Transcription d'une conférence donnée par Alain Connes "Dualité entre formes et spectres", donnée au Collège de France, le 13.10.2011
La conférence est visionnable ici :
http://www.college-de-france.fr/site/colloque-2011/symposium-2011-10-13-10h15.htm

Alors donc, mon exposé va se concentrer sur la dualité qui existe entre les formes et leur spectre, c'est à dire, si vous voulez, la gamme qui est associée à une forme. Ça, bien sûr, ça répond partiellement à la question de la relation entre les formes et le temps, puisque les vibrations d'une forme se déroulent dans le temps.

Et je commencerai mon exposé en expliquant pourquoi il est absolument fondamental de se poser la question suivante "comment est-ce qu'on peut définir des invariants d'une forme ?". Si vous avez une forme au sens très naïf du terme ? Vous pouvez parler de son diamètre, vous pouvez parler de sa taille et de son volume, des choses comme ça, mais bien sûr, pour arriver à donner entièrement une forme. Il faudrait, il faut des invariants beaucoup plus subtils que ça.

Et parmi ces invariants, il y a justement les fréquences, la gamme possible produite par une forme, c'est de ç dont on va parler. Et ensuite, on veut non seulement savoir comment caractériser une forme, mais on veut aussi savoir comment caractériser la position d'un point par rapport à cette forme. Et ce qu'on verra, c'est qu'en gros, si vous voulez, un point, il est caractérisé par un accord, des notes, dans cette gamme. Donc, pour vous présenter les choses de manière un peu naïve. Donc, on parlera des vibrations, des formes, je vous ferai entendre des formes simples et ensuite, par référence à un fameux article de Mark Kac dans les années 60, qui demandait "Est-ce qu'on peut entendre la forme d'un tambour ?", on parlera d'un invariant additionnel qui permet de compléter le tableau, c'est-à-dire qui permet, si on le connaît, de connaître la forme. Et enfin, je terminerai, je tiens beaucoup à cette petite addition, parce qu'en préparant mon exposé, je me suis aperçu que j'avais essayé de jouer *Au clair de la Lune* sur la gamme qui est produite par les formes les plus simples, comme une sphère ou des choses comme ça. Et je me suis aperçu que ça donnait un résultat qui n'était pas bon du tout. Et je me suis aperçu qu'en fait, la gamme, la vraie gamme musicale, celle qui est sensible à l'oreille, eh bien, il n'y a pas une forme simple à laquelle elle correspond, c'est à dire une forme dont les fréquences correspondent à la gamme musicale telle qu'on la connaît. Et je me suis amusé à chercher un objet et il y a un objet vraiment très intéressant qui semble répondre à la question et dont je parlerai à la fin, qui est la sphère quantique.

Donc, c'est ça le programme.

Et alors ? Donc, pour commencer, on va essayer de réfléchir de manière intrinsèque à la notion de forme ou à la notion de position par rapport à une forme, en se posant une question qui est une question très simple et qui est “où sommes nous ?”.

Voyez, à cette question, vous pouvez répondre “on est au Collège de France, dans l’amphi Marguerite de Navarre”. Mais si vous voulez transmettre cette information à une autre civilisation, ce sera inaudible.

Comment est ce que nous pouvons transmettre là où nous sommes de manière intrinsèque ? Alors, bien sûr, les hommes ont essayé et ils ont envoyé la sonde Pioneer dans l’espace. Et sur cette sonde, ils ont donné un certain nombre d’informations. Quelles sont ces informations ?

Bon, ils ont bien sûr montré à quoi ils ressemblaient. Ça, c’est le dessin qui est là.

Ils ont également donné un petit aperçu du système solaire. On voit, en bas, le soleil, on voit une première planète Mercure. On voit une deuxième planète, Vénus. On voit la troisième dont la sonde est partie. C’est pour ça qu’ils ont mis le petit dessin, et ainsi de suite.

Mais il est bien évident que pour le moment, vous avez une information qui est quasi nulle parce qu’il va exister une infinité de systèmes planétaires qui auront à peu près la même allure. Et donc, en fait, vous ne saurez absolument pas où vous êtes.

Alors, en fait, il y a dans le dessin qu’ils ont envoyé quelque chose qui est beaucoup plus intéressant, beaucoup plus cryptique et beaucoup plus informatif, et qui est ce qui est au milieu, à gauche, vous voyez.

Et qu’est ce que c’est ?

Ce sont les directions à partir du Soleil par rapport à 14 pulsars et au centre de la galaxie. Et en plus, ils ont indiqué pour chacune de ces directions la fréquence correspondante. Alors on verra que ça, c’est très, très, très proche de la réponse qu’on va obtenir à partir d’une réflexion mathématique abstraite sur le problème abstrait. Et le problème abstrait, il peut se formuler de la manière suivante, il peut se formuler sous la forme de deux questions, excusez-moi, de temps en temps, je mettrai des transparents en anglais parce que je sais qu’il y a une traduction simultanée et j’en profite, donc, pour mettre quelques transparents en anglais, la traduction en français, je vous la donne : donc, la première question, c’est peut-on trouver des invariants complets d’espaces géométriques ou, si vous voulez, de formes, de manière plus générale ?

