair, on ajoute à l'ensemble  $E_{2a}$  le singleton  $\{i + \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor + 1\}$*

*si son élément est inférieur ou égal à  $m$  ;*

*sinon ( $a$  est impair), on ajoute à l'ensemble  $E_{2a}$  le singleton  $\{i + \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor + 2\}$*

*si son élément est inférieur ou égal à  $m$  ;*

*Lorsque  $i$  est inférieur strictement à  $m$ , on ajoute également à l'ensemble de nombres toutes les sommes inférieures à  $m$  des nombres déjà ajoutés et d'un multiple de  $i$ .*

Cette formulation consiste à stocker dans  $E_{2a}$  les indices  $j$  des éléments de la matrice  $M(i, j)$  égaux à 1. Le nombre pair 24 pris en exemple se verra associé l'ensemble de nombres  $E_{24} = \{1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5\}$ .

L'ensemble  $E_{2a}$  contient une seule occurrence de certains nombres, et plusieurs occurrences d'autres nombres.

A chaque nombre n'apparaissant qu'en une seule occurrence peut être associé un décomposant de Goldbach de  $2a$ , de la même façon que cela a été fait dans la seconde formulation.

## 5 Nouvelle caractérisation des nombres premiers

Le travail présenté ici nous permet de mettre en évidence une nouvelle façon de caractériser les nombres premiers. On utilise la notion de résidu minimum absolu de Gauss, dont on prend la valeur absolue. On appelle  $varma(x, m)$  la valeur absolue du résidu minimum absolu de  $x$  selon le module  $m$ .

$$varma(x, m) = \begin{cases} x \bmod m & \text{si } x \bmod m \leq m/2 \\ x - (x \bmod m) & \text{sinon.} \end{cases}$$

exemple :  $varma(32, 12) = 4$ .

Les nouvelles caractérisations sont alors :

- $x$  est un nombre impair non premier si et seulement si  
 $\exists i \leq \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$  tel que  $j = \text{varma}(2x, 8i + 4)$   
et  $i - \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1 = 1$   
et  $i + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 2 = 1$
  
- $x$  est un nombre impair premier si et seulement si  
 $\forall i < \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$   
 $j = \text{varma}(2x, 8i + 4) \Rightarrow ((i - \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1 \neq 1) \wedge (i + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 2 \neq 1))$
  
- $x$  est un le double d'un nombre pair entre deux nombres premiers si et seulement si  
 $\forall i < \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$   
 $j = \text{varma}(2x, 8i + 4) \Rightarrow ((i - \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1 \neq 1) \wedge (i + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1 \neq 1))$

Etant donné un entier  $x$ , si selon un module de la forme  $4i + 2$ , la valeur absolue du résidu minimum absolu de  $x$  est égale à  $2i + 1$  alors  $x$  est composé.

## Bibliographie

- [1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1801.  
[2] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèqne impartiale 3, 1751, p.10-31.  
[3] J. Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, suivi de H. Poincaré, *L'invention mathématique*, Ed. Jacques Gabay, 2000.  
[4] C. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la SMF n°25, p.108, 1/12/1897.  
[5] C.P. Bruter, *La construction des nombres*, Ed. Ellipses, 2000. [6] D. Nordon, *Les obstinations d'un mathématicien*, Ed. Belin Pour La Science, 2003.  
[7] A. Doxiadis, *Oncle Pétrou et la conjecture de Goldbach*, Ed. Points, 2002.  
[8] A.M. Decailot, *L'arithméticien Edouard Lucas (1842-1891) : théorie et instrumentation*, Revue d'histoire des mathématiques, 4, 1998, p. 191-236.

## Annexe 1 : Extrait de la section première des Recherches Arithmétiques de Gauss

1. Si un nombre  $a$  divise la différence des nombres  $b$  et  $c$ ,  $b$  et  $c$  sont dits *congrus* suivant  $a$ , sinon *incongrus*.  $a$  s'appellera le module ; chacun des nombres  $b$  et  $c$ , *résidus* de l'autre dans le premier cas, et *non résidus* dans le second.

