

Alain Connes : Donc au départ, on pourrait aborder les mathématiques en les considérant comme faisant partie de la physique, comme étant un langage qui est développé pour mieux comprendre le monde physique qui nous entoure ; et effectivement, on s'aperçoit que les mathématiques ont cette efficacité remarquable dans ce domaine-là. Et très souvent, on a de l'extérieur une compréhension de ces choses qui est beaucoup trop superficielle, et un exemple que je voulais prendre, c'est la version à laquelle on aboutit maintenant sur la réalité physique.

Donc le réel physique n'est rien d'autre que la superposition de possibles imaginaires. Et je ne donnerai pas la formule mais dans cette phrase, il y a quelque chose d'extraordinaire, c'est que les nombres imaginaires, les nombres complexes sont impliqués, et ces nombres, par même leur nom, comme nombres imaginaires, au début, étaient des fictions mathématiques.

Donc il y a cette efficacité incroyable des mathématiques dans le monde physique qui bouleverse même notre conception philosophique de ce que c'est que la réalité et qui met en question, bien sûr, le matérialisme comme idée un peu naïve parce que le matérialisme est une théorie qui se base sur une compréhension partielle des choses et qui identifie le réel au matériel.

Or d'après ce que j'ai dit, justement, le fait que le réel soit cette superposition de possibles imaginaires montre bien à quel point la réalité est bien plus subtile. Mais en fait, au bout d'un moment, on s'aperçoit qu'il y a un voyage propre, à l'intérieur du monde mathématique, qui devient disjoint du monde physique, et le principal outil qui permet justement de débiter ce voyage et de commencer, c'est l'analogie ; c'est le fait que l'esprit humain est capable de voir entre des domaines très très différents certains reflets, certaines correspondances, et à partir de ces reflets, de ces correspondances, de transposer, de transplanter des idées qui étaient valables dans un domaine, de les transplanter dans un autre domaine ; c'est ainsi que les mathématiciens ont découvert des pans entiers de mathématiques qui n'ont rien à voir avec le monde physique, et qu'il serait illusoire de vouloir trouver dans le monde physique. C'est ce qu'on appelle par exemple le monde p -adique. Le monde p -adique, c'est le monde dans lequel par exemple, l'entier deux est tout petit, et quand, par analogie, on transplante les concepts que l'on a pour les nombres réels, on s'aperçoit, un petit peu comme Alice au pays des merveilles qui découvre 36 choses, que l'on n'aurait jamais soupçonnées.

Donc c'est la première chose, la première chose, c'est que justement il y a un monde des mathématiques, qui n'est absolument pas soumis au monde de la physique et lorsqu'on explore ce monde beaucoup plus avant, on s'aperçoit en fait que dans ce monde mathématique, il y a par exemple des choses vraies mais non démontrables.

Transcription d'une vidéo écoutable ici <https://www.youtube.com/watch?v=i08kF-NLVS4>

Alors ça, c'est quelque chose qui est assez difficile à expliquer, j'ai essayé de l'expliquer dans un livre qu'on a écrit avec Lichnerowicz et Schützenberger, par la fable du lièvre et la tortue. Alors ce serait techniquement compliqué à expliquer mais c'est un exemple typique d'un énoncé mathématique, dont on sait qu'il est vrai, on sait aussi qu'il est indémontrable dans ce qu'on appelle l'arithmétique de Peano, c'est à dire par des moyens simples, et la raison pour laquelle on sait qu'il est vrai, c'est ce qu'on appelle la théorie des ordinaux, la théorie des ensembles, la théorie de Zermelo-Fraenkel, etc.. Donc en fait, on a depuis réussi à voir que si on prend des énoncés simples, des énoncés arithmétiques qu'on peut formuler de manière simple, et en fait, on sait que la plupart de ces énoncés sont indémontrables, c'est-à-dire que la proportion des énoncés qui sont vrais mais non démontrables tend vers un, c'est à dire que la plupart des énoncés qui sont vrais sont en fait indémontrables. Et l'image qu'il faut garder en tête pour la relation entre le mathématicien et cette réalité mathématique que j'appelle réalité mathématique archaïque, parce que justement, il y a des choses vraies mais qu'on n'arrive pas à percevoir de manière directe, c'est la même relation qu'il y a entre la réalité extérieure et un tribunal : dans le tribunal, vous avez des données, alors en mathématique, c'est ce que l'on appelle les axiomes, et à partir de ces données, vous pouvez faire un certain nombre de déductions c'est ce que fait le mathématicien lorsqu'il travaille. Mais, il serait faux d'identifier les déductions qui sont faites à l'intérieur du tribunal avec la réalité extérieure et ceci pour des raisons évidentes.