L'incroyable efficacité des mathématiques

Dominique Lambert

En 1905, peu après avoir écrit l'article fondateur de la relativité restreinte, une conséquence de son travail précédent vient à l'esprit d'Albert Einstein : la masse serait une mesure de l'énergie contenue dans un corps. "La chose est plaisante et séduisante à considérer ; mais Dieu n'est-il pas en train d'en rire et me mène-t-il par le bout du nez ?", écrit-il. Quelques semaines plus tard, Einstein publie la démonstration d'une formule au destin imprévisible : $E = mc^2$. Dieu y a bien sûr laissé la place aux mathématiques. Au-delà de cet exemple, comment renouveler l'examen de la vieille question de l'efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature ?

Les succès de la physique classique, puis de la relativité et de la mécanique quantique, ont mis en pleine lumière la fécondité des mathématiques. Aujourd'hui, cette efficacité s'étend progressivement à un grand nombre de disciplines relevant d'autres sciences de la nature ou même des sciences humaines. En biologie, par exemple, on parvient à expliquer et à classer les formes qui apparaissent sur les ailes des papillons ou sur le pelage des mammifères en utilisant des équations aux dérivées partielles. En économie, les divers types d'équilibre des marchés se caractérisent par des méthodes sophistiquées issues de la théorie des systèmes dynamiques, de la théorie des jeux ou de la topologie. Comment rendre compte de ces nouveaux succès ?

En 1960, le physicien Eugene Wigner avait publié un célèbre article au titre provocateur : "La déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles". Si l'efficacité des mathématiques pose aux scientifiques et aux philosophes des sciences un problème profond, est-il vraiment judicieux, comme l'indique l'adjectif choisi par E. Wigner, de le transformer en un mystère complet ? Voire de le résoudre par une position philosophique a priori, sans avoir exploré toutes les pistes que la raison nous propose ?

Avant de nous engager sur l'une de ces pistes, attardons-nous sur cette notion d'efficacité. Comment l'appliquer aux mathématiques ? Elle signifie en premier lieu une "capacité prédictive" : les mathématiques sont efficaces dans la mesure où elles suggèrent la réalisation d'expérimentations ou d'observations, et fournissent des résultats numériques qui, à une certaine marge d'erreur près, rejoignent les résultats empiriques issus de ces expérimentations ou observations. La prédiction, par la relativité générale, de la courbure des rayons lumineux au voisinage d'une étoile est un bel exemple de cette sorte d'efficacité.

Mais l'efficacité peut être seulement liée à une "capacité rétrodictive" : dans ce sens, les mathématiques sont efficaces parce qu'elles reproduisent des résultats déjà connus en les organisant dans un formalisme concis. Les mathématiques fournissent ici des outils servant seulement à "sauver les phénomènes". L'illustration la plus éclairante de cette capacité se manifeste sans doute dans les

Magazine La Recherche n° 316, Janvier 1999.

techniques de moindres carrés, grâce auxquelles on recherche des courbes passant au plus près des points expérimentaux. Pourtant, la prédiction, et encore moins la rétrodiction, ne suffisent pas à donner une caractérisation assez fine des formalismes mathématiques que l'on voudrait qualifier d'efficaces. En effet, l'efficacité signifie aussi une "capacité explicative" et, selon le mot très juste de René Thom, "Prédire n'est pas expliquer". Pour qu'une théorie mathématique soit vraiment efficace en science, il faut qu'elle rende manifeste une explication des phénomènes, c'est-à-dire une suite d'inférences reliant leur description à des principes reconnus comme fondamentaux. La théorie de jauge qui décrit l'interaction faible en physique des particules, par exemple, n'est pas efficace seulement parce qu'elle reproduit certains résultats obtenus à la sortie des détecteurs. Elle l'est aussi parce qu'elle fournit une explication de l'existence même de cette interaction en la reliant à celle d'une symétrie locale. Remarquons que cette capacité explicative va de pair avec une capacité unificatrice : expliquer c'est aussi ramener la diversité des phénomènes à un très petit nombre de principes.

