Qu'y a-t- il de nouveau aujourd'hui
dans le travail d'un mathématicien ?
Échange entre Alain Connes et Jean-Christophe Yoccoz

Jean-Christophe Yoccoz : Le travail des mathématiciens a changé et nous travaillons de plus en plus de manière collective. Il y a une cinquantaine d'années, les gens voyageaient moins. Ils entretenaient des correspondances postales, mais les collaborations n'étaient pas aussi courantes. La plupart des articles étaient signés d'un seul auteur. C'était encore le cas à mes débuts. Aujourd'hui, il y a beaucoup plus de congrès et de travaux collectifs. Cette évolution s'est produite au cours de notre génération et s'est intensifiée depuis 10 ou 15 ans. Les articles cosignés par deux ou trois auteurs sont devenus la norme. Pour ma part, j'ai différents collaborateurs, en France, au Brésil, en Italie. Nous nous voyons assez régulièrement, ce qui suppose des voyages.

Alain Connes : Comme dans d'autres domaines, cette évolution produit des effets pervers : il faut désormais filtrer une information devenue pléthorique. D'une part, on a moins de temps à consacrer à chaque article et d'autre part, il se développe une redondance considérable, comme dans le domaine de la physique théorique, par exemple. C'est un peu moins vrai en mathématiques ; néanmoins, la communication se fait à un niveau plus superficiel. En contrepartie, internet et les moteurs de recherche ont modifié le paysage en profondeur. Auparavant, on valorisait beaucoup une certaine forme d'érudition mathématique. Aujourd'hui, Google fournit instantanément toutes les références dont on peut avoir besoin sur à peu près n'importe quel sujet. C'est un outil formidable qui soulage énormément la mémoire. C'est une sorte de mémoire collective - métaphoriquement, bien sûr, car ce n'est la mémoire de personne, mais chacun peut y accéder et y puiser ce qu'il cherche. C'est un très grand progrès.

Jean-Christophe Yoccoz : Il faut préciser que même si le nombre d'acteurs a augmenté dans notre discipline, il reste très faible par rapport à d'autres domaines comme la biologie. Qui plus est, dans le même temps, le champ disciplinaire mathématique a connu une grande expansion. De ce fait, les mathématiciens sont peu nombreux à travailler sur le même problème dans le monde. La situation est très différente de celle qui prévaut lorsqu'il s'agit par exemple de trouver un vaccin contre le Sida : étant donné l'urgence de l'enjeu, on comprend qu'il y ait un grand nombre d'équipes mobilisées pour essayer de résoudre un tel problème. En mathématiques, sauf sur quelques problèmes particulièrement palpitants, la règle est plutôt l'absence de concurrence. C'est donc un domaine particulier notamment du fait de sa démographie et d'une quasi-absence de pression économique.

Le travail en commun correspond à une évolution assez générale des sciences. La production de connaissances est devenue collective dans beaucoup de domaines. En médecine, en physique, les grandes expérimentations, comme celles du LHC

Entretien mené par Marc Kirsch, © La lettre du Collège de France, n°33, mai 2012.

au CERN, requièrent la collaboration de plusieurs centaines, voire de milliers de chercheurs, ingénieurs, techniciens, etc. de différentes disciplines. Elles ne peuvent plus être maîtrisées en totalité par un individu.

Jean-Christophe Yoccoz : En mathématiques, les collaborations sont d'ampleur plus modeste. Mais la classification des groupes simples, par exemple, a mobilisé environ 200 auteurs et représente environ 10 000 pages, répartis en un grand nombre d'articles de 50 à 100 pages. À l'échelle de notre discipline, c'est un travail aux dimensions énormes, où en effet personne ne contrôle totalement l'ensemble de la preuve, parce qu'elle est simplement trop longue. Reste qu'en mathématiques, les signataires d'un article savent et comprennent tout ce qu'il contient, ce qui n'est pas le cas dans des articles présentant des recherches interdisciplinaires de grande envergure. Un mathématicien n'utilise jamais un théorème dont il n'a pas compris la démonstration.

La question de la preuve mathématique a souvent intéressé les philosophes. Wittgenstein, par exemple, dit qu'on doit avoir de la preuve une perception unifiée. Est-ce possible pour des preuves aussi longues ?

