Minorer le nombre de décomposants de Goldbach

Denise Vella-Chemla

16/3/13

La conjecture de Goldbach stipule que tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers.

Les décomposants de Goldbach d'un nombre pair peuvent être caractérisés ainsi : un entier $m_i \in]\sqrt{n}, n/2]$ qui n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_j < \sqrt{n}$ et dont le complémentaire à n qui est $n - m_i$ n'est pas non-plus divisible par p_j est un décomposant de Goldbach de n.
Notons DG_n l'ensemble contenant de tels entiers* et $dg(n) = |DG_n|$ le nombre de décompositions de Goldbach de n.
Considérons un entier $m_i \leqslant r$, non divisible, ainsi que son complémentaire à n, par tout nombre premier inférieur ou égal à r. Soit $dg(n, r)$ l'ensemble de ces nombres.
Dans la mesure où $dg(n, \sqrt{n})$ ne comptabilise pas les décompositions de Goldbach dont l'un des sommants serait $< \sqrt{n}$, $dg(n) \geqslant dg(n, \sqrt{n})$

Soit $r \geqslant 2$ entier.

- on note $idh(n, p_j)$ le nombre d'entiers impairs $m_i \leqslant \dfrac{n}{2}$ qui sont divisibles par le nombre premier p_j ;†
- on note $icdh(n, p_j)$ le nombre d'entiers impairs $m_i \leqslant \dfrac{n}{2}$ dont le complémentaire à n qui est $n - m_i$ est divisible par p_j‡.

On va exprimer $dg(n, r)$ en fonction des $idh(n, p_i)$ et des $icdh(n, p_i)$.

Pour estimer $dg(n, r)$, nous utilisons un outil emprunté à l'analyse combinatoire : le *principe d'inclusion-exclusion.*

Lemme : *Dans l'ensemble des entiers $\{1, 2, \ldots, n\}$, soient m relations $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_m$ portant sur ces entiers et $W(r)$ le nombre des entiers qui satisfont à r relations P_i. Alors, le nombre des entiers qui ne satisfont aucune des relations P_i est donné par la formule*

$$n + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k W(k)$$

Par le *principe d'inclusion-exclusion*, l'égalité $min(a, b) = a + b - max(a, b)$ se généralise en :

$$\begin{aligned} min(a_1, \ldots, a_r) = \;& a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_r \\ & -max(a_1, a_2) - \ldots - max(a_{r-1}, a_r) \\ & +max(a_1, a_2, a_3) + \ldots + max(a_{r-2}, a_{r-1}, a_r) \\ & - \ldots \\ & \pm max(a1, \ldots, a_r). \end{aligned}$$

Fournissons quelques valeurs de $icdh(n, p_j)$ qui nous permettront de l'estimer aisément :

- les valeurs de $icdh(n, 3)$ pour $n \geqslant 18$ sont $2, 1, 1, 2, 2, 2,\ 3, 2, 2, 3, 3, 3, \ldots$ tandis que les valeurs de $idh(n, 3)$ pour les mêmes n sont $2, 2, 2, 2, 2, 2,\ 3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots$;

*Les lettres DG sont acronymes de décomposant de Goldbach.
†Les lettres *id* sont acronymes de "impair divisible par".
‡Les lettres *icd* sont acronymes de "impair dont le complémentaire est divisible par".

- les valeurs de $icdh(n,5)$ pour $n \geqslant 30$ sont $2,1,1,1,1,2,2,2,2,2,\ 3,2,2,2,2,3,3,3,3,3,\ldots$ tandis que les valeurs de $idh(n,5)$ pour les mêmes n sont $2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,\ 3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,\ldots$.

On voit qu'on a toujours :

$$icdh(n,p_j) \leqslant idh(n,p_j)$$

avec

$$idh(n,p_j) = \left\lfloor \frac{n+2p_j}{4p_j} \right\rfloor$$

Appelons $dp(n)$ le nombre $\left\lfloor \frac{\frac{n}{2}-1}{2} \right\rfloor$[§].

Appelons $id(n,p_j)$ la fraction $\dfrac{idh(n,p_j)}{dp(n)}$.

L'application du *principe d'inclusion-exclusion* permet d'obtenir[¶] :

$$\begin{aligned}
dg(n,r) = dp(n)\Big(1 \quad & -\sum_{p\leqslant r} id(n,p) - \sum_{p\leqslant r} icd(n,p) \\
& + \sum_{p_1<p_2\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2) + \sum_{p_1<p_2\leqslant r} id(n,p_1)icd(n,p_2) \\
& \quad + \sum_{p_1<p_2\leqslant r} icd(n,p_1)id(n,p_2) + \sum_{p_1<p_2\leqslant r} icd(n,p_1)icd(n,p_2) \\
& - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2)id(n,p_3) - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2)icd(n,p_3) \\
& \quad - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} id(n,p_1)icd(n,p_2)id(n,p_3) - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} id(n,p_1)icd(n,p_2)icd(n,p_3) \\
& \quad - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} icd(n,p_1)id(n,p_2)id(n,p_3) - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} icd(n,p_1)id(n,p_2)icd(n,p_3) \\
& \quad - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} icd(n,p_1)icd(n,p_2)id(n,p_3) - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} icd(n,p_1)icd(n,p_2)icd(n,p_3) \\
& + \ldots\Big)
\end{aligned}$$

Serait-il possible de minorer $dg(n,r)$ en remplaçant dans cette formule tous les $icd(n,p_j)$ par des $id(n,p_j)$.