L'efficacité des mathématiques se limite-t-elle aux trois caractéristiques que nous venons d'évoquer ? Pas nécessairement. En effet, comment comprendre qu'un certain nombre de formalismes soient, à un moment donné, reconnus efficaces sans être immédiatement prédictifs ? Ils le sont alors parce qu'ils suggèrent des concepts nouveaux ou des stratégies inédites pour résoudre des problèmes difficiles. En 1918, la théorie élaborée par Hermann Weyl tentait par exemple d'unifier la gravitation et l'électromagnétisme en étendant la relativité générale : elle ne fut pas directement efficace au niveau des prédictions expérimentales, mais elle ouvrit la voie à ce qui devait devenir les théories de jauge, pierres angulaires de la physique des particules actuelle. Aujourd'hui, les prédictions issues du formalisme mathématique de la théorie des cordes ou de la géométrie non commutative ne sont pas (encore ?) empiriquement vérifiées. Cependant, on ne peut contester qu'il s'agisse là de domaines engendrant des idées ou des concepts potentiellement riches. Une théorie mathématique efficace en science est donc aussi, à un degré ou à un autre, un formalisme doué d'une sorte de "générativité conceptuelle ?".

En résumé, une théorie mathématique entièrement efficace est un formalisme doué de capacités prédictives, explicatives et génératives, autrement dit un langage permettant de décrire, d'expliquer et de maîtriser les phénomènes. Après ce détour par les définitions, nous voici confrontés de nouveau à notre question fondamentale : comment un ensemble de symboles abstraits, articulés par un jeu de règles précises, issu très souvent d'une activité purement intellectuelle, peut-il posséder de telles capacités d'adaptation au monde empirique, au monde des résultats expérimentaux ? Une telle question ne date évidemment pas d'aujourd'hui.

Jean Dieudonné introduit la distinction entre les "mathématiques vides" et les "mathématiques significatives".

Depuis l'aube de l'histoire des mathématiques, tous les grands systèmes philosophiques ont tenté de répondre à cette question, à partir de conceptions différentes de la nature même des mathématiques (voir les divers encadrés traitant des principales philosophies mathématiques).

Que sont les mathématiques pour nous aujourd'hui ? Comment les caractériser ? A première vue, elles nous apparaissent donc comme des systèmes de symboles régis par des règles, ce que les logiciens appellent des langages formels.

La programmation informatique ou les jeux de société mettent également en œuvre de tels langages. Cependant, une telle description n'est pas entièrement satisfaisante. Il est impossible de comprendre vraiment ce que font les mathématiciens en ne considérant que les expressions formelles qu'ils couchent sur le papier. Celles-ci ne sont souvent que des traductions d'intuitions, d'idées guidant leurs réflexions. D'ailleurs, les mathématiciens utilisent souvent différents types de systèmes d'axiomes pour décrire ce qu'ils estiment être la même "réalité" mathématique : un ensemble, un nombre, un espace, etc.

Ainsi, nous distinguerons les mathématiques écrites, qui peuvent être vues comme des langages plus ou moins formalisés, de la pensée mathématique qui en constitue la source. A l'évidence, pensée et langage sont étroitement liés. Nous dirons donc que le mathématicien peut, d'une part (de la pensée vers le langage), exprimer une intuition par des systèmes axiomatiques ou, d'autre part (du langage vers la pensée), capter une idée à partir de ce qu'il observe et expérimente en manipulant ses systèmes de formules. Mais distinguer entre "mathématiques-langage" et "mathématiques-pensée" ne suffit pas. Il faut ici introduire une autre distinction, surgie de l'analyse des pratiques des mathématiciens, entre "mathématiques significatives" et "mathématiques vides", selon l'expression de Jean Dieudonné. Les premières permettent de résoudre des problèmes compliqués ou fournissent des méthodes ou des idées fécondes (la théorie des groupes ou la théorie des fonctions d'une variable complexe par exemple). Les secondes sont produites par simple extension ou généralisation artificielle de théories mathématiques déjà connues, mais qui n'apportent plus d'idée nouvelle, ni ne résolvent aucun problème ou conjecture importants.