Alain Connes : Il peut y avoir des preuves en apparence très longues qui restent maîtrisables. Un mathématicien, s'il connaît bien le sujet, va y repérer des points stratégiques. En effet, une démonstration n'est pas homogène, il y a des articulations essentielles, c'est là que les choses se passent. Le mathématicien doit avoir la capacité de repérer ces points cruciaux et ensuite de hiérarchiser la démonstration en quelque sorte, de manière à en extraire l'essentiel, de telle sorte qu'elle se mette à exister en tant qu'entité propre. L'un des aspects essentiels du travail mathématique est un travail de hiérarchisation. En outre, certaines complications se dissipent au cours de l'histoire. Quand on examine par exemple les écrits de Descartes et la manière dont il utilisait en son temps les coordonnées dites "cartésiennes", on a l'impression d'une grande complication, notamment parce que les nombres négatifs n'étaient pas d'utilisation courante. Une fois qu'on a su manipuler les nombres réels, puis les nombres complexes, une fois qu'on a compris la hiérarchie des structures, que l'on a adopté les bonnes notations, toute cette complication, qui était pour ainsi dire sans contenu, a disparu pour laisser place à une grande simplicité. Il y a donc un énorme travail de simplification qui est l'objet d'un effort constant et qui sera sûrement réalisé pour la classification des groupes simples. Tant que ce processus est en cours, on n'a pas encore vraiment fini de comprendre, on n'a pas vraiment hiérarchisé les concepts importants, et les choses paraissent compliquées.

Il y a donc d'une part un travail historique collectif de hiérarchisation et de simplification, et d'autre part le travail propre du mathématicien qui a la connaissance d'un domaine et une sorte de virtuosité de la preuve et de la compréhension.

Jean-Christophe Yoccoz : Ou une technique, qui demande une pratique constante pour conserver sa fluidité. Ce volet technique de l'activité est nécessaire, mais pas suffisant.

Alain Connes : L'activité mathématique exige une pratique quotidienne. Si l'on s'interrompt trop longtemps, le savoir-faire s'érode. Les automatismes se perdent. C'est heureusement transitoire. On peut comparer cela à l'expérience des musiciens : Arthur Rubinstein disait "quand j'arrête de jouer une journée, je l'entends, quand j'arrête deux jours, le public l'entend." Par ailleurs, il y a une part tout aussi importante de l'activité mathématique qui, elle, est stable : celle qui consiste à manipuler des images mentales. Qu'un profane essaie de lire un article, il ne verra qu'une collection de formules sans signification. Mais un mathématicien qui a travaillé suffisamment dans un certain domaine - forcément limité - a construit des images mentales qui sont mobilisées dès qu'il aborde des questions relatives à ce champ d'activité : le sens apparaît immédiatement, il saute aux yeux.

Jean-Christophe Yoccoz : Même dans un domaine familier, pour certains articles difficiles du fait de leur longueur ou de leur technicité, il arrive qu'on ait du mal à comprendre jusqu'au moment où une image mentale se forme brusquement et permet de dépasser le mot à mot abstrait du déchiffrage des formules.

À quoi correspond cette image mentale ? Est-elle la représentation de quelque chose ou au contraire une pure construction ? Pour beaucoup de gens, les mathématiques sont comme une langue étrangère, mais tout le monde partage un savoir de base fait de nombres et d'objets géométriques élémentaires, qui semble être une sorte de production de l'évolution, un bagage mathématique inné de notre espèce. Vos images mentales renvoient-elles à des objets de même nature, mais plus complexes ?

Jean-Christophe Yoccoz : Les nombres entiers sont des images concrètes de ce genre, que tout le monde partage. Je ferais une analogie avec la physique. Certains postulats de physique classique permettent d'associer des images à la théorie, comme en balistique, où l'on peut voir les trajectoires des objets. On conserve là un rapport assez simple à l'observation, et on appréhende des propriétés élémentaires, comme le sont les propriétés des nombres entiers ou de la géométrie. Mais il y a des domaines de la physique où l'observation est beaucoup moins immédiate, comme l'électromagnétisme ou la mécanique quantique.