Et deuxièmement, peut-on spécifier de manière invariante où est un point par rapport à une forme ? Alors la chose qui est essentielle, là, on le voit bien dans l'exemple que je vous ai donné quand on veut donner notre position par rapport à l'univers, voyez quelqu'un de très savant, vous dirait. “Mais pour donner votre position dans l'univers, il suffit de donner vos coordonnées par rapport à un système de référence.”. Oui, mais où est l'origine du système de référence ?

Il faut bien que vous disiez où elle est. Et pour faire ça, vous avez exactement le même problème que dans le problème de départ. Et ainsi de suite. Donc vous voyez, ce n'est pas du tout quelque chose de simple. Ce n'est pas du tout évident. On pourrait vous dire oui, je connais la relativité générale. Je sais qu'un point est spécifié par ses coordonnées, tout ça. Mais ces réponses sont nulles et non avenues par rapport au côté invariant et intrinsèque du problème.

Alors, la chose importante, donc, la chose importante, c'est qu'en fait, à une forme, donc, correspond toute une série de invariants, déjà. Et ces invariants, c'est, si vous voulez, la gamme de la forme, alors c'est là qu'on va voir si le son marche, j'espère qu'il va marcher. Donc, on va faire un petit essai. Ce matin, quand je me suis réveillé, mon ordinateur avait rebooté et donc il n'y avait plus rien qui marchait. Et comme le programme prend très longtemps à se mettre en route, j'étais vraiment effrayé. On va voir si ça marche. Ça marche, donc on entend le son, alors je vais commencer par la forme la plus élémentaire, la forme la plus élémentaire qui soit, c'est l'intervalle.

Si vous voulez, c'est une corde qui va vibrer, comme une corde d'un violon, et elle va vibrer. Elle va avoir un son fondamental. Et puis, elle va avoir les multiples de ce son, comme vibrations. La gamme correspondante va être extrêmement simple.

Et on va s'amuser à jouer un peu avec cette gamme. D'accord, donc, si je fais ça. *(Il clique sur des boutons numérotés de 1 à 20 et on entend les sons associés.)* Ça paraît bizarre, le 7. Eh bien, je prétends que si vous essayez sur cette gamme-là de jouer *Au clair de la lune*, la première note, ça doit être 131.

Donc vous voyez que ça a l'air... Naïvement, on se dit “Mais ça, c'est la gamme ! Bien sûr ! Puisque ce sont les multiples d'un nombre entier...”. Non, ce n'est pas vrai. Ce n'est pas vrai du tout. Grosse erreur. Première erreur naïve qu'on ferait. Alors, ça, c'est pour l'objet le plus simple. Un objet un petit peu plus compliqué mais quand même, cet objet, si vous voulez. Il a un spectre extrêmement simple. Quand on veut visualiser les fréquences, on peut les représenter sous leur forme visuelle, c'est-à-dire sous leur forme à partir du spectre. Et puis, on peut aussi les représenter sous forme d'un graphe. Le graphe est intéressant parce qu'on verra la multiplicité d'une valeur propre dans un graphe. Alors maintenant, passons à une forme qui est déjà plus évoluée, qui est le disque.

Alors, le disque, qu'est-ce que cela veut dire ? Les sons produits par le disque, ça veut dire vous prenez un tambour rond, vous tapez sur ce tambour. Il va y avoir un son fondamental. Il va y avoir exactement comme dans le cas de la corde vibrante. Il va y avoir des harmoniques, il va y avoir d'autres sons. Donc le tambour va produire toute une série de sons qui ne seront plus du tout aussi simples que les entiers dont j'ai parlé tout à l'heure, et qui vont vous donner une gamme.

Et cette gamme va être quand même extrêmement informative sur le tambour, c'est à dire que la note la plus basse va vous donner le diamètre, va vous donner immédiatement une mesure de diamètre. Et puis le comportement, par exemple, des notes beaucoup plus grandes, va vous donner la taille du tambour, etc., etc.

Alors je vous donnerai à la fin une bibliographie. Je veux dire, pour tous les mathématiciens qui ont été impliqués dans ce genre de truc, mais je ne vais pas du tout vous dire “ceci est dû à x ou bien ceci est dû à y. Je vous donnerai la bibliographie à la fin, mais écoutons un petit peu le tambour.

(Les clics ne produisent aucun son.) Alors là, j'ai pas mis de sons justement, donc j'ai pas mis de temps parce que il y a des sons qui sont très aigus, regardons simplement comment il vibre pour le moment.