Les mathématiques peuvent donc être vues comme une véritable pensée qui s'exprime, plus ou moins adéquatement, dans un langage formalisé, et qui s'organise autour de ce que nous appelons, à la suite de Dieudonné, les mathématiques significatives. Mais comment expliquer que certaines théories soient très significatives, très fécondes, très unificatrices au niveau strictement mathématique, et d'autres moins ou même pas du tout ? Cette question n'est plus tout à fait la nôtre : il s'agit en effet de l'efficacité "mathématique" des mathématiques ! L'aborder de front est délicat, car une théorie ne se révèle féconde qu'après coup.

Pour évaluer a priori la fécondité mathématique potentielle d'une théorie, on peut tout de même risquer une caractérisation des théories significatives que nous connaissons déjà : la plupart de ces théories et, parmi elles, celles qui sont reconnues comme les plus fécondes pour aborder des problèmes compliqués, mettent en évidence de riches classes d'invariants relativement à des opérations, des transformations, des relations. Illustrons ce propos à l'aide de quelques exemples.

Considérons tout d'abord la théorie des nœuds. Pour se faire une idée de ce qu'est un nœud mathématique, il suffit d'imaginer un morceau de ficelle sur lequel on a fait un nœud plus ou moins compliqué et dont on a joint les deux bouts. Cette théorie possède aujourd'hui de nombreuses connexions avec des domaines apparemment très éloignés. Or, ce qui rend cette théorie intéressante, c'est précisément la présence d'un grand nombre d'objets mathématiques qui restent invariants lorsqu'on déforme continûment le nœud. Ces objets peuvent être des nombres, des fonctions ou des structures. La théorie des nœuds est une illustration particulièrement éclairante de la topologie qui, justement, étudie les propriétés d'objets mathématiques restant invariants lorsqu'on leur fait subir une déformation "plastique" (déformation qui, dans le cas où ces objets sont des surfaces par exemple, n'introduit aucune déchirure ni trou, voir l'encadré "La théorie des nœuds").

La théorie des fonctions à une variable complexe se révèle être un autre cadre extrêment fécond. Or, de nouveau, nous constatons qu'elle est liée à des théories très riches en invariants, par exemple la théorie dite du groupe conforme à deux dimensions : celui-ci étudie les transformations planes qui laissent invariants les angles, mais non les longueurs. Ce groupe entretient des liens étonnants avec certains systèmes intégrables, des systèmes qui peuvent être intégrés justement en raison même de l'existence d'invariants caractéristiques : les "intégrales premières".

L'activité du mathématicien contemporain comporte notamment une importante dimension de classification systématique.

Prenons ensuite un exemple algébrique. Les nombres complexes $x + iy$ sont formés à partir de deux nombres réels x et y par une sorte de processus de "doublement" de l'algèbre des réels. En continuant le processus, on engendre par doublements successifs, toute une série d'algèbres de nombres (processus dit de Cayley-Dickson). On obtient les quaternions découverts par William Rowan Hamilton, les octonions découverts par Arthur Cayley et John T. Graves, puis toute une série d'autres algèbres. Au-delà des octonions, l'analogue de la théorie des fonctions à une variable complexe n'a plus du tout la même fécondité parce que, entre autres, tout lien avec des transformations riches en invariants (des groupes par exemple) est perdue (voir l'encadré "Les nombres complexes et leurs généralisations").

Enfin, un exemple récent nous est offert par la spectaculaire démonstration démonstration du théorème de Fermat par Andrew Wiles. On sait que l'intérêt mathématique de cette démonstration réside dans le fait qu'elle réunit un grand nombre de méthodes mathématiques très fécondes. Or, sans entrer dans les détails techniques, il est intéressant de constater qu'elle repose sur la considération d'invariants associés à diverses entités mathématiques.

