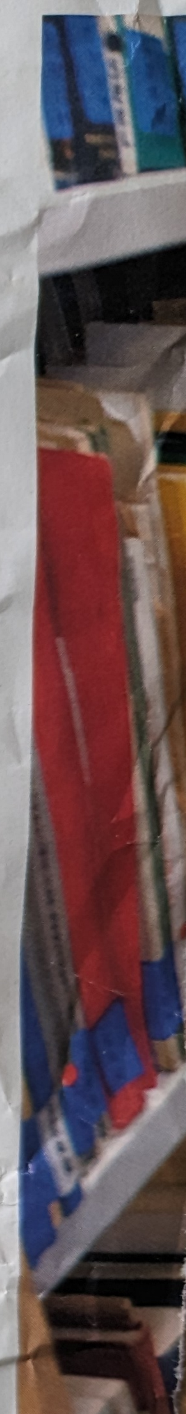
Alain Connes

Une réalité mathématique archaïque précède les concepts

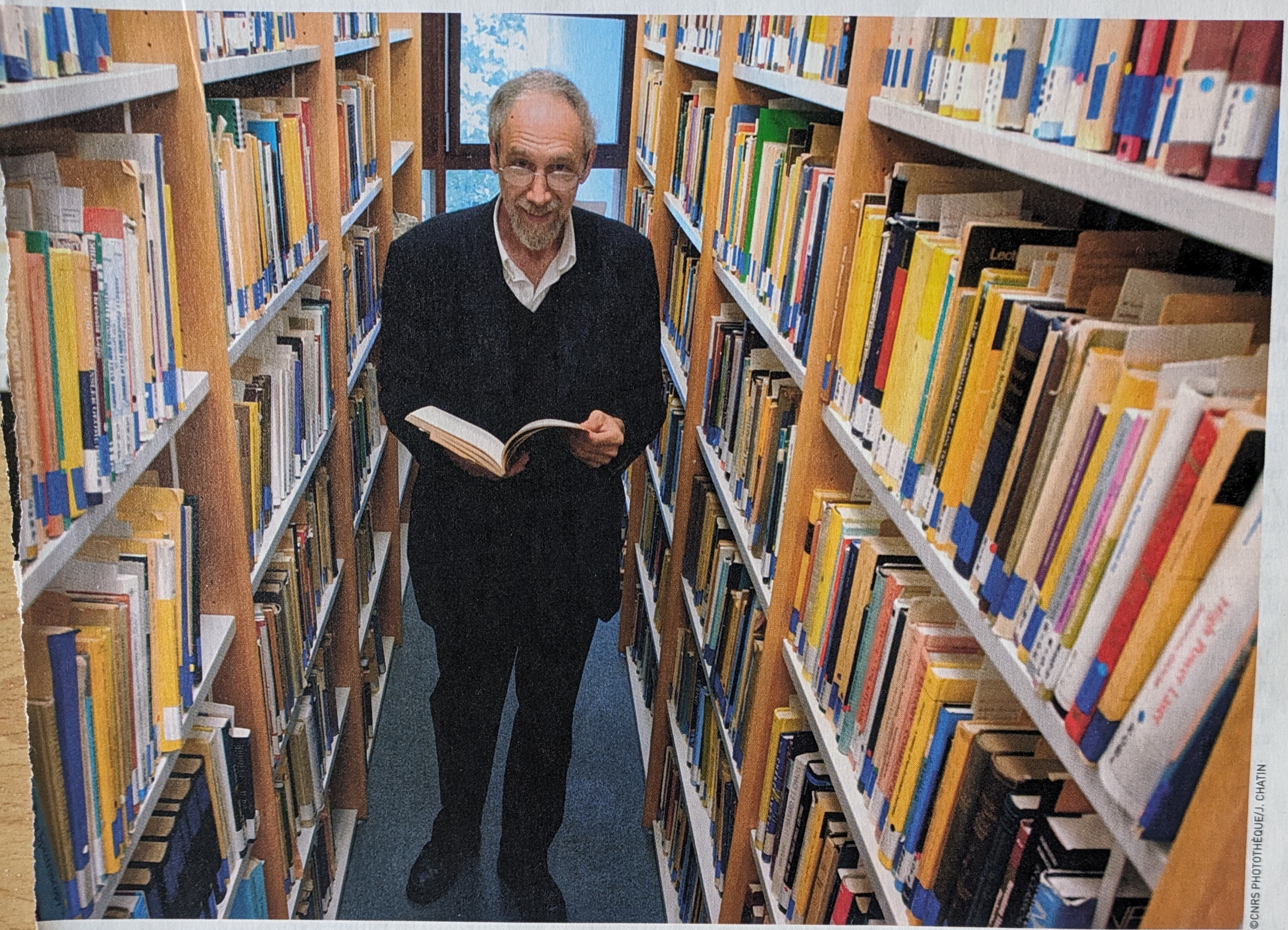


« La plupart des énoncés vrais sont non démontrables »

Bien que tous les mathématiciens ne le reconnaissent pas, il existe une « réalité mathématique archaïque ». Comme la réalité du monde extérieur, celle-ci est a priori non organisée, mais résiste à l'exploration et révèle une cohérence. Non matérielle, elle se situe hors de l'espace-temps. C'est le credo d'Alain Connes, qui nous entraîne aussi dans une réflexion sur le sens profond du théorème de Gödel.

LA RECHERCHE. Dans votre livre *Triangle de pensées*, André Lichnerowicz dit : « *Les mathématiciens ont appris que l'être des choses sur lesquelles ils raisonnent n'était d'aucune importance pour eux.* » Il dit aussi : « *Dans les mathématiques, l'Être avec un grand E est mis entre parenthèses.* » Vous vous insurgez contre ce point de vue. Pourquoi ?

ALAIN CONNES. Quelle est la nature de la réalité mathématique ? En simplifiant beaucoup, cette question génère deux types d'attitude. Celle de Lichnerowicz est en gros la position formaliste, ou structuraliste. Elle consiste à considérer les mathématiques comme un système de déductions logiques obtenues à l'intérieur d'un langage, à partir d'axiomes. Cette position conduit d'une certaine manière à nier le caractère ontologique* de la réalité mathématique. La question de la significa- tion des objets mathématiques est évacuée. À l'opposé mon attitude et celle d'autres mathématiciens consist