D'accord, vous voyez, j'espère. Vous voyez comment il vibre : à chaque fois que vous avez une image comme ça. Le dessin n'est pas du tout aussi simple qu'il pourrait paraître, parce que les fonctions qui sont impliquées sont ce qu'on appelle les fonctions de Bessel. Et si vous voulez, justement, lorsqu'on tape plus ou moins, à un endroit suffisant sur le tambour, etc. On va le faire vibrer. Selon l'une de ses fréquences harmoniques. On va les écouter, écoutons-les. Alors, on peut les calculer. Ce sont des nombres qui ne sont pas du tout triviaux. Ce ne sont pas du tout des nombres comme les entiers. Ce sont des zéros d'une fonction qui est assez compliquée qu'on appelle la fonction de Bessel, qui sont paramétrés par deux entiers et qu'on peut calculer. On peut les calculer avec autant de décimales qu'on veut. Mais ce ne sont pas des nombres simples et c'est ça la gamme du disque. Donc, le disque a une gamme comme ça.

Je vous montre les premières notes. Il a un spectre qui est comme ça et maintenant, on va l'entendre. *(AC fait varier les valeurs des deux curseurs, et on entend des notes plus ou moins aigues, et on voit en même temps, le cercle coloré en dégradés de bleus, avoir des divisions colorées radiales et angulaires plus ou moins nombreuses.).*

Alors, j'espère que ce n'est pas une note trop aiguë. Parce que je ne voulais pas vous faire entendre de notes trop aigues..., j'ai été gentil, je n'ai pas mis de notes trop aigues. Ça continue bien sûr, autant qu'on veut, etc.

Et alors on obtient ainsi vous voulez, donc, un spectre qui est le spectre du disque qui ressemble à ça, donc il continue indéfiniment, il continue indéfiniment.

Et vous voyez bien sûr qu'il ne ressemble en rien du tout au spectre qu'on avait tout à l'heure pour l'intervalle. Alors maintenant, allons un petit peu plus loin.

Prenons un objet toujours de dimension 2, prenons un objet qui est un carré maintenant. C'est comme si vous preniez un morceau de peau, que vous tendiez ce morceau entre si vous voulez un cadre, comme ça, carré, et vous tapez dessus.

Et maintenant, les vibrations que vous obtenez ont l'allure suivante. Ça va faire le bruit deux fois avant de donner ce qu'il faut. On va monter un petit peu plus haut. *(Sons du carré).* Bon, alors on voit à nouveau un spectre, le spectre ressemble à ça.

Il est très, très différent de ce qui se passait dans le cas du disque, parce que si vous voulez pour le cas du carré, ce n'est pas très difficile de faire le calcul. On s'aperçoit que les fréquences correspondantes sont les racines carrées des sommes de deux carrés, donc les nombres de la forme racine de n^2 plus m^2. Donc ça, c'est quelque chose qui est très simple à comprendre, qui est beaucoup plus simple à comprendre que les nombres qui intervenaient pour le disque. Ils sont très différents, ils sont très différents, mais ils ont, si vous voulez la même sorte de répartition à l'infini. On peut changer la couleur si on veut. Mais maintenant, venons-en à la sphère, donc, tout ça, ce sont des formes de dimension 2 et a priori, ce sont des formes très banales.

Quand je parle du disque, quand je parle du carré ou quand je parle de la sphère, je veux dire le titre du colloque, c'est *La vie des formes*. Donc, il faut les faire vivre. Et pour les faire vivre, il faut les faire vibrer.

Et à partir du moment où on les fait vibrer, on s'aperçoit que, bien que ce soit des formes qui ont un air extrêmement simple, extrêmement banal, extrêmement élémentaire, lorsqu'on les fait vibrer, les vibrations elles-mêmes décorent ces formes de manière extrêmement harmonieuse et extrêmement non triviale. Alors, si on prend la 2-sphère, si on prend la sphère ronde, son spectre, cette fois, est très, très simple. C'est aussi formé des entiers, exactement comme dans le cas d'une corde.

Mais ces entiers apparaissent cette fois avec une certaine multiplicité, c'est à dire que ce n'est pas exactement des entiers. C'est plus exactement racine de $J(J+1)$. C'est pratiquement un entier, donc ça ressemble énormément à ce qui se passait dans le cas du cercle ou de l'intervalle. Mais ils apparaissent avec une multiplicité.

Alors maintenant, si on prend la sphère, alors là, j'ai peur que ce soit trop aigu.

Voyez ce qui se passe, c'est que si je prends par exemple le Spin=6, il y a un certain nombre de fréquences, comment dire, de ce qu'on appelle des fonctions propres qui existent, mais qui ont exactement la même, la même fréquence.