Changeons maintenant de point de vue et, en regardant les mathématiques "de haut", essayons de repérer certaines caractéristiques très générales de l'activité du mathématicien contemporain. Qu'observons-nous ? Qu'elle comporte notamment une importante dimension de classification systématique. La classification consiste à déterminer des classes d'objets que l'on peut considérer comme équivalents "à une certaine transformation près". On classe par exemple des groupes à un isomorphisme près, on classe des surfaces à un homéomorphisme près (c'est-à-dire à une transformation "plastique" près : le beignet devient alors équivalent à une tasse à café à une anse), etc. Classer, c'est donc aussi mettre en évidence des invariants caractéristiques de transformations déterminées. Nous pouvons maintenant mieux caractériser les mathématiques : d'un côté, il y a les mathématiques "vides", définies à partir d'un jeu de relations entre symboles, ne produisant aucun ou peu d'invariants caractéristiques ; de l'autre, les mathématiques "significatives" ou "profondes" parviennent au contraire à exhiber des classes de relations ou de transformations riches en invariants. Cette caractérisation évite de confondre l'activité spécifique du mathématicien avec un jeu, gratuit et artificiel, sur des symboles, comme on a parfois tenté de le faire dans une approche par trop formaliste. Voyons maintenant comment cette analyse des mathématiques peut nous être utile pour aborder, enfin, le problème de leur efficacité dans les sciences naturelles ou humaines.

L'efficacité des mathématiques, aux divers sens repris ci-dessus, signifie au fond leur capacité à représenter de façon adéquate un fragment de réalité en anticipant son comportement. Mais comment reconnaissons-nous que quelque chose est réel ? Qu'est-ce qui confère une charge de réalité à ce que nous percevons ?

C'est dans l'expérience usuelle, mais combien complexe, de la perception visuelle qu'il nous semble possible de trouver un élément de réponse. Celle-ci nous apprend que nous identifions un objet en tant que réalité, et non comme une pure illusion, à partir du moment où nous le reconnaissons comme un invariant d'une série d'opérations physiques ou mentales. Par exemple, lorsque nous voulons savoir si ce que nous voyons est réellement un cube ou bien un autre objet, il nous suffit, pour en décider, de bouger la tête ou le corps et d'évaluer la persistance de nos sensations visuelles tout au long de ces mouvements.

La persistance d'une série d'informations lors des transformations induites par le mouvement est un critère de reconnaissance de la réalité. Les techniques d'imagerie virtuelle utilisent ce lien entre transformations spatiales et invariance pour suggérer la présence d'objets réels.

De fait, la perception n'est en aucune façon une réception immédiate et passive d'informations. Elle est élaborée sur une activité cérébrale intense du sujet percevant. Bart M. Ter Haar Romeny et Luc Florack ont montré récemment que la vision pouvait être comprise comme une opération qui utilise des invariants géométriques caractéristiques d'une image. A un niveau plus élémentaire, la reconnaissance d'un cercle, masqué partiellement par un carré, demande que l'on prolonge mentalement les arcs de cercle, ce qui signifie que l'on maintient invariant le rayon de courbure de la courbe. On pourrait ainsi montrer que, pour identifier le réel, la perception ordinaire fait un usage intensif des invariants relatifs à des transformations physiques.

L'histoire montre qu'une théorie mathématique n'est jamais efficace de manière isolée et du premier coup.

Il en va de même pour les sciences en général. Par exemple, c'est la répétabilité, la stabilité d'un signal qui fait penser à la présence d'une réalité. Au niveau théorique, on parle, en termes techniques de la covariance des lois, c'est-à-dire de l'invariance de leur forme sous des changements de référentiels : transformations de Galilée en mécanique classique, transformation de Poincaré en relativité restreinte... C'est cette covariance qui rend des "lois" susceptibles de décrire une réalité physique et de manifester qu'il ne s'agit pas d'un effet lié à un choix particulier de point de vue.

Toute reconnaissance et toute description d'un élément de réalité nécessitent donc la mise en évidence d'invariants caractéristiques d'un ensemble de transformations. Or nous avons vu que les mathématiques significatives étaient précisément caractérisées par l'existence de riches classes d'invariants. Ces mathématiques prolongent en quelque sorte le processus qui est déjà en jeu dans la perception ordinaire, c'est-à-dire la reconnaissance des éléments de réalité. Elles offrent ainsi la clé permettant l'accès à l'intuition d'une réalité qui n'est plus nécessairement visible ou tangible immédiatement. Lorsque la réalité se dérobe à notre regard, les mathématiques significatives nous en offrent encore une intuition par la puissance d'un langage riche en invariants.

Si nous comprenons maintenant la raison profonde pour laquelle les mathématiques significatives peuvent être, en principe, douées d'efficacité, notre explication est-elle parfaitement satisfaisante ? Pas tout à fait, puisque toutes les théories mathématiques significatives n'ont pas nécessairement des applications dans le domaine expérimental.