Quant à la nature des objets mathématiques, la position platonicienne est dominante parmi les mathématiciens. Même ceux qui la contestent se comportent en pratique comme s'ils étaient platoniciens : ils découvrent et manipulent des objets mathématiques comme s'ils étaient réels.

Alain Connes : Au départ, et jusqu'au XIX^{e} siècle, une grande partie des mathématiques était très proche de la physique. Mais il s'est produit une évolution à l'intérieur même des mathématiques. Sans chercher à garder une relation directe à la physique et au monde extérieur, les mathématiciens ont découvert un univers extraordinaire. Prenons l'exemple ce qu'on appelle le monde p-adique, dans la théorie des nombres : c'est un monde qui existe en autant de versions qu'il y a de nombres premiers. Le monde réel correspond à une seule de ces versions. Il y a donc autant de ces mondes que de nombres premiers, et ces mondes ont une cohérence aussi belle, aussi éclatante, que le monde "réel" de la physique. Les mathématiques ne sont absolument pas limitées à la géométrie ou au nombre, elles sont une source extraordinaire de création de concepts. En réalité, elles englobent tout, c'est-à-dire que la plupart des qualités que l'on rencontre dans le monde réel, si on les comprend vraiment, ont, je le pense, une formulation mathématique.

On aurait pu penser que les mathématiques sont créées par l'homme en un processus adaptatif, comme une adaptation de l'homme à la réalité, ce qui expliquerait ce fait stupéfiant que des relations intrinsèquement mathématiques et produites à partir d'objets purement mathématiques puissent rendre compte de phénomènes physiques comme si elles étaient les lois qui les régissent. Or, les mathématiciens ont en fait ouvert des portes, découvert des horizons qui n'ouvrent pas simplement vers le monde réel, mais vers bien d'autres mondes, incroyablement cohérents, mais qui n'ont aucune relation au monde "réel", au sens de la physique classique. Il faudrait dire plutôt aucune réalisation dans le monde réel...

Jean-Christophe Yoccoz : Oui, parce que l'informatique, par exemple, leur donne des applications nouvelles, et je ne pense pas seulement à des applications comme la cryptographie. L'informatique repose sur les mêmes principes de validation et de contrôle que les mathématiques. Je comparerais volontiers leurs relations à celles qui existent entre la chimie et la physique : la chimie est tournée davantage vers l'industrie et les applications ; de même, l'informatique est gouvernée par les applications. Mais elles ont le même principe de fonctionnement, respectivement, que la physique et les mathématiques. Et de même que les chimistes créent des produits qui n'existent pas forcément dans la nature, les informaticiens créent des choses qui ont une structure mathématique et qui n'existent pas dans le monde.

Alain Connes : J'avoue avoir une confiance démesurée dans le pouvoir explicatif des mathématiques pour notre compréhension du monde et une profonde aversion pour la tendance trop répandue à vouloir construire notre compréhension de la réalité sur le modèle classique qui est valide jusqu'à une certaine échelle, mais n'a plus de validité pour les objets microscopiques, sur lesquels règne le quantique. Le quantique a un pouvoir explicatif qui est bien loin d'être passé dans la culture de la société dans laquelle nous vivons. Pensez à l'électron ou aux équations de la physique quantique concernant l'électron : il y a là une merveille. À partir d'un point de départ extrêmement simple - le principe d'exclusion de Pauli, qui stipule que les électrons ne peuvent pas se trouver dans le même état quantique - on reconstitue le tableau périodique des éléments. C'est vertigineux ! Une telle explication ne rentre pas dans le schéma évolutionniste. Sans être aucunement mystique, je crois que la nature est beaucoup plus subtile et complexe qu'on ne le pense, mais qu'elle a des ingrédients extrêmement simples et que ces ingrédients sont de nature mathématique. Notre perception par les sens ne nous donne qu'une image très partielle de la réalité, la couleur par exemple ne capture que trois paramètres dans l'infinité de ceux qui régissent la distribution d'intensité des fréquences de la lumière. Les mathématiques ont permis de simplifier, de modéliser des parties de la réalité extérieure, au point que l'on peut finir par douter de l'idée que les mathématiques seraient créées pour expliquer le monde extérieur, à partir du monde matériel qui nous entoure. J'en suis arrivé à imaginer un point de vue radicalement inverse, selon lequel c'est en fait le monde mathématique qui préexiste et c'est de ce monde que surgit une certaine image, celle que nous percevons dans le monde physique. Mais nous sommes bien loin de comprendre l'explication fondamentale, qui est, je pense, beaucoup plus simple et plus mathématique qu'on ne le croit.