Comment dire ? Les formes sur la sphère sont différentes, le son qu'on entend est le même. Et ça, c'est ce qu'on appelle la multiplicité spectrale, c'est à dire que dans le spectre, ce qui va se produire, c'est qu'on va avoir la même valeur, mais elle va se produire plusieurs fois. Donc, c'est ce qui se produit pour la sphère... Ala fin, j'y reviendrai pour la forme musicale, ça, on verra ça plus tard.

Donc maintenant, je vais passer au déroulement normal à partir du pdf. Donc je vais faire ça.

Donc on a ces deux questions, on a ces deux questions, de définir un invariant complet d'une forme.

Alors en fait, on sait depuis un article fameux de John Milnor dans les années 60, que le spectre d'une forme ne suffit pas à caractériser cette forme.

C'est un merveilleux article de mathématiques. C'est un des rares articles de mathématiques qui n'a qu'une page. Et ce qu'a fait Milnor, c'est quelque chose de remarquable. Il a utilisé un résultat de Witt pour voir qu'il existe des tores, ces tores sont de dimensions assez grandes, ce ne sont pas des tores de dimensions basses. Mais il existe des tores, qui sont différents géométriquement, mais qui ont exactement la même gamme de manière identique. Et ça, ça vient d'un résultat de théorie des nombres. Parce que, bien sûr, la gamme associée à une forme avec toute sa subtilité, comme on vient de le voir dans les exemples que je vous ai montrés, cette gamme a bien sûr une relation très profonde avec l'arithmétique, l'arithmétique au sens le plus naïf, l'arithmétique de la première gamme de tous ces entiers.

Mais en gros, à chaque forme est associée une arithmétique, et c'est l'arithmétique de la gamme qu'elle nous donne de manière naturelle par les sons qu'elle produit.

Alors donc, ce qui est très, très intéressant, c'est que comme j'expliquerai donc, l'invariant qui manquait par rapport à l'invariant spectral, c'est un invariant dont on verra qu'il est relié, en fait, à ce que les physiciens appellent la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Et c'est un invariant qui mesure en fait un angle entre deux algèbres et qui généralise un peu ce que faisaient les physiciens lorsqu'ils regardent ce qui se passe avec les quarks. Et ça, j'en parlerai.

Mais ne vous inquiétez pas du tout du côté technique de cette page. Donc, on a vu les vibrations du disque.

On a vu des exemples de vibrations des disques, on a vu les fréquences propres du disque qui, comme je vous le disais, ne sont pas si simples qu'elles n'en ont l'air. On a vu son spectre avec le début du spectre. On a vu, maintenant, je mets plus de fréquences propres pour le disque et vous voyez que ça commence à avoir une allure. Cette courbe là, elle commence à avoir l'allure de quoi... elle commence à avoir l'allure d'une parabole. Et plus on va rajouter de fréquences, plus on va aller à hautes fréquences, plus elle va ressembler à une parabole. Voyez si vous prenez le disque où les valeurs propres sont difficiles à calculer, la gamme est difficile à calculer, mais si vous regardez la gamme, mais maintenant de très loin, c'est-à-dire vous regardez les hautes fréquences et vous mettez toutes ces fréquences ensemble, vous voyez que ça, ça ressemble de plus en plus à une parabole et il y a un fameux théorème d'Hermann Weyl qui date des années 30 et qui dit que cette parabole a un invariant, si vous voulez, qui est comment elle est angulée ou pas, cet invariant donne exactement dans le cas des surfaces, dans le cas des formes de dimension 2, donne exactement la surface de la forme, d'accord. Donc vous voyez, on peut mesurer l'aire de la forme de dimension 2 simplement en regardant cette parabole. Ça, c'est ce qu'a démontré Hermann Weyl.

Alors on a vu également ce qui se passe pour le carré. Je vous avais montré les quelques vibrations du carré tout à l'heure. Le spectre du carré, comme je le disais, est extrêmement simple. Ce sont les nombres qui sont les racines carrées de n^2 plus m^2. C'est ça, les vibrations du carré.

Bien sûr, je ne veux pas vous embêter avec des formules mathématiques, mais ça, ça vient de l'équation de Helmholtz, on regarde le laplacien, et on regarde l'équation des ondes.

Donc le spectre du carré, on regarde les fréquences propres du carré, voyez, elles ressemblent un petit peu, de loin, à ce qui se passait tout à l'heure pour le disque. On regarde hautes fréquences, on regarde hautes fréquences, ça oscille un peu. Et puis, on va regarder maintenant très hautes fréquences, très hautes fréquences, vous voyez, c'est incroyable, on voit vraiment une parabole, ça se distingue à l'œil nu, absolument une parabole. Cette parabole, justement, son invariant, c'est l'aire du carré.

Alors, on regarde la sphère aussi. Le spectre de la sphère, comme je le disais, c'est pratiquement les entiers, ce sont les nombres de la forme racine carrée de $J(J+1)$.