Il suffit de penser ici aux multiples essais infructueux d'extension de la relativité générale faisant appel à des théories géométriques profondes, mais ne débouchant sur aucune confirmation expérimentale importante. Comment en rendre compte ? La perspective historique est ici d'un grand secours. En réalité, les mathématiques ne sont pas du tout "neutres empiriquement". Au cours de leur histoire, elles se sont petit à petit coadaptées à la description de pans entiers du monde des phénomènes. Une théorie mathématique n'est jamais efficace de manière isolée et du premier coup. Elle ne l'est pas du premier coup, parce qu'il faut souvent tout un travail de traduction ou d'adaptation pour qu'un formalisme significatif puisse décrire un champ de phénomènes. Elle ne l'est pas de manière isolée, parce que son efficacité provient souvent d'un lien qu'elle entretient avec d'autres théories qui ont été efficaces à leur niveau.

Pourquoi, par exemple, la relativité générale s'est-elle révélée efficace pour décrire la gravitation ? D'une part, parce qu'elle se fonde sur un formalisme décrivant des invariants (le calcul tensoriel) ; mais aussi parce que son équation fondamentale a été établie en référence à celle de Poisson, qui avait déjà amplement fait ses preuves dans la théorie classique du potentiel. Autre exemple, le formalisme de la mécanique quantique : il est efficace parce qu'il se fonde d'une part sur certaines mathématiques significatives (la théorie des algèbres d'opérateurs, la théorie des espaces de Hilbert, etc.), mais aussi parce que la mécanique quantique s'enracine, à l'origine, dans la description effective, et réussie, des spectres d'atomes par J.J. Balmer et J.R. Rydberg. On sait par ailleurs, entre autres grâce aux profonds travaux d'Alain Connes du Collège de France, que la structure formelle de la mécanique quantique peut être obtenue en "déformant" celle qui caractérise la mécanique classique. Contrairement à l'opinion couramment répandue, l'efficacité de la mécanique quantique n'est pas étrangère à celle de la mécanique classique. Plus généralement, l'efficacité des mathématiques significatives ne devient donc effective que par le biais d'infiltrations empiriques qui adaptent progressivement certaines parties de ces mathématiques (mais non pas toutes probablement) à la description des régularités phénoménales. Nous avons établi plus haut un rapprochement entre les mathématiques significatives et la perception. Ce que nous venons de décrire le confirme. En effet, l'efficacité de la perception usuelle n'est pas non plus immédiate. La réussite de l'acte perceptif n'est acquise qu'au terme d'un apprentissage par le contact avec le monde extérieur. De la même manière, on pourrait dire que les formalismes mathématiques "apprennent" à saisir des morceaux de réalités empiriques au cours d'un processus historique. On apprend à reconnaître un champ gravifique sous une métrique, un champ électromagnétique sous des formes différentielles, une particule élémentaire sous une représentation d'un groupe, etc.

Mais cela ne s'est pas fait immédiatement par une sorte de dérivation a priori comme celle dont rêvait Arthur Eddington dans sa Fundamental Theory. Celuici espérait déduire la forme des lois, et même la valeur des constantes physiques fondamentales, à partir de pures considérations algébriques.

Pour comprendre l'efficacité des mathématiques, il est donc important de maîtriser le processus de production de représentations mentales (idées, concepts, images, etc.) susceptible de se traduire en formalismes riches en invariants. Un apport considérable à cette dimension du problème a été offert ces derniers temps par les travaux de Stanislas Dehaene et de Jean-Pierre Changeux, qui ont ouvert des voies pour la compréhension du substrat neuronal à partir duquel germent les capacités mathématiques élémentaires (représentation des nombres naturels, opérations arithmétiques...).

L'efficacité des mathématiques ne paraît pas plus mystérieuse que la réussite (ou l'échec) de la perception usuelle.

Mais il convient aussi de saisir les dédales du processus historique qui, progressivement, tisse des liens bilatéraux étroits entre les mathématiques et les sciences naturelles ou humaines. La perception usuelle est affaire d'inné et d'acquis, la découverte du monde empirique par le biais des mathématiques significatives l'est également : elle procède d'une part, d'une capacité mentale, innée et conditionnée par l'évolution, qui permet à l'être humain de s'accrocher à des éléments de réalité empiriques, et, d'autre part, d'une capacité acquise par un long apprentissage historique, par une lente genèse qui, par infiltrations d'informations empiriques, coadapte les mathématiques à une description des champs phénoménaux.