La formule devient :

$$\begin{aligned}
dg(n,r) \overset{?}{\geqslant} dp(n)\Big(1 \quad & -\sum_{p\leqslant r} id(n,p) - \sum_{p\leqslant r} id(n,p) \\
& + \sum_{p_1<p_2\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2) + \sum_{p_1<p_2\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2) \\
& \quad + \sum_{p_1<p_2\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2) + \sum_{p_1<p_2\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2) \\
& - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2)id(n,p_3) - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2)id(n,p_3) \\
& \quad - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2)id(n,p_3) - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2)id(n,p_3) \\
& \quad - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2)id(n,p_3) - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2)id(n,p_3) \\
& \quad - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2)id(n,p_3) - \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2)id(n,p_3) \\
& + \ldots\Big)
\end{aligned}$$

[§] Les lettres dp sont acronymes de décomposants potentiels, $dp(n)$ est le nombre d'impairs compris entre 3 et $n/2$.

[¶] Dans les grilles, multiplier un $id(n,p_i)$ par un $id(n,p_j)$ correspond au fait qu'une case grise d'une ligne se trouve dans la même colonne qu'une case grise d'une autre ligne, multiplier un $icd(n,p_i)$ par un $id(n,p_j)$ correspond au fait qu'une case bleue d'une ligne se trouve dans la même colonne qu'une case grise d'une autre ligne, tandis que multiplier un $icd(n,p_i)$ par un $icd(n,p_j)$ correspond au fait qu'une case bleue d'une ligne se trouve dans la même colonne qu'une case bleue d'une autre ligne.

$$\begin{aligned} dg(n,r) \quad \overset{?}{\geqslant} \quad dp(n)\Big(1 \quad & -2\sum_{p\leqslant r} id(n,p) \\ & +4 \sum_{p_1<p_2\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2) \\ & -8 \sum_{p_1<p_2<p_3\leqslant r} id(n,p_1)id(n,p_2)id(n,p_3) \\ & +\dots\Big) \end{aligned}$$

Cette dernière formule se réécrit en :

$$dg(n,r) \quad \overset{?}{\geqslant} \quad dp(n) \prod_{p_j\leqslant r} \left(1-\frac{2\ idh(n,p_j)}{dp(n)}\right)$$

Cependant, très rapidement, (à partir de $n = 992$), le nombre obtenu par cette formule est supérieur au nombre de décompositions de Goldbach.

Les idées de minoration fournies ci-après, bien que semblant effectives par tests informatiques, ne sont pas satisfaisantes parce qu'elles ne découlent pas suffisamment de la méthode qui a été présentée ci-dessus.

Fournissons cependant de ces minorations une justification heuristique : dans la mesure où l'application du principe d'inclusion-exclusion semble correspondre au fait d'éliminer de l'ensemble des nombres premiers ceux appartenant à une classe de congruence particulière pour chaque module premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ (en fait, cela n'est le cas que pour les modules ne divisant pas n) , il semble naturel de minorer $dg(n,r)$, et donc $dg(n)$ de la façon suivante :

$$dg(n) \geqslant dg(n,\sqrt{n}) \quad \overset{?}{\geqslant} (\pi(n/2)-\pi(\sqrt{n})) \prod_{p\leqslant\sqrt{n}} \left(1-\frac{1}{p}\right)$$

L'utilisation de la minoration de Tchebychev ($\pi(x) > \dfrac{x}{2ln\ x}$) dans l'inégalité précédente devrait permettre que soit toujours vérifiée :

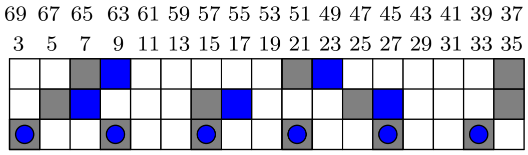
$$dg(n) \overset{?}{\geqslant} \left(\frac{n\ ln\ 2}{2(ln\ n + ln\ 0.5)} - \frac{2\sqrt{n}\ ln\ 2}{ln\ n}\right) \prod_{p\leqslant\sqrt{n}, p\nmid n} \left(1-\frac{1}{p}\right)$$

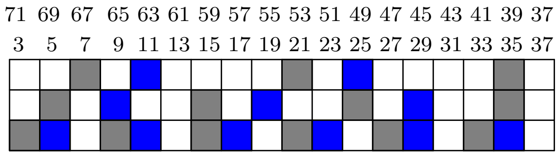
On vérifie cette minoration par programme pour tout $n \leqslant 2.10^8$. On vérifie également par programme dans les mêmes limites que :

