Minimiser / Maximiser

Denise Chemla

10 novembre 2013

1 Minimiser la somme des sommes des diviseurs d'Euler des deux décomposants

Quand j'ai trouvé l'article d'Euler *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs* sur Gallica, j'ai été subjuguée. C'était quasiment le seul texte en français d'Euler. Mais surtout s'en dégageait tout son émerveillement pour les nombres premiers. La manière dont il amène sa récurrence est superbe. Même le fait de la programmer ne m'a pas permis d'en pénétrer le sens : elle reste hermétique. Ce qui est génial également dans le texte, c'est la manière dont Euler obtient les nombres pentagonaux en faisant des différences entre la suite des entiers et la suite des impairs (p.245). On peut penser que puisqu'on peut calculer les sommes de diviseurs par une récurrence, il doit être possible de calculer la somme des décomposants de Goldbach par une récurrence également, ou bien leur nombre, qui sait ? (toutes ces fonctions sont des fonctions arithmétiques (cf mon travail sur les comètes à Noël 2010).

244 DÉCOUVERTE D'UNE LOI TOUT EXTRAORDINAIRE DES NOMBRES [14—15

$\int 1 = 1$	$\int 21 = 32$	$\int 41 = 42$	$\int 61 = 62$	$\int 81 = 121$
$\int 2 = 3$	$\int 22 = 36$	$\int 42 = 96$	$\int 62 = 96$	$\int 82 = 126$
$\int 3 = 4$	$\int 23 = 24$	$\int 43 = 44$	$\int 63 = 104$	$\int 83 = 84$
$\int 4 = 7$	$\int 24 = 60$	$\int 44 = 84$	$\int 64 = 127$	$\int 84 = 224$
$\int 5 = 6$	$\int 25 = 31$	$\int 45 = 78$	$\int 65 = 84$	$\int 85 = 108$
$\int 6 = 12$	$\int 26 = 42$	$\int 46 = 72$	$\int 66 = 144$	$\int 86 = 132$
$\int 7 = 8$	$\int 27 = 40$	$\int 47 = 48$	$\int 67 = 68$	$\int 87 = 120$
$\int 8 = 15$	$\int 28 = 56$	$\int 48 = 124$	$\int 68 = 126$	$\int 88 = 180$
$\int 9 = 13$	$\int 29 = 30$	$\int 49 = 57$	$\int 69 = 96$	$\int 89 = 90$
$\int 10 = 18$	$\int 30 = 72$	$\int 50 = 93$	$\int 70 = 144$	$\int 90 = 234$
$\int 11 = 12$	$\int 31 = 32$	$\int 51 = 72$	$\int 71 = 72$	$\int 91 = 112$
$\int 12 = 28$	$\int 32 = 63$	$\int 52 = 98$	$\int 72 = 195$	$\int 92 = 168$
$\int 13 = 14$	$\int 33 = 48$	$\int 53 = 54$	$\int 73 = 74$	$\int 93 = 128$
$\int 14 = 24$	$\int 34 = 54$	$\int 54 = 120$	$\int 74 = 114$	$\int 94 = 144$
$\int 15 = 24$	$\int 35 = 48$	$\int 55 = 72$	$\int 75 = 124$	$\int 95 = 120$
$\int 16 = 31$	$\int 36 = 91$	$\int 56 = 120$	$\int 76 = 140$	$\int 96 = 252$
$\int 17 = 18$	$\int 37 = 38$	$\int 57 = 80$	$\int 77 = 96$	$\int 97 = 98$
$\int 18 = 39$	$\int 38 = 60$	$\int 58 = 90$	$\int 78 = 168$	$\int 98 = 171$
$\int 19 = 20$	$\int 39 = 56$	$\int 59 = 60$	$\int 79 = 80$	$\int 99 = 156$
$\int 20 = 42$	$\int 40 = 90$	$\int 60 = 168$	$\int 80 = 186$	$\int 100 = 217.$

Je ne doute pas que, pour peu qu'on regarde la progression de ces nombres, on ne désespere presque d'y découvrir le moindre ordre, vu que l'irrégularité de la suite des nombres premiers s'y trouve entremêlée tellement, qu'il semblera d'abord impossible d'indiquer quelque loi que ces nombres observent

Page de l'article d'Euler ***Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs***

$$\sigma(n) = \frac{12}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (5k(n-k) - n^2).\sigma(k).\sigma(n-k)$$

Formule récursive fournie par Giard dans la séquence de l'OEIS *A*000203

On peut voir les nombres premiers comme des minima locaux de la fonction somme des diviseurs, notée $\sigma(x)$ ci-dessus, mais notée avec le signe de l'intégrale dans l'article d'Euler. $\sigma(p) = p+1$ pour p premier et $\sigma(c) > c+1$ si c est composé. On voit alors les décomposants de Goldbach comme minimisant $\sigma(p) + \sigma(n-p)$ pour n pair fixé, en rendant d'ailleurs $\sigma(p) + \sigma(n-p)$ égal à $n+2$.