Ces aspects de la culture scientifique, pourtant cruciaux, sont très peu diffusés et compris. Le premier pas, c'est la physique quantique : notre monde est envahi d'objets quantiques - laser, puces électroniques, etc. - mais nous n'avons pas intégré la dimension quantique dans notre culture. Nous vivons dans un monde quantique et nous continuons à penser comme si nous vivions dans un monde classique.

Jean-Christophe Yoccoz : Sur la question de la construction, j'ajouterais une autre analogie avec la physique : de la même façon que les physiciens créent des instruments, comme le télescope, pour explorer l'univers physique, les mathématiciens créent des instruments pour analyser des réalités mathématiques. Il y a une part de découverte et il y a une part d'invention. Les techniques mathématiques sont des créations humaines, au même titre que les instruments physiques.

Les mathématiques ont d'ailleurs permis de donner une réalité physique à des opérations logiques et mathématiques sous la forme de l'ordinateur. Quelle place occupe cet instrument dans les mathématiques d'aujourd'hui ? L'ordinateur est-il capable de démonstrations au même sens que le mathématicien ?

Jean-Christophe Yoccoz : Non. Tout d'abord, il faut indiquer que la question ne se réduit pas au seul problème des preuves. L'ordinateur est un outil d'exploration incomparable. Si l'on veut démontrer quelque chose, il faut avoir une certitude raisonnable que c'est vrai. L'ordinateur permet par exemple de découvrir des contre-exemples, de tester des propositions, etc. Il permet d'observer des phénomènes intéressants, ne serait-ce que par la réitération massive, impossible sans lui, de calculs complexes.

Alain Connes : L'ordinateur démultiplie la puissance de calcul. Dans les travaux sur les anneaux de Witt, par exemple, on rencontre des polynômes très compliqués : il serait extrêmement long de les calculer et les manipuler à la main mais on obtient le résultat très facilement à l'aide d'un petit programme informatique, ce qui permet d'acquérir très vite une familiarité avec ces objets qui ont l'air exotiques au premier abord. Pourtant, cet usage de l'informatique pour l'exploration ne doit pas faire oublier un autre aspect très important, qui concerne les preuves formelles. L'ordinateur peut faire bien plus que traiter des cas particuliers : il est capable de faire des démonstrations générales. Il le fait de manière très efficace, non pas en tant que démonstrations, au sens de déductions logiques, mais en faisant fonctionner le calcul formel.

En pratique je l'utilise très souvent de la manière suivante. Dans un contexte donné, je veux savoir si une formule est vraie : tout seul, je ne peux la vérifier que sur un très petit nombre de cas et je suis encore à la merci d'une erreur de calcul. La machine est capable, elle, de la démontrer (par le calcul formel) pour des valeurs telles que toute erreur puisse être écartée tant la vérification est convaincante. Donc, après avoir expérimenté de la sorte, je suis sûr que c'est vrai. Bien sûr, il reste ensuite à trouver la démonstration directe, mais ce n'est pas le plus difficile. Il ne s'agit pas d'un test de cas particuliers : c'est un calcul formel qui m'indique que ma formule est vraie. Cette puissance de calcul formel offre des ressources exceptionnelles.

Au cours de l'histoire des sciences s'est posée la question de la fiabilité des instruments. Peut-on se fier à ce qu'on voit des corps célestes avec la lunette astronomique ? Ce qu'on voit au microscope est-il une image fiable de la réalité ou un artéfact ? Peut-on transposer cette question à l'ordinateur ? Sait-on ce que fait l'ordinateur ? Quelles sont ses limites ?

Jean-Christophe Yoccoz : Il y a une différence entre la simulation numérique, où les marges d'erreur ne sont pas totalement contrôlées, et la démonstration assistée par ordinateur, où en principe on contrôle les erreurs. Dans le premier cas, le rôle de l'ordinateur est de suggérer des réponses et des pistes de recherche, la validation de celles-ci restant à la charge du mathématicien. Dans le deuxième cas, le mathématicien confie à l'ordinateur ce processus de validation. Mais les erreurs peuvent se trouver dans l'écriture du programme...