Voilà si vous regardez les fréquences propres de la sphère, ça vous donne ça, les fréquences propres de la sphère ? *(On voit une parabole, mais elle a comme des marches d'escalier.)* Pourquoi ça a l'air comme ça, par étages ? Eh bien, c'est parce que justement, vous avez la même fréquence qui va se répéter un tas de fois. D'accord, donc, c'est quelque chose qui est par étages comme ça.

Alors vous vous dites “Mais ça, ça n'a pas l'air du tout d'une parabole.”.

Ça n'a pas trop l'air d'une parabole, mais c'est parce que vous ne regardez pas assez les hautes fréquences. Et si maintenant vous regardez à beaucoup plus hautes fréquences, vous voyez qu'il y a encore des petits étages, bien sûr.

D'accord, mais ça ressemble de plus en plus à une parabole et ça va vous donner l'aire de la sphère. D'accord.

Bon. Alors, qu'est-ce que ceci a à voir avec le problème qu'on avait au départ, donc qui était le problème de dire où nous sommes de manière précise ?

Si on veut dire où nous sommes. Il faut dire deux choses :

Il faut dire dans quel univers nous sommes et à quel point de cet univers nous sommes d'accord. Pour dire dans quel univers nous sommes en fait, ce que je prétends, c'est que ce qu'il faut donner, ce sont justement les fréquences de vibration de cet univers, la première chose à donner. Et comment donc on le fait ? On le fait si vous voulez, il y a une chose très intéressante qui se produit, c'est que lorsqu'on part au niveau de Mark Kac, et au niveau de “Est-ce qu'on peut entendre la forme d'un tambour ?, etc.”, on se préoccupe de l'équation des ondes et on se préoccupe de ce qu'on appelle un opérateur que les mathématiciens appellent le laplacien, qui s'appelle le laplacien, qui s'appelle Δ, mais lorsqu'on écrit l'équation des ondes, si vous voulez, en fait, on écrit cette équation sous la forme delta d'une fonction plus k deux fois f égale 0. *(AC écrit au tableau $\Delta f + k^2 f = 0$.)*

Ça, c'est l'équation de Helmholtz. Et lorsqu'on écrit cette équation de Helmholtz, on voit que le nombre k qui apparaît, ça va être, si vous voulez, ce qu'on appelle des valeurs propres de $-\Delta$, mais ça n'est pas k, car c'est k^2 qui est une valeur propre de $-\Delta$, et donc en fait, le nombre k qui apparaissait, dans tous les exemples que je vous ai donnés, c'est un nombre qui est valeur propre de la racine carrée de $-\Delta$.

Alors Δ, c'est ce qu'on appelle un opérateur différentiel elliptique et sa racine carrée, c'est pas quelque chose de très joli.

Et alors heureusement, il y a un physicien, qui est Paul Dirac, qui a trouvé un moyen d'extraire une racine carrée de l'opposé du laplacien de manière esthétique et de manière telle que ce soit un opérateur différentiel. C'est ce qu'on appelle l'opérateur de Dirac.

Alors, ce qui fait que dans tous les exemples que je vous ai donnés, en fait, c'est beaucoup plus naturel et important de donner pour une forme géométrique, de donner non pas le spectre du laplacien, ça ferait pas de différence pratiquement pour tous les exemples que je vous ai donnés mais de donner le spectre de l'opérateur de Dirac. Donc ça, c'est une chose très importante. Bon, c'est la première chose, c'est à dire que ce qu'on va regarder, en gros, c'est une racine carrée de Δ, donc ça ne va pas changer beaucoup. Donc on va, on va donner l'ensemble de ses valeurs propres. On va donner sa gamme. Si vous voulez. Et maintenant, ce qui est assez extraordinaire, c'est qu'il y a moyen de trouver un invariant complémentaire de cette gamme.

Et en gros, cet un invariant complémentaire, ça va être une prescription, on va donner les accords possibles sur cette gamme.

On va donner un ensemble d'accords possibles, mais l'origine, l'origine de cet invariant : il vient de la physique, de la physique et de ce qu'on appelle en physique... Si vous voulez, en physique, il y a des phénomènes assez compliqués qu'on appelle les interactions faibles et dans l'interaction faible, les gens se sont aperçus qu'il y avait ce qu'on appelle des courants qui permettaient de changer de "*flavor*", c'est à dire de famille. C'est à dire que, par exemple, pour les quarks, vous avez les quarks qu'on connaît qui sont les up and down, qui sont les quarks principaux, qui forment les neutrons, les protons, etc.