L'efficacité des mathématiques (ou leur inefficacité), que l'on oublie trop souvent de prendre en considération), selon les divers sens que nous lui avons donnés, ne semble ni déraisonnable ni mystérieuse, En tout cas elle ne paraît pas plus mystérieuse que la réussite (ou l'échec) de la perception usuelle ou du processus d'acquisition de connaissances en général. L'activité mathématique significative nous apparaît, au fond, comme une sorte d'extension de la capacité perceptive, trouvant son expression spécifique dans un langage formalisé. Comme dans la perception, où l'on croit accrocher les éléments de réalité alors qu'il ne s'agit que d'illusions d'optiques, il existe des domaines significatifs des mathématiques qui n'appréhendent aucun élément de réalité empirique. Pour percevoir, il faut d'abord tourner son regard vers l'objet, il faut en quelque sorte préparer la perception. De même, les mathématiques significatives ne deviennent efficaces que si elles sont préparées à rencontrer les données empiriques. Tout un travail d'adaptation et de traduction est souvent utile pour qu'une théorie mathématique abstraite puisse rejoindre les objectifs des sciences. Dans ce contexte, on comprend aisément que certains domaines soient l'objet de mathématisations moins efficaces que d'autres. En effet, pour qu'une mathématisation soit efficace, il faut que le domaine étudié exhibe des invariants naturels associés à des ensembles de relations, de transformations. On comprend dès lors que la physique soit mathématisable efficacement, car les observations qu'elle considère sont établies sur de nombreux invariants : énergie-moment angulaire. Par contre il n'est pas évident d'affirmer que l'économie ou la sociologie soient entièrement mathématisables, sauf dans les domaines de phénomènes où l'on peut précisément mettre en évidence des invariants caractéristiques (les points fixes définissant l'équilibre des marchés, par exemple). Aujourd'hui, une compréhension profonde de l'origine des mathématiques, de leur nature et de leur efficacité ne peut plus s'obtenir en partant d'une philosophie toute faite. Il nous faut rebâtir un cadre philosophique qui s'enracine dans une analyse détaillée des mathématiques elles-mêmes et des conditions concrètes de leur production.

En résumé, celles-ci se donnent à nous d'abord par une étude du processus historique qui a engendré les mathématiques que nous connaissons à l'heure actuelle : elles se révèlent aussi en tenant compte du fait que les mathématiques ne naissent pas n'importe où, mais bien dans des cerveaux possédant certaines caractéristiques qui, maintenant, sont à portée de la méthodologie scientifique elle-même. Cet essai est une invitation à reprendre ce problème classique en suivant conjointement l'axe historique et celui de la neurobiologie de la connaissance. L'origine des domaines les plus significatifs, les plus profonds, des mathématiques pourrait bien être l'extension progressive - coadaptée, de temps à autre, à des domaines empiriques - de capacités cognitives élémentaires permettant à l'humain de reconnaître et de se représenter des éléments de réalité. Cela expliquerait pourquoi il existe une étonnante connivence entre les arts plastiques et les mathématiques. L'origine des mathématiques n'est peut-être pas à chercher d'abord et avant tout en Grèce, mais dans tous ces lieux où l'homme, s'éveillant à la pensée, a tracé sur la pierre les symboles qui "font voir" le réel auquel il se retrouvait confronté... Le problème de l'efficacité des mathématiques relève donc de disciplines qui débordent fortement les limites des mathématiques ou de la physique théorique proprement dites. C'est peut-être pour cela que le scientifique qui se cantonne au strict domaine des formalismes aura toujours tendance à lui reconnaître un parfum de mystère ou de déraison !

Textes des encarts

Le physicien Eugene Wigner a écrit que l'efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles lui apparaissait "déraisonnable".

La capacité prédictive de la relativité générale d'Einstein a été très tôt démontrée avec l'observation de la courbure des rayons lumineux au voisinage d'une étoile.

