

- la case (i, j) est colorée en gris si $2j + 1$ divise p (le $i^{\text{ème}}$ nombre impair à partir de 3) sans diviser $q = 2x - p$;
- la case (i, j) est colorée en bleu si $2j + 1$ divise q sans diviser p ;
- la case (i, j) est colorée en gris et contient un B (on la dit *mixte*) si $2j + 1$ divise à la fois p et q ;
- la case (i, j) est colorée en blanc sinon.

Quelques remarques :

- notre choix de modélisation ne permet pas le repérage des décompositions de Goldbach de $2x$ qui font intervenir un “petit premier” (i.e. les décompositions de $2x$ en $p + q$ avec p nombre premier impair inférieur à $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$) ;
- les lignes associées aux nombres composés n’ajoutent pas d’information supplémentaire (si un nombre composé x divise y , tout diviseur premier de x divise y également) mais dans la mesure où elles nous ont permis le repérage de certaines régularités, on les a conservées dans les grilles fournies en annexe ;
- les cases grises et mixtes “ne bougent pas” dans les grilles (i.e. ne changent pas de position) alors que les cases bleues avancent systématiquement d’une colonne vers la droite.

Puis, on associe à chaque colonne une lettre, selon les couleurs des cases qu’elle contient et on obtient ainsi pour chaque nombre pair un mot (selon la théorie des langages), constitué de différentes lettres. L’association d’une lettre à chaque colonne s’effectue de la façon suivante :

- on associe la lettre V à une colonne ne contenant que des cases blanches ;
- on associe la lettre G à une colonne ne contenant que des cases grises ou blanches ;
- on associe la lettre B à une colonne ne contenant que des cases bleues ou blanches ;
- on associe la lettre M à une colonne contenant soit au moins une case grise et une case bleue, soit au moins une case mixte.

En annexe 2 sont fournis les mots associés aux nombres pairs compris entre 24 et 100.

On comprend aisément que les colonnes auxquelles est associée la lettre V correspondent aux décompositions de Goldbach de $2x$ en une somme $p + q$, avec $p \geq \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

3 Réécriture des mots

Puisqu’on a choisi une modélisation à quatre couleurs, on obtient 16 possibilités d’associations de couleurs pour deux colonnes successives et on va étudier s’il existe des règles de réécriture qui permettent de déduire les couleurs de deux colonnes successives de la grille associée au nombre pair $2x + 2$ à partir de

celles des mêmes colonnes de la grille associée au nombre pair $2x$. Ces règles de réécriture sont les suivantes :

$$\begin{array}{l}
 GG \rightarrow MG \\
 GB \rightarrow GV \text{ ou } GG \text{ ou } MV \text{ ou } MG \\
 GM \rightarrow GG \text{ ou } MG \\
 GV \rightarrow MV \\
 BG \rightarrow VM \text{ ou } BM \text{ ou } MM \\
 BB \rightarrow VB \text{ ou } BB \\
 BM \rightarrow VM \text{ ou } GM \text{ ou } BM \text{ ou } MM \\
 BV \rightarrow BB \text{ ou } MB \text{ ou } VB \\
 MG \rightarrow GM \text{ ou } MM \\
 MB \rightarrow GB \text{ ou } GM \text{ ou } MB \text{ ou } MM \\
 MM \rightarrow GM \text{ ou } MM \\
 MV \rightarrow GB \text{ ou } GM \text{ ou } MB \text{ ou } MM \\
 VG \rightarrow BG \\
 VB \rightarrow BV \\
 VM \rightarrow BG \text{ ou } VG \\
 VV \rightarrow BV \text{ ou } MV
 \end{array}$$

Le gros problème est qu'il y a non-déterminisme quant au résultat obtenu par la plupart des règles.

Après analyse de ces règles de réécriture, on peut envisager deux raisonnements qui permettraient de déduire que le mot associé à tout nombre pair contient au moins un V (i.e. que le nombre pair en question admet au moins une décomposition de Goldbach) :

- on peut constater que les paires de lettres GV, VB et VV assurent d'obtenir un V dans le mot transformé ; on pourrait essayer de démontrer qu'à partir d'un certain rang, le mot associé à un nombre pair contient toujours l'une de ces configurations au moins ;
- on peut également réaliser que toutes les règles de réécriture sauf celles concernant 4 paires de lettres ne font pas diminuer strictement le nombre de V (les règles de réécriture "risquant la diminution du nombre de V" sont celles des paires BV , MV , VG et VM). Il faudrait être capable de démontrer que les mots ne peuvent contenir uniquement ces 4 configurations "problématiques", en ce sens qu'elles pourraient entraîner une diminution du nombre de V qui pourrait alors s'annuler.

Annexe 1 : Grilles associées aux nombres pairs de 24 à 100

Feuille1

24

21	19	17	15	13
3	5	7	9	11

26

23	21	19	17	15	13
3	5	7	9	11	13

28

25	23	21	19	17	15
3	5	7	9	11	13

30

27	25	23	21	19	17	15
3	5	7	9	11	13	15

32

29	27	25	23	21	19	17
3	5	7	9	11	13	15

34

31	29	27	25	23	21	19	17
3	5	7	9	11	13	15	17

36

33	31	29	27	25	23	21	19
3	5	7	9	11	13	15	17

38

35	33	31	29	27	25	23	21	19
3	5	7	9	11	13	15	17	19

40

37	35	33	31	29	27	25	23	21
3	5	7	9	11	13	15	17	19