Mais vous avez d'autres quarks, il y a deux autres familles de quarks. Eh bien, il y a des interactions en physique qui permettent de changer..., qui permettent de passer d'une famille de quarks à une autre famille de quarks, c'est ce qu'on appelle "flavor changing neutral current", et les physiciens ont compris que ce qui mesurait si vous voulez, ces courants qui permettent de changer de famille, c'était en fait un angle entre deux algèbres commutatives, mais très simple dans leur cas. Ça a d'abord été trouvé par Cabibbo, puis ensuite par Kobayashi et Maskawa. Et c'est ce qu'on appelle la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Et ce que ça fait, c'est que ça mesure, si vous voulez, en fait, l'angle entre deux algèbres. Et ce qui est assez extraordinaire, c'est que bon, en fait, ce sont des algèbres dans un espace de dimension 3. Donc c'est quelque chose de très simple. Et pourtant, un nombre complexe apparaît et c'est ça qui a fait la violation de ce qu'on appelle CP en physique.

Alors maintenant, ce qui est tout à fait amusant, c'est que si on généralise cette idée, on obtient une solution au problème de tout à l'heure, c'est-à-dire qu'on obtient un autre invariant qui n'est pas seulement le spectre de l'opérateur de Dirac. Donc, le premier invariant, si vous voulez, c'est le spectre de l'opérateur de Dirac.

C'est très important *(AC écrit Spec D à la craie au tableau.)*. C'est la gamme, si vous voulez. D'accord. Bon, mais il y a un deuxième invariant. Et quel est ce deuxième invariant ? Eh bien ce deuxième invariant, c'est aussi un angle.

Ce n'est pas un nombre, c'est un angle, c'est un angle. C'est une notion beaucoup plus compliquée. C'est un angle entre deux algèbres. Alors il y a l'algèbre des fonctions de l'opérateur de Dirac.

Ça veut dire que vous regardez tous les opérateurs qui sont diagonaux dans la même base que l'opérateur de Dirac, qui est la base des fonctions propres et une autre algèbre, qui est l'algèbre des fonctions sur l'espace dans lequel vous êtes, sur la forme dans laquelle vous travaillez.

Et alors, il y a un merveilleux théorème de von Neumann qui date d'années, d'il y a très, très longtemps et qui dit que la représentation de cette algèbre dans l'espace de Hilbert est indépendante de la forme que vous choisissez. C'est à dire que si vous prenez n'importe quelle forme, soit une sphère, un disque, une forme de dimension plus élevée, etc., eh bien, l'algèbre des fonctions va agir toujours de la même manière dans l'espace de Hilbert.

Donc, la seule chose qui va manquer pour compléter le tableau, ça va être la position relative de ces deux algèbres et la position relative de ces deux algèbres, en fait, elle est spécifiée par une série d'accords.

Bon, c'est une série continue d'accords, qui sont formulés sur la gamme et maintenant donc, ce qui se produit, c'est que... donc, on a ces deux invariants et comment doit-on interpréter un point, donc un point en fait, si on regarde de ce point-de-vue-là, un point, il est donné par des corrélations entre des fréquences différentes. Alors, vous pouvez penser à ces corrélations, ce sont des nombres complexes. Mais vous pouvez exactement penser à ces corrélations entre des fréquences différentes comme un accord. Un accord, on prend un accord entre ces notes et c'est ça, un point, c'est ça, d'accord. Donc réfléchissez dans votre tête, et gardezqu' un objet géométrique, une forme géométrique est donnée par sa musique, par sa gamme, et elle est donnée par sa gamme et l'ensemble des points est donné par l'ensemble des accords possibles et un point est donné par un accord.

Bon, alors donc si on continue, de ce point-de-vue-là, on s'aperçoit (on peut baisser la lumière, là, c'est bon).

Donc on s'aperçoit que c'est assez étonnant de voir à quel point ce point-de-vue dont je viens de parler est proche en fai t de la réalité physique. Pourquoi ?

Parce que maintenant, l'homme a évolué, peut être par sélection naturelle, suffisamment pour pouvoir regarder l'univers. Il a un œil. Cet œil, c'est Hubble. Son œil actuel, c'est le télescope Hubble. Avec ce télescope, l'homme regarde l'univers. Je vous conseille à tous de tous les matins vous brancher sur le site de la NASA qui donne chaque matin une image nouvelle. C'est fait à un rythme quotidien et chaque jour, vous pouvez regarder l'univers et vous aurez une image différente de l'univers.

Et ce qui est étonnant, ce qui est vraiment étonnant, c'est que l'information qui nous vient de l'univers, elle est spectrale. Et non seulement cette information nous renseigne, par le spectre, sur la composition des étoiles très, très lointaines ou des nuages intergalactiques, etc., simplement par leur spectre, mais en plus, elle nous renseigne sur leur origine. Et comment nous renseigne-t-elle sur leur origine ? Parce que par effet Doppler, plus les choses sont distantes, plus il y a ce qu'on appelle le redshift, alors le redshift, naïvement, si vous êtes très naïf, vous pensez que le redshift, vous allez prendre le spectre et vous allez le décaler comme ça par une translation. Mais ce n'est pas vrai. Le redshift, c'est une multiplication. Ce n'est pas un décalage, c'est une multiplication. C'est à dire qu'on prend toutes les fréquences et on les multiplie par un même nombre. Et ce qui est vraiment étonnant dans le redshift, c'est que maintenant, on observe, on observe... Alors pourquoi est-ce qu'on sait que c'est la même chose qu'on voit ? Eh bien, par le fait que la gamme est la même.