Souvent, les preuves par ordinateur sont fondées sur l'exploration d'un nombre gigantesque de cas, comme dans le cas du théorème des quatre couleurs (qui stipule qu'on peut colorier n'importe quelle carte découpée en régions connexes de sorte que deux régions limitrophes reçoivent toujours deux couleurs distinctes). De ce fait, même si on peut être sûr que c'est vrai, ce ne sont pas des preuves satisfaisantes pour un mathématicien.

Alain Connes : Il y a des limites à l'utilisation de l'ordinateur pour produire des énoncés - y compris des preuves - de manière formelle. On ne peut pas omettre la question du sens, qui à mes yeux est largement aussi importante que celle de la nature des objets mathématiques. La question cruciale est de comprendre pourquoi certains énoncés ont un sens, tandis que d'autres, fussent-ils vrais et prouvés presque mécaniquement par l'ordinateur, sont totalement inintéressants et dépourvus de sens.

Il y a deux activités humaines qui pour le moment échappent totalement à l'ordinateur et qui sont une part intégrante et vraiment fondamentale des mathématiques : premièrement, l'esprit humain est capable, souvent dans des situations très complexes, après avoir fait beaucoup d'expérimentations, de calculs, etc., de dégager un concept. C'est un point essentiel.

La seconde activité inaccessible à l'ordinateur, c'est le raisonnement par analogie. Le mathématicien est capable, lorsqu'il est confronté à une difficulté donnée, de reconnaître que la situation n'est pas très différente d'une autre qu'il a rencontrée dans un autre contexte, parfois très éloigné, et de se servir de cette analogie pour résoudre le nouveau problème. Cela concerne également le sens. C'est difficilement objectivable : on sait qu'il y a quelque chose d'analogue, mais cela relève d'une intuition et non d'une perception explicite et bien formulée. Il faudrait beaucoup de temps pour la cristalliser, de même qu'il est difficile, dans la phase de création de concept, de donner une définition fixée. Il y a là tout un système de maturation et de distillation réalisée par l'esprit humain. C'est un pouvoir extraordinaire, dont l'ordinateur me semble très éloigné.

L'ordinateur introduit donc une nouvelle manière de travailler, mais pas une rupture qualitative. De fait, l'histoire des mathématiques a un aspect cumulatif et construit un ensemble cohérent, tandis que d'autres sciences sont sujettes à des bouleversements, à des renversements de paradigme qui peuvent conduire à laisser à l'abandon toute une partie de l'édifice, devenu pratiquement inutilisable.

Jean-Christophe Yoccoz : L'histoire des mathématiques présente une singularité. En physique ou en biologie, avant d'arriver à des concepts fondamentaux comme l'électron ou l'ADN, il a fallu des siècles. Les objets qui sont maintenant considérés comme fondamentaux n'ont émergé que tardivement. En mathématiques, c'est l'inverse. Au commencement, il y a les nombres entiers ou les formes géométriques élémentaires. Ce sont les concepts mathématiques essentiels à partir desquels on bâtit des concepts de plus en plus sophistiqués, comme une pyramide de connaissances posée sur la pointe. Les concepts qui sont à la base de l'édifice sont aussi les premiers du point de vue historique. C'est pourquoi il est si crucial qu'il n'y ait pas d'erreur : la démonstration fixe les choses, elle constitue une validation et permet de bâtir sur un fonds solide. C'est différent en physique par exemple, où la théorie a toujours ses limites - on le voit dans le cas de la mécanique classique, par exemple - et où l'on peut revenir sur ces théories.

Alain Connes : De fait, en physique théorique, les règles "culturelles" ne sont pas du tout les mêmes. Dans un article de physique théorique, la justification rigoureuse n'a pas un poids aussi important qu'en mathématiques. Dans les deux cas, il faut convaincre, mais les modalités sont différentes. Contrairement au physicien, le mathématicien ne peut pas se passer d'une démonstration rigoureuse. C'est une caractéristique générale des mathématiques.