Les nombres peuvent être positifs ou négatifs, mais entiers. Quant au module il doit évidemment être pris absolument, c'est à dire, sans aucun signe.

Ainsi  $-9$  et  $+16$  sont *congrus* par rapport au module 5 ;  $-7$  est *résidu* de 15 par rapport au module 11, et *non résidu* par rapport au module 3.



Au reste 0 étant divisible par tous les nombres, il s'ensuit qu'on peut regarder tout nombre comme congru avec lui-même par rapport à un module quelconque.

2. Tous les résidus d'un nombre donné  $a$  suivant le module  $m$  sont compris dans la formule  $a + km$ ,  $k$  étant un entier indéterminé. Les plus faciles des propositions que nous allons exposer peuvent sans peine se démontrer par là ; mais chacun en sentira la vérité au premier aspect.

Nous désignons dorénavant la congruence de deux nombres par ce signe  $\equiv$ , en y joignant, lorsqu'il sera nécessaire, le module renfermé entre parenthèses ; ainsi  $-16 \equiv 9 \pmod{5}$ ,  $-7 \equiv 15 \pmod{11}$ <sup>2</sup>.

3. THEOREME : Soient  $m$  nombres entiers successifs  $a, a+1, a+2, \dots, a+m-1$  et un autre  $A$ , un des premiers sera congru avec  $A$ , suivant le module  $m$ , et il n'y en aura qu'un.

[Démonstration]

4. Il suit de là que chaque nombre aura un résidu, tant dans la suite  $0, 1, 2, \dots, (m-1)$ , que dans celle-ci  $0, -1, -2, \dots, -(m-1)$  ; nous les appellerons résidus minima ; et il est clair qu'à moins que 0 ne soit résidu, il y en aura toujours deux, l'un positif, l'autre négatif. S'ils sont inégaux, l'un d'eux sera  $< \frac{m}{2}$  ; s'ils sont égaux, chacun d'eux  $= \frac{m}{2}$  sans avoir égard au signe ; d'où il suit qu'un nombre quelconque a un résidu qui ne surpasse pas la moitié du module, et que nous appellerons résidu minimum absolu.

Par exemple  $-13$  suivant le module 5, a pour résidu minimum positif 2, qui est en même temps minimum absolu, et  $-3$  pour résidu minimum négatif ;  $+5$  suivant le module 7, est lui-même son résidu minimum positif ;  $-2$  est le résidu minimum négatif et en même temps le minimum absolu.

## Annexe 2 : Traitement d'exemples plus étoffés

### A2.1 : Traitement du cas $2a = 78$ en utilisant la formulation de la conjecture de Goldbach basée sur les mots binaires

Mots associés au nombre pair 78

Les mots associés au nombre pair 78 sont au nombre de 19 (le nombre d'impairs inférieurs ou égaux à 39). Ce sont les mots :

```

100
00110
0010010
000100100
00010000100
100000000000
000100000000100
00000010000100000
000000001100000000
00000000100100000000
000000010000010000000
00000010000000001000000
000000100000000000000100000
00000100000000000000000100000
000010000000000000000000100000
0000100000000000000000000100000
0001000000000000000000000001000
000100000000000000000000000001000
0010000000000000000000000000000100
01000000000000000000000000000000010
100000000000000000000000000000000001
1000000000000000000000000000000000000

```

<sup>2</sup>Nous avons adopté ce signe à cause de la grande analogie qui existe entre l'égalité et la congruence. C'est pour la même raison que Legendre, dans des mémoires que nous aurons souvent occasion de citer, a employé le signe même de l'égalité, pour désigner la congruence ; nous en avons préféré un autre, pour prévenir toute ambiguïté.