"Prédire n'est pas expliquer" : avec cette formule, René Thom illustre sa prédilection pour les approches qualitatives dans les sciences.

Les considérations sur des invariants sont au cœur de l'une des plus spectaculaires réussites des mathématiques contemporaines : la démonstration du théorème de Fermat par Andrew Wiles.

PYTHAGORISME

Pour le pythagorisme, l'essence même du monde physique est mathématique, Les pythagoriciens admettaient que le nombre (naturel) est le fondement de toute la réalité matérielle, et cela, en partie, parce que les nombres peuvent se représenter par des "figures" (nombres triangles, carrés, pentagones..). Dans sa forme moderne, le pythagorisme consiste à affirmer que la structure du réel physique (particules, champs, espace-temps, etc.) est identiquement mathématique. Les mathématiques ne sont pas une description de la réalité au moyen de symboles, elles sont l'expression même de la structure de la réalité, le langage même du réel. Cette conception doit affronter les critiques suivantes : ne confond-on pas réalité et description de la réalité, le symbole et la réalité qu'il représente ? Comment peut-on donner un sens précis au concept de "structure du réel en soi" indépendamment de tout observateur ? Comment expliquer que toutes les mathématiques ne trouvent pas nécessairement d'applications ? Dans une telle conception, l'efficacité des mathématiques ne pose aucun problème, elle est automatique.

EMPIRISME

La modélisation des régularités empiriques constitue ici le moteur du développement mathématique. Les mathématiques sont donc des “formes” extraites de la nature.
Le problème majeur de cette conception est qu’elle n’explique pas comment un certain nombre de concepts des mathématiques contemporaines se sont développés sans aucune connexion apparente et directe avec les sciences de la nature (la notion de “catégorie”, par exemple). Dans ce contexte, l’efficacité des mathématiques s’explique par le fait qu’elles ont toujours un rapport plus ou moins direct avec des descriptions de phénomènes.
Illustres représentants : Aristote, J. Fourier.

PLATONISME

On peut en donner deux interprétations :
(1) les mathématiques constituent un monde d’idées indépendantes du monde des phénomènes,
(2) elles forment un langage hybride, ou intermédiaire, qui permet, à partir du sensible, de viser des idées, des concepts dont le sensible n’est qu’un pâle reflet.
Le platonisme rend bien compte du fait que les mathématiciens ont souvent l’impression de découvrir un monde conceptuel “déjà-là”, qu’ils n’inventent pas et qui s’impose à eux. Le problème d’une telle conception est le statut d’un monde de pures idées et son indépendance par rapport au monde matériel. L’efficacité des mathématiques ne peut se comprendre ici qu’en admettant une sorte d’harmonie préétablie entre le monde phénoménal et le monde mathématique, ainsi qu’un contact très spécial entre la pensée du mathématicien et ce monde des idées pures.
Illustres représentants : G. Cantor, K. Gödel, R. Penrose, A. Connes.

FORMALISME ET LOGIQUE

Pour les formalistes, les mathématiques constituent simplement un jeu avec des symboles. Ce point de vue ignore que les mathématiciens ne construisent pas leurs théories de manière arbitraire, qu'ils sont souvent guidés par des logiques conceptuelles internes ou par des résultats obtenus dans les sciences de la nature. L'activité mathématique ne peut se situer seulement au niveau de la syntaxe (manipulation de symboles vides de sens suivant des règles plus ou moins arbitraires), elle véhicule constamment du sens, des interprétations. Hourya Sinaceur a bien montré que la pratique mathématique est fondée sur des allers et retours entre les systèmes axiomatiques et les modèles qui les interprètent. Selon cette conception, il est difficile de comprendre pourquoi les mathématiques s'appliquent. En effet, comment expliquer que les résultats, obtenus à partir d'un jeu de société aux règles arbitrairement définies, puissent nous donner jusqu'à la $25^{\text{ème}}$ décimale la masse de l'électron ?
Illustres représentants : D. Hilbert (au moins dans certaines de ses déclarations, mais pas nécessairement dans sa pratique effective), Bourbaki.

Dans la ligne du formalisme, le logicisme prétend dériver toutes les mathématiques de concepts purement logiques. En fait, les mathématiques sont beaucoup plus riches que la logique qui n'en est qu'une branche particulière et non le fondement ultime.
Illustres représentants : G.Frege, B. Russell.

