Infinité du nombre de couples de nombres premiers jumeaux (Denise Vella-Chemla 22.11.2015)

On associe à chaque nombre entier la suite de nombres indexée par l'infinité des nombres premiers successifs et qui contient les restes obtenus dans les divisions euclidiennes de ce nombre par les nombres premiers en question. Par exemple, au nombre 6 est associée la séquence $s_6 = 0, 0, 1, 6, 6, 6, \ldots$ et au nombre 30 est associée la séquence $s_{30} = 0, 0, 0, 2, 8, 4, 13, 11, 7, 1, 30, 30, 30, \ldots$

Par commodité, on notera à côté de chaque reste le diviseur permettant de l'obtenir. Ainsi, la séquence associée à 30 ci-dessus sera plutôt écrite : $s_6 = 0\ (2),\ 0\ (3),\ 1\ (5),\ 6\ (7),\ 6\ (11),\ 6\ (13),\ 6\ (17), \ldots$

On rappelle que deux nombres premiers jumeaux ont pour différence 2. Par exemple, 3 et 5 sont des nombres premiers jumeaux, 41 et 43 en sont également. Appelons "père de jumeaux" un nombre pair compris entre 2 nombres premiers jumeaux. 4, compris entre 3 et 5, est un père de jumeaux ; 42, compris entre 41 et 43, en est un autre. Tout père de jumeau (sauf 4) est un multiple de 6. En effet, les pairs de la forme $6k + 2$ (resp. $6k + 4$) ne peuvent être pères de jumeaux car le nombre qui les suit (resp. précède), étant un $6k + 3$, est divisible par 3 et ne peut donc être premier.

Considérons n_k un père de jumeau ; si on appelle p_k le plus grand nombre premier strictement inférieur à $n_k - 1$, la séquence d'entiers s_{n_k} associée à n_k est toujours de la forme suivante

$$s_{n_k} = \ 0\ (2),\ 0\ (3),\ x_1\ (5),\ x_2\ (7), \ldots,\ x_k\ (p_k),\ 1\ (n_k - 1),\ n_k\ (n_k + 1),\ n_k\ (p_j > n_k + 1), \ldots$$

avec $x_i \neq 1$ et $x_i \neq p_i - 1$ pour tout p_i tel que $5 \leqslant p_i < n_k - 1$ (on appellera ces deux conditions "contraintes pour pouvoir être un père de jumeau").

En effet, un nombre (en particulier un père de jumeau) a pour reste 1 quand on le divise par le nombre qui le précède. D'autre part, un nombre a pour reste lui-même dans toute division par un nombre qui lui est strictement supérieur.

Posons maintenant l'hypothèse qu'on a dénombré tous les pères de jumeaux sous prétexte qu'il en existerait un nombre fini. Notons les séquences de restes modulaires selon les nombres premiers successifs associées à chacun d'eux dans un tableau. p_{der} est le plus grand des aînés de couples de jumeaux recensés.

	2	3	5	7	$\ldots$	p_{i-1}	$p_i = n_i - 1$	$p_{i+1} = n_i + 1$	$p_{j>i+1}$	$\ldots$	p_{der}
n_1	0	0	$\boxed{x_1}$	α_2	$\ldots$	α_{i-1}	1	n_1	n_1	$\ldots$	n_1
n_2	0	0	β_1	$\boxed{x_2}$	$\ldots$	β_{i-1}	$\ldots$	$\ldots$	n_2	$\ldots$	n_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n_{i-1}	0	0	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\boxed{x_{i-1}}$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	n_{i-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n_{der}	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	1	$\boxed{n_{der}}$

Considérons alors les nombres dont la séquence de restes associée commence par les y_k (p_k), cette séquence étant fabriquée de la façon suivante à partir des séquences du tableau :

- si $x_k = 0$ alors $y_k = 2$;
- si $x_k = p_k - 2$ alors $y_k = 0$;
- si $x_k \neq 0$ et $x_k \neq p_k - 2$ alors $y_k = x_k + 1$.

Ces nombres sont solutions du système de congruences

$$[X_k \equiv 0\ (mod\ 6)] \wedge [X_k \equiv y_k\ (mod\ p_k), \forall p_k\ tel\ que\ 5 \leqslant p_k \leqslant p_{der}].$$

Le théorème des restes chinois assure qu'il existe une infinité de nombres satisfaisant le système de congruences ainsi modifié. Ces nombres parcourent toutes les possibilités combinatoires de valeurs des différents restes possibles selon les différents modules possibles à égales proportions.

Considérons le plus petit de ces nombres qui soit supérieur à p_{der} et qui vérifie les contraintes que nous avons appelées plus haut "contraintes pour pouvoir être un père de jumeaux" (non-congruence à 1 ou $p_k - 1$ selon tout module premier p_k). Ce nombre est un père de jumeaux (on l'a choisi pour ça).

Or il n'appartient pas à l'ensemble fini des pères de jumeaux déjà recensés dans le tableau[1]. Pourtant, son écriture fait de lui un père de jumeau. Cela est en contradiction avec le fait qu'on avait recensé dans le tableau *tous* les pères de jumeaux. L'ensemble des pères de jumeaux est donc infini.

[1] On a "perturbé la diagonale" pour l'obtenir, selon la méthode de Cantor.