©CNRS PHOTOTHÈQUE/J. CHATIN

Alain Connes, né en 1947, professeur à l'IHES, occupe depuis 1984 la chaire d'analyse et de géométrie au Collège de France. Ses recherches portent notamment sur la géométrie non commutative. Pour ses travaux, il a reçu à 35 ans la médaille Fields (1992), le prix de la fondation Clay (2000), le prix Crafoord (2001) et la médaille d'or du CNRS (2004). Certains de ses derniers articles traitent de la théorie de Yang et Mills, au centre de l'un des sept problèmes de la fondation Clay. Alain Connes a publié en 2000 *Triangle de pensées* avec André Lichnerowicz et Marcel-Paul Schützenberger (Éditions Odile Jacob).

à dire qu'il existe une réalité mathématique qui précède l'élaboration des concepts.

Vous soutenez qu'il existe une « *réalité mathématique archaïque* ». qu'entendez-vous par là ?

A. C. Je fais une distinction essentielle entre l'objet de l'étude, par exemple la suite des nombres premiers, et les concepts que l'esprit humain élabore pour comprendre cette suite. La réalité mathématique archaïque, c'est l'objet de l'étude. De même que la réalité extérieure perçue par les sens, elle est *a priori* inorganisée. Elle se distingue radicalement des concepts que l'esprit humain lentement élabore pour la comprendre, pour voir ce qu'elle a d'organisé.

En quoi cette réalité archaïque résiste-t-elle au formalisme ?

