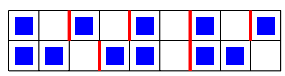
Disjonctions de mots booléens périodiques
Denise Vella-Chemla
11 décembre 2021

Problème :

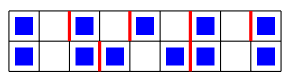
- on concatène p mots booléens tous identiques de longueur p, p premier impair, mots qui sont de la forme $1(0)^a(1)(0)^b$ avec $a+b=p-2, 0 \leqslant a \leqslant p-2,\ 0 \leqslant b \leqslant p-2$; a et b variant, on peut fabriquer $p-2$ chaînes booléennes différentes par cette concaténation ;
- on met en regard de cette chaîne de booléens[1] les chaînes obtenues par concaténation de mots de longueur chacun des nombres premiers inférieurs à p, ces mots étant eux aussi de la forme indiquée ci-dessus ;
- on met enfin en regard de toutes ces chaînes la chaîne $(10)^{(p^2+1)/2}$.

Il faudrait réussir à borner supérieurement le maximum des positions minima i pour lesquelles le i-ème caractère de toutes les chaînes ainsi fabriquées est 0.

Voici les 2 possibilités obtenues combinatoirement pour les nombres premiers 2 et 3.
Le maximum des minima est le nombre premier 7.

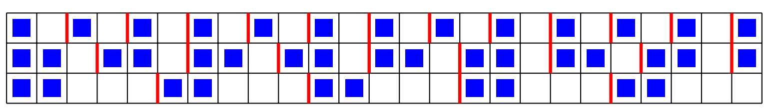


5

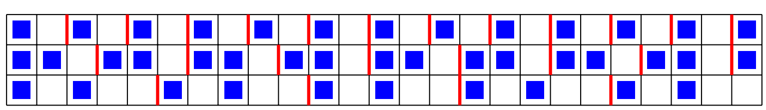


7

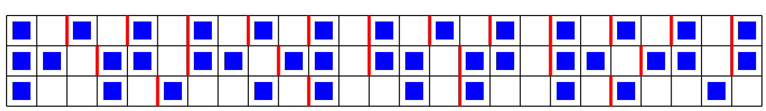
Voici les 8 possibilités obtenues combinatoirement pour les nombres premiers 2, 3 et 5.
Le maximum des minima est le nombre premier 17.



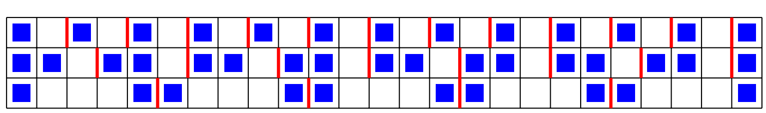
17



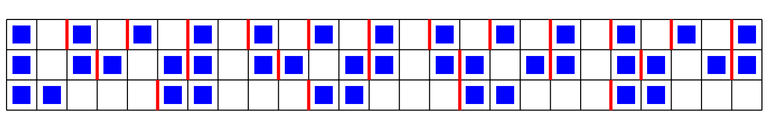
11



11

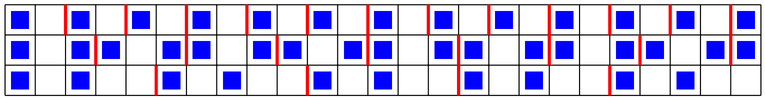


11

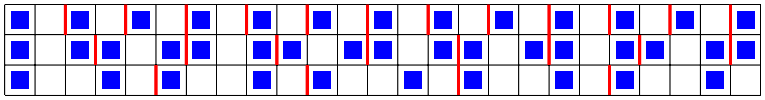


7

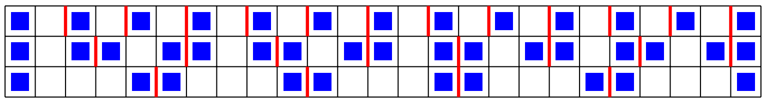
[1] au-dessus dans les grilles présentées comme exemples.



