Refaire ses gammes (Denise Vella-Chemla, 7.6.2017)

On va étudier les fréquences des notes de la gamme, suite au visionnage de la petite video Science étonnante #41 intitulée *Les mathématiques de la musique* qui se trouve ici https://www.youtube.com/watch?v=cTYvCpLRwao.

David Louapre explique dans cette video pourquoi il y a 12 notes dans la gamme chromatique et pourquoi certaines notes s'accordent bien (les écouter jouées ensemble est agréable à l'oreille).

On retiendra en résumant que la raison essentielle à cela est que $2^{19} = 524288 \simeq 3^{12} = 531441$ et qu'il s'agit d'écarter les notes entre elles en "mettant en face" 12 facteurs 2 ou 4 et 12 facteurs 3, ce qu'on fait en utilisant pour passer d'une note à la suivante immédiate les fractions rationnelles $\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right\}$ en partant initialement d'une note *La*.

L'ensemble des dénominateurs comprend 19 facteurs 2, et l'ensemble des numérateurs comprend 12 facteurs 3 et les fractions rationnelles $\frac{3}{2}$ sont équitablement réparties au sein de l'ensemble des fractions $\frac{3}{4}$ plus nombreuses.

Le tableau ci-dessous est celui fourni dans la video : on passe d'une note (de sa fréquence) à celle de la note à sa droite en "passant à la quinte", en multipliant la fréquence par $\frac{3}{2}$ ou par $\frac{3}{4}$ (on a mis le multiplicateur qui permet de passer des nombres d'une colonne à ceux de la suivante en bas de cette colonne) ; on passe d'une note à celle au-dessous dans la même colonne en "passant à l'octave" (en multipliant la fréquence par 2).

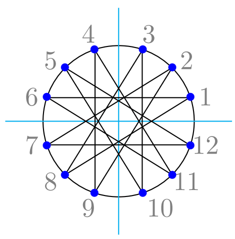
La	*Mi*	*Si*	*Fa#*	*Do#*	*Sol#*	*Ré#*	*La#*	*Fa*	*Do*	*Sol*	*Ré*	~~*La*~~
55	83	62	46	70	52	78	59	44	66	50	37	~~56~~
110	165	124	93	139	104	157	117	88	132	99	74	~~112~~
220	330	248	186	278	209	313	235	176	264	198	149	~~223~~
440	660	495	371	557	418	626	470	352	529	396	297	~~446~~
880	1320	990	743	1114	835	1253	940	705	1057	793	595	~~892~~
1760	2640	1980	1485	2228	1671	2506	1879	1410	2114	1586	1189	~~1784~~
3520	5280	3960	2970	4455	3341	5012	3759	2819	4229	3172	2379	~~3568~~
$\times\frac{3}{2}\nearrow$	$\times\frac{3}{4}\nearrow$	$\times\frac{3}{4}\nearrow$	$\times\frac{3}{2}\nearrow$	$\times\frac{3}{4}\nearrow$	$\times\frac{3}{2}\nearrow$	$\times\frac{3}{4}\nearrow$	$\times\frac{3}{4}\nearrow$	$\times\frac{3}{2}\nearrow$	$\times\frac{3}{4}\nearrow$	$\times\frac{3}{4}\nearrow$	$\times\frac{3}{2}\nearrow$	
8	3	10	5	12	7	2	9	4	11	6	1	

Permutons maintenant les colonnes de ce tableau de façon à remettre les notes dans l'ordre habituel d'une gamme ascendante. On passe cette fois-ci de chaque fréquence à la suivante selon l'ordre habituel de lecture (de gauche à droite et de haut en bas) en multipliant cette fréquence par $\sqrt[12]{2} \simeq 1.059463\ldots$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Ré	*Ré#*	*Mi*	*Fa*	*Fa#*	*Sol*	*Sol#*	*La*	*La#*	*Si*	*Do*	*Do#*	
74	78	83	88	93	99	104	110	117	124	132	139	$+4 \rightarrow +7$
149	157	165	176	186	198	209	220	235	248	264	278	$+8 \rightarrow +14$
297	313	330	352	371	396	418	440	470	495	529	557	$+16 \rightarrow +28$
595	626	660	705	743	793	835	880	940	990	1057	1114	$+31 \rightarrow +57$
1189	1253	1320	1410	1485	1586	1671	1760	1879	1980	2114	2228	$+64 \rightarrow +114$
2379	2506	2640	2819	2970	3172	3341	3520	3759	3960	4229	4455	$+127 \rightarrow +226$
4758	5012	5280	5638	5940	6344	6682	7040	7518	7920	8458	8910	$+254 \rightarrow +452$

On peut calculer approximativement par ligne les additions à effectuer pour passer d'une note à la suivante. On les a notées en fin de lignes en gris, de la plus petite somme à effectuer à la plus grande.

On peut enfin en ayant numéroté les colonnes de 1 à 12, noter ces nombres sur un cercle pour bien montrer la cyclicité et relier les notes successives par "passage à la quinte" (on a reporté ces nombres dans la dernière ligne du premier tableau également). Du fait de la cyclicité, ce dessin possède de multiples symétries.



Ce qu'il semble intéressant de faire, c'est de prolonger notre tableau de fréquences vers le domaine de l'inaudible, en réappliquant vers le haut du tableau les divisions par 2 des nombres des colonnes : moyennant le passage du discret au continu, on a un rapprochement des valeurs qu'il faut garder à l'esprit, en se rappelant cependant que toutes les fréquences fournies dans les 2 tableaux sont des valeurs entières arrondies les plus proches de réels.

Ré	*Ré#*	*Mi*	*Fa*	*Fa#*	*Sol*	*Sol#*	*La*	*La#*	*Si*	*Do*	*Do#*
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4
5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	9
9	10	10	11	12	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	25	26	28	29	31	33	35
37	39	42	44	47	50	52	55	59	62	66	70
74	78	83	88	93	99	104	110	117	124	132	139

On pourrait de la même manière fabriquer une gamme à 3 notes : on utilise le fait que $2^7 = 128 \simeq 5^3 = 125$. On doit mettre 7 facteurs 2 en face de 3 facteurs 5. On utilise les 3 fractions rationnelles $\left\{\frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{4}\right\}$.

Admettons qu'on parte du nombre 500. Multiplié par $\frac{5}{4}$, on obtient 625, qu'on multiplie par $\frac{5}{8}$ pour obtenir 391, qu'on multiplie quant à lui par $\frac{5}{4}$ pour obtenir 489. On est quasiment revenu au chiffre initial 500.

On remet les nombres dans l'ordre $391 \to 489 \to 500 \to 625$. On doit passer de l'un à l'autre par multiplication par $\sqrt[3]{2} \simeq 1.025992\ldots$ (la suite obtenue est $391, 493, 621$. Il manque un nombre de la séquence, le 500 qui a disparu...?).

On a également $7^5 \simeq 2^{14} \simeq 11^4$ et $13^4 \simeq 2^{15}$ mais les écarts sont de plus en plus grands : $2^{14} = 16384$, $7^5 = 16807$, $11^4 = 14641$ d'une part, et $2^{15} = 32768$ et $13^4 = 28561$ d'autre part, "presque" égaux.

$\sqrt[4]{2} \simeq 1.18921\ldots$
$\sqrt[14]{11} \simeq 1.18682\ldots$
$\sqrt[15]{13} \simeq 1.18649\ldots$

$\sqrt[5]{2} \simeq 1.1487\ldots$
$\sqrt[14]{7} \simeq 1.14912\ldots$