A. C. Les structuralistes n'ont jamais vraiment digéré le ▷

théorème de Gödel*. Pour eux, ce théorème dit simplement que dans un système donné il y aura toujours une proposition indécidable, dont on ne peut pas savoir si elle est vraie ou fausse. Or le théorème de Gödel est bien plus méchant que cela. Il dit qu'il y a aura toujours une proposition vraie qui ne sera pas démontrable dans le système. Ce qui est beaucoup plus dérangeant.

Lichnerowicz dit : « *Je ne sais pas ce qu'est une proposition vraie non démontrable.* » Apparemment, vous n'êtes pas de cet avis ?

A. C. C'est un point relativement délicat. On n'a aucune chance de comprendre le sens de cette assertion tant qu'on ne fait pas certaines distinctions de nature qualitative entre les propositions mathématiques. Il faut ainsi distinguer entre une proposition de nature universelle et une proposition de nature existentielle. Tenons-nous en à l'arithmétique. Voici un exemple de proposition universelle : tout nombre entier n pair plus grand que 6 s'écrit comme somme de deux nombres premiers. Pourquoi est-ce une proposition de nature universelle ? Parce que je dis « *quel que soit n* », après quoi je donne un énoncé qui est décidable : si je prends le nombre 100, on va pouvoir décider si oui ou non il est la somme de deux nombres premiers. Or un théorème fondamental de la logique est que, si une proposition universelle est démontrable, elle est vraie. Mais la réciproque est fausse. Il existe des propositions universelles qui sont vraies mais qui ne sont pas démontrables. Pour le comprendre, faisons une analogie avec la réalité d'un tribunal. D'une certaine manière, quand on fait des raisonnements logiques à l'intérieur d'un système d'axiomes, c'est comme si l'on était au tribunal. Il y a des pièces à conviction : ce sont les axiomes. La déduction logique s'opère à partir de ces axiomes. Si certains faits sont démontrables à l'intérieur du tribunal, ils sont automatiquement vrais. Mais l'inverse n'est pas vrai. Il se peut qu'un fait soit vrai sans être démontrable à l'intérieur du tribunal.

Donnez un exemple de proposition mathématique existentielle.

A. C. Il existe un entier n qui est pair et n'est pas la somme de deux nombres premiers. C'est l'inverse d'une proposition universelle. Or un théorème dit : si une proposition existentielle est vraie, elle est démontrable. Mais la réciproque est fausse. C'est la première chose que nous apprend le théorème de Gödel : il faut distinguer entre ce qui est démontrable au tribunal, dans le système déductif dans lequel on travaille, et la réalité.

Pouvez-vous donner un exemple parlant de proposition vraie non démontrable ?

A. C. La fable du lièvre et de la tortue. Nous nous plaçons à l'intérieur d'un certain système d'axiomes, en l'occurrence les axiomes de Peano, ceux qui gouvernent l'arithmétique la plus simple. On prend un nombre au hasard, par exemple 9, et on l'écrit en base 2, c'est-à-dire en n'utilisant que des puissances de 2. Ainsi, 9 c'est 8 + 1, or 8, c'est 2^3, donc $9 = 2^3 + 1$. On écrit aussi les 3 en base 2 : soit 2 + 1. Donc $2^3 + 1$ s'écrit $2^{(2+1)} + 1$. Le lièvre arrive, et remplace tous les 2 par des 3. $2^{(2+1)} + 1$ devient $3^{(3+1)} + 1$, soit 81 + 1. Le nombre obtenu est beaucoup plus grand, on a l'impression que le lièvre fait des bonds immenses. Puis la tortue arrive, et soustrait 1. Cela donne 81. Le lièvre revient, réécrit le nombre obtenu en base 3, donc $3^{(3+1)}$, et remplace tous les 3 par des 4. Cela donne $4^{(4+1)}$. La tortue arrive, elle soustrait 1. Le lièvre revient, réécrit le résultat en base 4, et remplace tous les 4 par des 5. Le résultat, vraiment étonnant, est que, quel que soit le nombre n, c'est la tortue qui gagne : bien qu'elle ne fasse que soustraire 1 chaque fois, au bout d'un nombre fini d'étapes on obtient zéro. Or cet énoncé est vrai, mais n'est pas démontrable dans l'axiomatique de Peano. Pour expliquer pourquoi, il faut sortir de l'axiomatique de Peano ; sortir de l'enceinte du tribunal. Ce qu'il faut bien comprendre, c'est qu'un tel énoncé n'a rien d'exceptionnel. Au contraire, on sait maintenant que la plupart des énoncés vrais sont non démontrables.