Obtention de la matrice

```

1001001001001001001
0011000110001100011
0010010001001000100
0001001000001001000
0001000010000010000
1000000000001000000
0001000000001000001
0000001000010000000
0000000011000000000
0000000010010000000
0000000010000001000
0000000100000000010
0000001000000000010
0000010000000000000
0000010000000000000
0000100000000000000
0001000000000000000
0010000000000000000
0100000000000000000
1000000000000000000

```

Identification des colonnes ne contenant qu'un seul 1

Pour le nombre pair 78, les colonnes de la matrice qui conviennent sont :

```

1001001001001001001
0011000110001100011
0010010001001000100
0001001000001001000
0001000010000010000
1000000000001000000
0001000000001000001
0000001000010000000
0000000011000000000
0000000010010000000
0000000010000001000
0000000100000000010
0000001000000000010
0000010000000000000
0000010000000000000
0000100000000000000
0001000000000000000
0010000000000000000
0100000000000000000
1000000000000000000

```

Calcul des décomposants de Goldbach

$f(2) = 37$  fournit la décomposition de Goldbach  $78 = 37 + 41$ .

$f(5) = 31$  fournit la décomposition de Goldbach  $78 = 31 + 47$ .

$f(11) = 19$  fournit la décomposition de Goldbach  $78 = 19 + 59$ .

$f(12) = 17$  fournit la décomposition de Goldbach  $78 = 17 + 61$ .

$f(15) = 11$  fournit la décomposition de Goldbach  $78 = 11 + 67$ .

$f(17) = 7$  fournit la décomposition de Goldbach  $78 = 7 + 71$ .

$f(18) = 5$  fournit la décomposition de Goldbach  $78 = 5 + 73$ .

## A2.2 : Traitement du cas $2a = 84$ en utilisant la formulation de la conjecture de Goldbach basée sur les ensembles de nombres

84 est le double du nombre pair 42.

On calcule  $m$ , le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à 42.

$$m = \left\lfloor \frac{42 - 1}{2} \right\rfloor = 20.$$

Calcul des valeurs absolues des résidus minima absolus:

$$84 \equiv 0 \pmod{12},$$

$$84 \equiv 4 \pmod{20},$$

$$84 \equiv 0 \pmod{28},$$

$$84 \equiv 12 \pmod{36},$$

$84 \equiv 4 \pmod{44}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 40)  
 $84 \equiv 20 \pmod{52}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 32)  
 $84 \equiv 24 \pmod{60}$ ,  
 $84 \equiv 16 \pmod{68}$ ,  
 $84 \equiv 8 \pmod{76}$ ,  
 $84 \equiv 0 \pmod{84}$ ,  
 $84 \equiv 8 \pmod{92}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)  
 $84 \equiv 16 \pmod{100}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)  
 $84 \equiv 24 \pmod{108}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)  
 $84 \equiv 32 \pmod{116}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)  
 $84 \equiv 40 \pmod{124}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)  
 $84 \equiv 48 \pmod{132}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)  
 $84 \equiv 56 \pmod{140}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)  
 $84 \equiv 64 \pmod{148}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)  
 $84 \equiv 72 \pmod{156}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)  
 $84 \equiv 80 \pmod{164}$  (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84).