Elles se ressemblent, bien sûr. Donc, vous voyez bien qu'à gauche, vous allez avoir une certaine disposition dans la gamme. Elle va se retrouver à droite, mais elle ne va pas se retrouver au même endroit et elle va se retrouver décalée, mais pas décalée par une translation, décalée par une homothétie, c'est-à-dire qu' on multiplie tous les nombres par quelque chose. Et ce qui est extraordinaire, c'est que c'est grâce à ce shift qu'on peut remonter dans le temps. On mesure maintenant des redshifts qui sont de l'ordre de 10, mais en fait, on s'attend à des redshifts de l'ordre de 1000, etc., etc., et qu'ils correspondent, bien sûr, à des temps de plus en plus reculés.

Donc, c'est vraiment étonnant, c'est vraiment étonnant que ce point de vue sur les formes soit aussi proche du point de vue que les mathématiques abstraites suggèrent sur les formes.

Et d'autre part, il y a une autre chose qui est extrêmement importante, c'est que, bien sûr, nous ne pouvons pas nous déplacer pour le moment, mais sans doute pour toujours vers d'autres galaxies. Et donc, c'est un acte de foi que nous faisons, de savoir que ces choses-là existent quelque part. Et cet acte de foi, il vient précisément du fait des corrélations qu'il y a entre les différentes fréquences et l'image que je vais vous montrer maintenant, c'est une image de la Voie lactée.

Mais c'est une image qui n'est pas du tout prise dans le visible. C'est une image qui est prise dans des longueurs d'ondes qui sont totalement invisibles. D'accord, alors, c'est absolument hallucinant et incroyable que justement, il y a tellement de corrélations entre ces différentes fréquences qu'en fait, ces images sont compatibles. Et voilà une image, donc, de la Voie lactée, prise dans des fréquences qui ne sont absolument pas visibles, mais qui, justement, sont corrélées avec les images dans le visible et nous assurent donc qu'il y a bien là une cohérence, d'accord.

Alors maintenant, quand je préparais cet exposé, j'ai mis un temps fou à préparer cet exposé. Pourquoi ? Parce que bon, bien sûr, on m'avait donné une règle qui était qu'il ne fallait pas montrer d'images comme celle-là qui n'ait pas été approuvée par l'auteur de l'image, etc. Alors, je m'étais dit "ça, peut être j'y arriverai.".

Mais par contre, je ne l'avais pas pour toutes les autres images que je voulais montrer sur les sphères. Donc, je me suis collé à le faire à l'ordinateur et ça m'a pris beaucoup de temps. Et puis, à un moment donné, je voulais me relaxer un peu et je me suis dit "Oh ben, je vais jouer *Au clair de la lune*, je vais jouer *Au clair de la lune* sur la gamme de l'objet le plus simple, c'est à dire la corde vibrante.

J'ai essayé et c'est là que je me suis aperçu que la première note qu'il fallait que je fasse, c'était 131. Je me suis dit "Il y a quelque-chose de bizarre.".

Donc, je me suis posé le problème. Je me suis posé le problème de trouver une forme musicale.

Alors, qu'est ce que j'entends par là ? Eh bien, j'entends par là que quand vous faites de la musique, on va le voir tout de suite, quand vous faites de la musique, en fait, c'est pas du tout les entiers 1, 2, 3, 4, 5, etc., comme fréquences qui sont utilisées ? Absolument pas, ce sont les puissances d'un même nombre, les puissances d'un même nombre, c'est à dire on a un nombre q. Et on regarde les nombres q^n, c'est ça qui compte, parce que ce sont les rapports entre fréquences qui comptent. Et la merveille qui fait que la musique du piano existe, qu'on appelle *Le clavecin bien tempéré*, etc., c'est le fait arithmétique qui existe, qui fait que si on prend le nombre 2 à la puissance un douzième, si vous prenez la racine douzième de deux, c'est très, très proche de la racine dix-neuvième de trois.

Voyez, j'ai donné ces nombres-là. Vous voyez que la racine douzième de 2, c'est 1,059..., etc. La racine dix-neuvième de trois, c'est 1,059... D'où vient le 12 ?

Le 12 vient du fait qu'il y a 12 notes lorsque vous faites la gamme chromatique. Et le 19 vient du fait que 19, c'est 12+7 et que la septième note dans la gamme chromatique, c'est la gamme qui vous permet de transposer. Alors, qu'est ce que ça veut dire ? Ça veut dire que passer à la gamme d'au-dessus, c'est la multiplication par deux et l'oreille est très sensible à ça. Et transposer, c'est la multiplication par trois, sauf qu'on revient à la gamme d'avant, c'est à dire qu'on multiplie par 3/2, d'accord.