Les énoncés qui sont démontrables dans un système formel sont comme les suites dont la complexité est réduite.

Voilà une forte assertion ! Qu'est-ce qui permet de l'avancer ?

A. C. On peut l'expliquer par une analogie avec la notion de complexité d'un système. Voici un exemple permettant de saisir ce que signifie la complexité d'un système.
Je veux transmettre en Australie deux types de renseignement : 1) les heures de lever et de coucher du soleil à Paris depuis dix ans ; 2) les résultats du Loto à Paris tous les jours depuis dix ans. Pour transmettre le premier résultat, il me suffit d'une petite formule avec les sinus et les cosinus. Tandis que pour transmettre les résultats du Loto depuis dix ans, il n'y a pas d'autre moyen que d'envoyer la liste. Personne ne trouvera jamais de formule pour simplifier la tâche. La complexité d'une information, c'est la longueur en bits du plus petit programme informatique qui la génère. Une suite comme celle des heures de lever et de coucher du soleil est plus simple qu'une suite comme celle des résultats du Loto. Or si l'on considère l'ensemble de toutes les suites ayant un nombre donné de chiffres, on peut compter le nombre de ces suites et l'on démontre que les suites de complexité maximale font presque la totalité de l'ensemble. Le nombre de suites ayant une expression plus simple est négligeable.

*Le mot **ontologique** vient du grec *ontos*, « être » : qui concerne l'être des choses.

* Le logicien autrichien **Kurt Gödel** a démontré son célèbre théorème en 1931.

ALAIN CONNES lors de la remise de la médaille d'or du CNRS en 2004.

©HALEY/SIPA

Quel est le rapport avec une proposition vraie non démontrable ?

A. C. On s'aperçoit que les énoncés qui sont démontrables dans un système formel sont comme les suites dont la complexité est réduite.
Du coup, la plupart des énoncés vrais ne sont pas démontrables. Les propositions démontrables sont une conséquence relativement courte du système d'axiomes que l'on a au départ.

Revenons à la notion de réalité mathématique archaïque. Pourrait-on utiliser un autre mot qu'*« archaïque »* ?

A. C. Oui, on pourrait par exemple parler de réalité mathématique primitive. L'essentiel est de comprendre qu'elle précède l'exploration qu'on va en faire — un peu comme la réalité extérieure. C'est la position platonicienne, renouvelée par le théorème de Gödel.
À partir du moment où l'on comprend que la position structuraliste, formaliste, n'est pas tenable, il faut bien qu'on se rattache à une certaine réalité. La meilleure illustration de cette réalité, c'est l'arithmétique. Or un point saillant de la démonstration de Gödel est la possibilité de projeter tout raisonnement sur l'arithmétique.

Comment identifier les objets qui appartiennent à la réalité mathématique archaïque ?