NATURALISME

Les mathématiques sont liées à des capacités psychologiques ou neurophysiologiques du sujet humain. Elles peuvent être acquises au cours du développement de l'homme : par exemple, l'enfant acquiert, au contact de son environnement, certaines notions mathématiques fondamentales (relation, opération...) ; le contact de l'homme avec le monde le pousse, au cours de son histoire, à forger des outils intellectuels pour résoudre des problèmes d'arpentage, de dénombrement. Mais les mathématiques pourraient aussi être liées à des capacités innées de son cerveau. Les capacités de dénombrement ou de représentation spatiale par exemple, qui ont une haute valeur adaptative, seraient inscrites profondément dans la structure du cerveau humain avant tout contact évolué de celui-ci avec le monde. C'est l'évolution qui serait alors responsable de la mise en place progressive des fondements de l'activité mathématique. Ces théories sont particulièrement intéressantes car elles relient les mathématiques à des capacités scientifiquement analysables du sujet humain. Mais il faut qu'elles expliquent aussi l'émergence des concepts évolués des mathématiques contemporaines, qui n'ont pas directement une haute valeur adaptative. L'efficacité des mathématiques serait alors liée à celle des fonctions cognitives des sujets, comprises comme fonctions biologiques.
Illustres représentants : J. Piaget, J.-P. Changeux, S. Dehaene.

LA THEORIE DES NOEUDS

Un nœud mathématique est une courbe nouée et fermée dans l'espace euclidien usuel. Il peut être caractérisé par une série d'invariants topologiques, c'est-à-dire des objets mathématiques (nombres, fonctions, structures, ...) qui ne changent pas lorsqu'on fait subir au nœud des transformations qui ne sectionnent pas le nœud. Par exemple, le nombre minimal de croisements des brins d'une projection "régulière" du nœud sur un plan est un invariant topologique, autour du nœud (le "complémentaire du nœud"). On voit rapidement que certaines peuvent être déformées continûment sans rencontrer aucun obstacle, tandis que d'autres sont gênées lors de telles déformations par les brins du nœud. Deux lacets peuvent être identifiés s'ils sont déformables l'un dans l'autre par une transformation continue. Et l'ensemble des classes de lacets ainsi identifiés peuvent être munies d'une loi de composition qui en fait un groupe (au sens algébrique). Intuitivement, on comprend que ce groupe contient des informations topologiques importantes concernant le nœud. Il s'agit en fait d'un invariant topologique, appelé groupe de Poincaré du complémentaire du nœud ou premier groupe d'homotopie du complémentaire du nœud.

LES NOMBRES COMPLEXES ET LEURS GENERALISATIONS

Les nombres complexes sont de la forme : $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels et i est tel que $i^2 = -1$. La multiplication des nombres complexes est commutative ($zw = wz$) et associative ($(uv)w = u(vw)$). La richesse des concepts définis à partir des nombres complexes est liée à la relation que le plan complexe entretient avec la sphère dite de Riemann via la projection stéréographique.
On obtient les quaternions de Hamilton en "doublant" l'algèbre des nombres complexes. Ils sont de la forme : $q = x + iy + jv + kw$ où i, j et k sont tels que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ $ki = -ik = j$. On peut aussi écrire : $q = z_1 + jz_2$ où $z_1 = x + iy$ et $z_2 = v - iw$ sont deux nombres complexes. Par rapport aux nombres complexes, la multiplication des quaternions perd la propriété de commutativité mais demeure associative (b).
Les octonions de Cayley-Graves sont définis comme l'algèbre de nombres $g = x_0 + e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 + e_4x_4 + e_5x_5 + e_6x_6 + e_7x_7$ où les x_i sont des réels, les e_i sont tels que $e_i^2 = -1$ et les règles de multiplication sont symbolisées par un dessin (par exemple, $e_5e_1 = e_6, e_7e_5 = -e_2, e_6e_5 = e_1, ...$).
La multiplication des octonions est non commutative et non associative, mais elle conserve une propriété assez proche de l'associativité appelée l'alternativité. Si l'on continue le processus de "doublement", on perd cette propriété.