*Ajout des nombres à l'ensemble  $E_{84}$  :*

$1 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 2$ , ajoutons 2 à l'ensemble,  
 $2 - \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 2 + \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 4$ , ajoutons 2 et 4 à l'ensemble,  
 $3 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 4$ , ajoutons 4 à l'ensemble,  
 $4 - \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 4 + \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor + 1 = 8$ , ajoutons 2 et 8 à l'ensemble,  
 $5 - \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 5 + \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 7$ , ajoutons 5 et 7 à l'ensemble,  
 $6 - \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 6 + \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor + 1 = 12$ , ajoutons 2 et 12 à l'ensemble,  
 $7 - \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 7 + \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 14$ , ajoutons 2 et 14 à l'ensemble,  
 $8 - \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 8 + \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 13$ , ajoutons 5 et 13 à l'ensemble,  
 $9 - \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 8, 9 + \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 12$ , ajoutons 8 et 12 à l'ensemble,  
 $10 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 11$ , ajoutons 11 à l'ensemble,  
 $11 - \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 10, 11 + \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 14$ , ajoutons 10 et 14 à l'ensemble,  
 $12 - \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 9, 12 + \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 17$ , ajoutons 9 et 17 à l'ensemble,  
 $13 - \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 8, 13 + \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 20$ , ajoutons 8 et 20 à l'ensemble,  
 $14 - \left\lfloor \frac{32}{4} \right\rfloor + 1 = 7, 14 + \left\lfloor \frac{32}{4} \right\rfloor + 1 = 23$ , ajoutons 7 à l'ensemble, ( $23 > 20$ )  
 $15 - \left\lfloor \frac{40}{4} \right\rfloor + 1 = 6, 15 + \left\lfloor \frac{40}{4} \right\rfloor + 1 = 26$ , ajoutons 6 à l'ensemble, ( $26 > 20$ )  
 $16 - \left\lfloor \frac{48}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 16 + \left\lfloor \frac{48}{4} \right\rfloor + 1 = 29$ , ajoutons 5 à l'ensemble, ( $29 > 20$ )  
 $17 - \left\lfloor \frac{56}{4} \right\rfloor + 1 = 4, 17 + \left\lfloor \frac{56}{4} \right\rfloor + 1 = 32$ , ajoutons 4 à l'ensemble, ( $32 > 20$ )  
 $18 - \left\lfloor \frac{64}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 18 + \left\lfloor \frac{64}{4} \right\rfloor + 1 = 35$ , ajoutons 3 à l'ensemble, ( $35 > 20$ )

$$19 - \left\lfloor \frac{72}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 19 + \left\lfloor \frac{72}{4} \right\rfloor + 1 = 38, \text{ ajoutons } 2 \text{ à l'ensemble, } (38 > 20)$$

$$20 - \left\lfloor \frac{80}{4} \right\rfloor + 1 = 1, 20 + \left\lfloor \frac{80}{4} \right\rfloor + 1 = 41, \text{ ajoutons } 1 \text{ à l'ensemble, } (41 > 20)$$

*Complétion des lignes quand les mots sont trop courts*

$2 + 3 = 5, 5 + 3 = 8, 8 + 3 = 11, 11 + 3 = 14, 14 + 3 = 17, 17 + 3 = 20$ , ajoutons 5, 8, 11, 14, 17 et 20 à l'ensemble,

$2 + 5 = 7, 7 + 5 = 12, 12 + 5 = 17, 4 + 5 = 9, 9 + 5 = 14, 14 + 5 = 19$ , ajoutons 7, 12, et 17 à l'ensemble, ajoutons 9, 14 et 19 à l'ensemble,

$4 + 7 = 11, 11 + 7 = 18$ , ajoutons 11 et 18 à l'ensemble,

$2 + 9 = 11, 9 + 9 = 18, 8 + 9 = 17$ , ajoutons 11 et 18 à l'ensemble, ajoutons 17 à l'ensemble;

$5 + 11 = 16, 7 + 11 = 18$ , ajoutons 16 et 18 à l'ensemble ;

$2 + 13 = 15$ , ajoutons 15 à l'ensemble ;

$2 + 15 = 17$ , ajoutons 17 à l'ensemble ;

*Calcul des décomposants de Goldbach*

L'ensemble associé à 84,  $E_{84}$ , est, après exécution de l'algorithme, égal à

$\{1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 19, 20, 20\}$ .

1, 3, 6, 10, 13, 15, 16 et 19 apparaissent sous forme d'une occurrence unique dans cet ensemble.

$f(1) = 41, f(3) = 37, f(6) = 31, f(10) = 23, f(13) = 17, f(15) = 13, f(16) = 11, f(19) = 5$  sont tous des décomposants de Goldbach du nombre pair 84.