A. C. Chaque fois qu'on est devant une notion mathématique, il faut essayer d'analyser la portion qui fait référence à la réalité mathématique archaïque et la portion qui est conceptuelle. À ce sujet, il importe de saisir une autre distinction de nature qualitative, que je ne fais qu'évoquer dans le livre : l'inductif et le projectif. La démarche inductive laisse à chaque objet sa spécificité, son caractère unique ; la démarche projective opère sur des objets regroupés par classes. On le voit dans le langage courant. Le mot *chaise* désigne une classe, c'est un mot projectif ; *Avignon* désigne un lieu, c'est un mot inductif. Mais comme une notion mathématique, un mot n'est jamais entièrement inductif ou entièrement projectif, il est un peu l'un et un peu l'autre. De ce point de vue, la réalité mathématique archaïque apparaît de manière inductive, alors que les concepts, eux, découpent des classes. L'idéal se produit lorsqu'on a tellement bien découpé les classes qu'on se trouve devant un objet unique… que l'on connaît de manière à la fois inductive et projective.

Y a-t-il des objets qui existent seulement de manière projective ?

A. C. Les ultrafiltres*, par exemple. Jamais personne ne sera capable d'isoler un ultrafiltre. On sait qu'on ne peut nommer que des classes d'ultrafiltres. Lebesgue, qui a élaboré la théorie des fonctions mesurables, savait bien qu'on ne pourra jamais nommer une fonction non mesurable. C'est un objet chimérique, comme les ultrafiltres.

En quoi la réalité mathématique archaïque se distingue-t-elle de la réalité non mathématique ?

A. C. Quoique non fondée principalement sur les cinq sens, la perception que nous avons de la réalité mathématique fait que celle-ci manifeste une résistance et une cohérence comparables à celles de la réalité extérieure. La différence essentielle, fondamentale, c'est qu'elle échappe à toute forme de localisation dans l'espace ou dans le temps. Si bien que lorsqu'on en dévoile ne serait-ce qu'une infime partie, on éprouve un sentiment d'éternité. Tous les mathématiciens le savent.

Qu'y a-t-il de moins objectif qu'un sentiment d'éternité ?

A. C. Il y a là pourtant quelque chose d'objectif : une réalité non périssable. Une réalité dotée d'un aussi grand pouvoir de résistance que la réalité extérieure. Laquelle résiste aussi bien qu'un mur. Alors comment perçoit-on cette réalité ? Sans doute avec un sens distinct des autres sens, et plus élaboré. Nous sommes en présence d'une réalité et nous disposons d'un mode de perception de cette réalité.

Mais cette perception n'est-elle pas plutôt de l'ordre de l'intellect ?

A. C. Toute perception passe par l'intellect. Ce qui me fait dire aussi qu'il existe un sens particulier au service ▷

*Dans la théorie des modèles, un **ultrafiltre** sur un ensemble non vide I est défini comme un ensemble D de sous-ensembles de I tel que
1) l'ensemble vide n'appartient pas à D ;
2) si A, B sont en D, leur intersection l'est aussi ;
3) si A est un sous-ensemble de B, et si A est en D, alors B est en D ;
4) pour tout sous-ensemble A de I, soit A est en D soit I moins A est en D.

Je suis prêt à parier qu'on s'apercevra un jour que la réalité matérielle se situe en fait à l'intérieur de la réalité mathématique.

de cette perception, c'est qu'il y a des mathématiciens qui, sans avoir reçu une éducation sophistiquée, ont une perception extraordinairement aiguë de cette réalité. Lichnerowicz lui-même fait observer que le mathématicien en action exerce un tel sens.
Il concède : « *Si un mathématicien travaille, il réfléchit à un certain champ où, là, il y a des êtres mathématiques ; il finit par jouer avec eux, suffisamment pour les rendre familiers.* » Tous les mathématiciens sont d'accord là-dessus. C'est lorsqu'on leur demande de réfléchir à ce qu'ils font vraiment que les uns se disent formalistes, d'autres platoniciens.

En quoi les mathématiques ne sont-elles pas une discipline scientifique comme les autres ?
A. C. Les autres sciences s'intéressent à l'organisation de la matière à diverses échelles. Comme les autres sciences, les mathématiques s'intéressent à l'organisation d'une réalité, sauf que celle-ci n'est pas matérielle.