Bon, c'est ça la musique, bien connue maintenant, à laquelle l'oreille est sensible, etc. D'accord. Mais... il y a une question évidente ! C'est "existe-t-il un objet géométrique dont la gamme nous donne la gamme qu'on utilise dans la musique ?". C'est une question absolument évidente.

Si vous regardez ce qui se passe, comme ce sont les puissances de q, vous vous apercevez que la dimension de l'espace en question est forcément égale à 0. Pourquoi ? Parce que tout à l'heure, je vous avais montré ses limites. *(s'interrompt pour dire à quelqu'un "J'arrive.")*. Donc, je vous avais montré *(s'interrompt pour dire à la personne "J'en ai encore pour 5 mn.")*. Je vous avais montré tout à l'heure que les objets avaient une gamme qui ressemblait à une parabole quand ils étaient de dimension. 2. Quand un objet est de dimension plus grande, ça va être un truc un petit peu plus compliqué qu'une parabole.

Par exemple, si c'est en dimension 3, ça va être $y = x^{\frac{1}{3}}$, d'accord, mais ici, c'est pas du tout un truc qui est rond comme une parabole comme ça *(AC dessine une parabole en l'air)*. C'est quelque-chose qui pffuiittt ! *(AC fait le geste d'une exponentielle en l'air.)* qui fout le camp en l'air comme ça. Et ce que ça vous dit, c'est que l'objet en question doit être de dimension 0. Donc, vous vous dites, "un objet de dimension 0, qu'est ce que ça veut dire ? etc. Bon.".

Eh bien, quand vous développez la géométrie, ce que j'ai fait pendant des années et des années, du point de vue spectral et ce qu'on appelle la géométrie non-commutative, etc., eh bien, vous apercevez en fait que ces objets existent avec une petite nuance, c'est que l'algèbre qui va être, qui va intervenir ne va pas nécessairement être commutative.

Et la merveille des merveilles, c'est que je me suis aperçu, en préparant mon exposé, qu'il existait un objet bien connu des mathématiciens, qui font de la géométrie non-commutative ou des choses quantiques, qui marche pour cette chose-là et qui vous donne la bonne gamme.

Et qu'est ce que c'est que cet objet ? Ce n'est autre que ce que l'on appelle la sphère quantique S^2 indice q. Alors, cet objet donc est un objet plus délicat. Il a été considéré en particulier par ces trois noms *(sur le transparent sont notés les noms Poddles, Brain et Landi)*. Il a un spectre, il a un spectre. Et ce spectre ? Si vous choisissez bien le nombre q, il va correspondre exactement au spectre musical.

Alors, je reviens donc maintenant à mes expérimentations et je termine là-dessus. Donc je vais essayer. J'espère que ça va marcher. Alors on va revenir à l'expérimentation. Donc, on avait fait la sphère et maintenant, on recherche cette forme musicale qui va être de dimension 0. Bon, alors on va essayer de jouer *Au clair de la lune.* Comme je suis fatigué, je vais sûrement me tromper. Mais c'est pas grave. Alors voyez. *(AC revient à un spectre arc-en-ciel et joue* Au clair de la lune *sur un clavier de bouton indicé par les entiers, 25-25-25-27-29-27-25-29-27-27-25. 27-27-27-27-24 se trompe, joue un si au lieu d'un la, rires, se reprend, etc... applaudissements et extase !).*

Alors maintenant, ce qui est absolument extraordinaire avec cette gamme, c'est... Est-ce-que quelqu'un peut me donner un chiffre, au dessus de 10 quand même ? *(On voit Jean-Pierre Changeux qui attend positionné au bureau pour donner son propre cours.)*

13, très bien. Eh bien, je vais voir, je vais ré-essayer, mais je ne promets rien, de vous jouer *Au clair de la lune* en partant de 13 *(AC joue 13-13-13-15-17-15-13-17-15-15-13...)*

(Au moment de chercher la note la plus basse écartée des autres, AC dit "Alors il ne faut pas que je me trompe, là, sinon vous allez m'engueuler...". Ré-applaudissemets.)

Je terminerai en disant la chose suivante, si vous voulez, c'est que "rien n'est trop beau pour être réalisé dans la Nature". Récemment, le prix Nobel de chimie a été décerné à un chimiste qui a découvert les quasi-cristaux, qui ont une merveilleuse histoire mathématique, dans la Nature. Ce que j'espère, c'est qu'un jour, on trouvera la sphère non-commutative S_q^2 dans la nature et qu'on pourra l'utiliser comme instrument de musique, et ce sera un instrument merveilleux parce qu'il ne se désaccordera jamais. Voilà. Merci.

(Applaudissements).