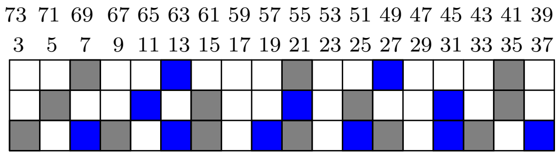
$$dg(n) \geqslant \frac{n}{4ln^2 n}$$

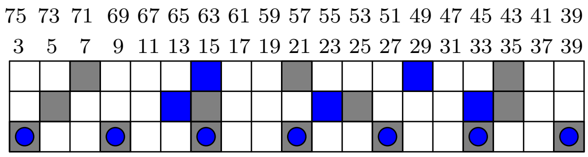
Annexe : valeurs des $id(n,p_i)$ et $icd(n,p_i)$ pour n compris entre 24 et 100

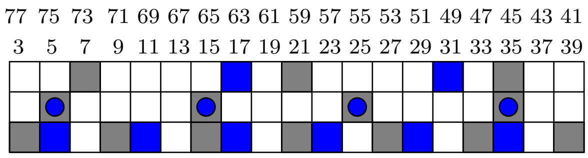
n	$dp(n)$	$idh(n,3)$	$icdh(n,3)$	$idh(n,5)$	$icdh(n,5)$	$idh(n,7)$	$icdh(n,7)$
24	5	2	2	–	–	–	–
26	6	2	2	1	1	–	–
28	6	2	2	1	1	–	–
30	7	3	3	2	2	–	–
32	7	3	2	2	1	–	–
34	8	3	2	2	1	–	–
36	8	3	3	2	1	–	–
38	9	3	3	2	1	–	–
40	9	3	3	2	2	–	–
42	10	4	4	2	2	–	–
44	10	4	3	2	2	–	–
46	11	4	3	2	2	–	–
48	11	4	4	2	2	–	–
50	12	4	4	3	3	2	1
52	12	4	4	3	2	2	1
54	13	5	5	3	2	2	1
56	13	5	4	3	2	2	2
58	14	5	4	3	2	2	2
60	14	5	5	3	3	2	2
62	15	5	5	3	3	2	2
64	15	5	5	3	3	2	2
66	16	6	6	3	3	2	2
68	16	6	5	3	3	2	2
70	17	6	5	4	4	3	3
72	17	6	6	4	3	3	2
74	18	6	6	4	3	3	2
76	18	6	6	4	3	3	2
78	19	7	7	4	3	3	2
80	19	7	6	4	4	3	2
82	20	7	6	4	4	3	2
84	20	7	7	4	4	3	3
86	21	7	7	4	4	3	3
88	21	7	7	4	4	3	3
90	22	8	8	5	5	3	3
92	22	8	7	5	4	3	3
94	23	8	7	5	4	3	3
96	23	8	8	5	4	3	3
98	24	8	8	5	4	4	4
100	24	8	8	5	5	4	3

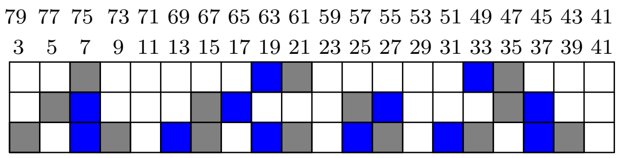

69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35

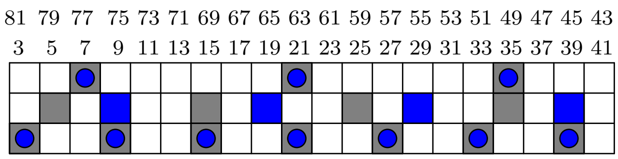

71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37

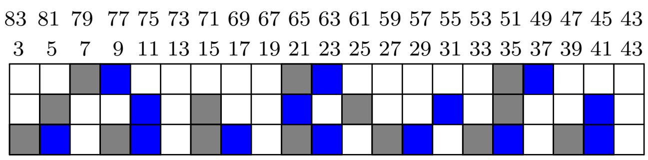

73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37

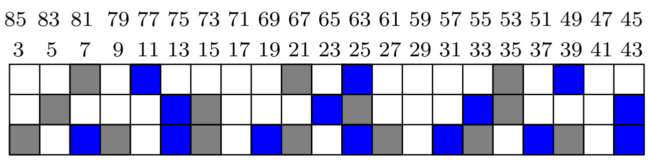

75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39

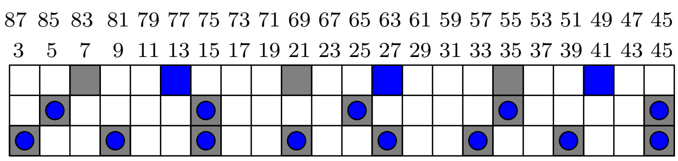

77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39


79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41


81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41


83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43


85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43


87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45