Ce n'est pas une réalité matérielle, mais elle résiste comme la réalité extérieure, il y a ce mur auquel vous vous heurtez...
A. C. Oui, bien sûr. De plus, cette réalité est une source inépuisable d'informations — comme le prouve le théorème de Gödel. De ce point de vue, je crois que la réalité mathématique nous réserve encore de grandes surprises. Je suis prêt à parier qu'on s'apercevra un jour que la réalité matérielle se situe en fait à l'intérieur de la réalité mathématique.

Voilà une proposition ambitieuse !
A. C. Oui. Je l'ai déjà plus ou moins évoquée à la fin de mon livre avec Changeux[1]. Je crois qu'un des critères d'une vraie compréhension du monde physique extérieur, c'est notre capacité de comprendre sa position à l'intérieur du monde mathématique. On en est loin encore. Mais les indices abondent. Ainsi le tableau périodique des éléments. Il a été déduit par Mendeleïev à partir des résultats expérimentaux de la chimie, mais quand on comprend qu'il résulte en fait de mathématiques extrêmement simples, c'est impressionnant...

Là vous retournez aux racines du platonisme le plus profond !
A. C. Tout à fait.

Voulez-vous dire que le monde des idéaux mathématiques précède la réalité physique ?
A. C. Absolument. C'est une position extrême.

Qu'est-ce qui vous fait penser que cette idée va faire son chemin ?
A. C. On ne cesse de progresser vers une simplification de la compréhension du monde extérieur et des lois de la physique. Je sais bien qu'il ne faut pas non plus être trop simplificateur, que des lois très simples comme les équations qui gouvernent le modèle standard du monde physique peuvent avoir des conséquences extrêmement difficiles à appréhender. Et que l'on ne peut rendre compte de la complexité des phénomènes observables qu'au prix de calculs pratiquement infaisables. Mais fondamentalement je pense qu'on ne peut pas du tout exclure la possibilité qu'en fin de compte les lois fondamentales soient incroyablement simples, bien plus simples que tout ce qu'on peut imaginer aujourd'hui.

Des lois très simples..., ce qui n'est pas incompatible avec l'idée du caractère inépuisable des deux types de réalité, physique et mathématique ?
A. C. Le fait que tout repose en fin de compte sur une structure très simple n'est pas incompatible avec le caractère inépuisable de l'information contenue tant dans la physique que dans les mathématiques.

Une structure très simple, de nature mathématique ?
A. C. Oui. Les grandes découvertes de la physique en témoignent. Les lois de Newton, la relativité expliquent des phénomènes extrêmement complexes avec des lois d'une simplicité désarmante. Des lois de nature mathématique, qui exploitent des outils trouvés par les mathématiciens.

Dans votre livre *Triangle de pensées*, Schützenberger dit que pour lui, le problème de l'efficacité des mathématiques est un problème non résolu. Êtes-vous moins de cet avis ?
A. C. Ce qui est vraiment surprenant c'est que l'on arrive à comprendre des pans entiers de la réalité extérieure grâce aux mathématiques développées pour leur logique interne. Un des exemples les plus merveilleux est la découverte de la géométrie non euclidienne, qui au départ était une réponse au problème posé par l'axiome de l'unique parallèle d'Euclide. Cette géométrie qui à l'origine n'était qu'un contre-exemple un peu ésotérique a engendré à travers la géométrie de Riemann, puis la relativité générale d'Einstein le meilleur modèle actuel de l'espace-temps. Lequel est testé avec une précision extraordinaire dans les pulsars binaires et a permis d'affiner le fonctionnement du système de positionnement GPS. Ce passage de la réflexion logique autour des axiomes d'Euclide à une application pratique est typique de la subtilité et de la richesse des relations entre physique et mathématiques. ■

Propos recueillis par Olivier Postel-Vinay

[1] Jean-Pierre Changeux et Alain Connes, *Matière à pensées*, Odile Jacob, rééd. 2000.

Cet entretien a été publié une première fois dans le n° 332 de *La Recherche*.