13



7



7

On ne fournit pas les 48 possibilités pour les nombres premiers 2, 3, 5 et 7 mais le maximum des minima est alors égal à 31.

Formule qui donne le max des min

On a obtenu comme résultats :

$$\begin{array}{ll}(2,3) & \mapsto 7 \\ (2,3,5) & \mapsto 17 \\ (2,3,5,7) & \mapsto 31\end{array}$$

On reconnaît la formule $2k^2 - 1$ avec k l'arité du k-uplet dont on cherche l'image, i.e. nombre de nombres considérés, auxquels sont associées les différentes chaînes booléennes périodiques.

Il faudrait vérifier que la formule est juste par programme en ajoutant d'autres impairs puis démontrer sa justesse.

Concernant la conjecture de Goldbach, le crible permettant de trouver les décomposants de Goldbach d'un nombre pair n qui sont supérieurs à $\sqrt{n}$ procède de la façon qu'on vient d'indiquer (il élimine, à la recherche des décomposants de Goldbach de n qui sont supérieurs à $\sqrt{n}$, i.e. deux nombres premiers dont n est la somme, la classe de congruence nulle et la classe de congruence de n selon tout nombre premier p inférieur ou égal à $\sqrt{n}$). Si p divise n, les deux classes sont confondues.

Si la formule de calcul du max des min était démontrée, on majorerait la valeur d'un décomposant de Goldbach potentiel par :

$$\begin{aligned} 2(\pi(\sqrt{n}))^2 - 1 &\simeq 2\left(\frac{\sqrt{n}}{\log \sqrt{n}}\right)^2 - 1 \\ &\simeq 2\frac{n}{\left(\frac{1}{2}\log n\right)^2} - 1 \\ &\simeq \frac{8n}{(\log n)^2} - 1 \end{aligned}$$

Et la conjecture serait démontrée car

$$\frac{8n}{(\log n)^2} - 1 \ll \frac{n}{2}.$$

Malheureusement, la formule est fausse : le prolongement jusqu'à 17 permet d'obtenir les valeurs ci-dessous si l'on considère tous les impairs :

$$\begin{array}{ll}
(2,3) & \mapsto 7 \\
(2,3,5) & \mapsto 17 \\
(2,3,5,7) & \mapsto 31 \\
(2,3,5,7,9) & \mapsto 61 \\
(2,3,5,7,9,11) & \mapsto 83 \\
(2,3,5,7,9,11,13) & \mapsto 163 \\
(2,3,5,7,9,11,13,15) & \mapsto 229 \\
(2,3,5,7,9,11,13,15,17) & \mapsto 337
\end{array}$$

On voit que le max des min croît trop vite en fonction de la taille du crible.

Le fait de considérer seulement les nombres premiers réduit assez les valeurs (voir ci-dessous) mais on ne sait de toute façon pas comment majorer le maximum des minima pour autant. De plus, la combinatoire explosive ne permet pas d'aller bien loin[2].

$$\begin{array}{ll}
(2,3) & \mapsto 7 \\
(2,3,5) & \mapsto 17 \\
(2,3,5,7) & \mapsto 31 \\
(2,3,5,7,9,11) & \mapsto 41 \\
(2,3,5,7,9,11,13) & \mapsto 73 \\
(2,3,5,7,9,11,13,15,17) & \mapsto 89 \\
(2,3,5,7,9,11,13,15,17,19) & \mapsto 151 \\
(2,3,5,7,9,11,13,15,17,19,23) & \mapsto 181
\end{array}$$

D'autre part, on ne sait pas comment les diviseurs de n font baisser le max des min (dans la mesure où à un diviseur est associé un mot de base qui ne contient qu'un seul 1 au lieu de 2).[3]

[2]Il faut attendre 251 secondes CPU pour obtenir la dernière valeur ci-dessous.
[3]Petit souvenir de Jipi : "Si ce que tu as à dire n'est pas plus beau que le silence, alors tais-toi."