On peut trouver sur la toile la formule récursive fournie par M. Giard. Elle provient de la théorie des fonctions modulaires[1]. On pourrait trouver exactement d'où elle provient mais là n'est pas le but.

[1] et de l'équation de Chazy ; ce domaine est hors d'atteinte des novices.

Le souhait était alors d'utiliser cette formule pour trouver par calcul un décomposant de Goldbach de n en disant que c'est une solution p de l'équation

$$\sigma(p) + \sigma(n-p) - n - 2 = 0.$$

On a essayé sans succès mettre la formule sous une autre forme ("dérécursiver la formule" en jargon informatique), de manière à trouver plus directement une solution. On aimerait savoir si une telle formule plus simple peut ou ne peut pas être trouvée.

2 Dualité

A travailler hier sur la manière dont les restes "tournent", on trouve l'idée suivante : partons du nombre 15 qui a pour reste $(0, 0)$ modulo 3 et 5 et considérons les nombres de 15 à 45. Considérons également les nombres premiers à 15 qui sont $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$. En ajoutant ces nombres à 15, après les avoir multipliés par 2 pour ne trouver que des impairs, on ne doit effectivement trouver que des nombres premiers puisqu'on obtient des nombres qui n'ont forcément aucun reste nul, modulo 3 et 5.

On vérifie effectivement que :

$$\begin{aligned}
15 + 2 \times 1 &= 17 \\
15 + 2 \times 2 &= 19 \\
15 + 2 \times 4 &= 23 \\
15 + 2 \times 7 &= 29 \\
15 + 2 \times 8 &= 31 \\
15 + 2 \times 11 &= 37 \\
15 + 2 \times 13 &= 41 \\
15 + 2 \times 14 &= 43
\end{aligned}$$

Du coup, on a l'idée suivante, duale de celle présentée au premier paragraphe, qui consistait à trouver les décomposants de Goldbach en minimisant la somme des sommes des diviseurs des deux décomposants.

L'idée duale est que trouver les décomposants de Goldbach doit également correspondre au fait de maximiser le produit des indicateurs d'Euler des deux décomposants.

Il semblerait que p un décomposant de Goldbach de n maximise le produit des indicateurs d'Euler des deux décomposants de la somme (il se produit seulement une exception pour le nombre pair 44 jusqu'à 10^6 : pour $n = 44$, et la décomposition $13+31$ et la décomposition $19+25$ maximise le produit qui prend la valeur 360, i.e. le maximum n'est alors pas un maximum "absolu" mais un maximum "ex-aequo").

$$p \text{ est un dg de } n \iff p = arg\_max_{p_i \leqslant n/2}[\varphi(p_i)\varphi(n-p_i)]$$

Dominique Ceugniet a vérifié cette idée par programme jusqu'à 7.10^6.

Galois, sagiol, lasoig, galios, etc.

L'étude des relations entre objets du même type est souvent très efficace pour étudier l'objet lui-même: «Dis-moi qui tu fréquentes, je te dirai qui tu es!»
Prenons une permutation quelconque des lettres du mot GALOIS. *Par exemple, celle qui transforme* GALOIS *en* SAGIOL. *Sur quelle configuration tomberons-nous si nous réitérons cette opération un nombre donné de fois, par exemple 647 fois? Une solution consiste à répéter 647 fois l'opération et à regarder la configuration obtenue, mais elle est fastidieuse et stupide, et les risques d'erreurs sont nombreux. Une seconde consiste à «décortiquer» la transformation. Voyons où cela nous mène.*
Tout d'abord cette transformation laisse fixe la lettre A, en deuxième position. Ensuite, les lettres G, L et S sont permutées circulairement: les lettres G, L et S s'échangent donc entre elles et, toutes les trois étapes, retrouvent leur disposition initiale. Enfin, les lettres O et I s'intervertissent: toutes les deux étapes, elles retrouvent leur disposition initiale. En d'autres termes, notre transformation est la composition d'une permutation circulaire d'ordre 3 affectant les lettres G, L, S et d'une transposition affectant les lettres O et I. Ainsi, pour tout nombre d'étapes multiple de 2 et de 3, c'est-à-dire multiple de 6, on retrouvera le mot GALOIS. *Le nombre 647 est égal à $6 \times 107 + 5$. À la $642^{\text{ème}}$ étape ($642 = 6 \times 107$), le mot obtenu est donc* GALOIS, *auquel il faut encore ajouter 5 étapes:* GALOIS, SAGIOL, LASOIG, GALIOS, SAGOIL, LASIOG. *À la $647^{\text{ème}}$ étape, le mot obtenu est donc* LASIOG. *L'intérêt d'une telle démarche est double: elle est rapide, efficace et sûre, et s'adapte à n'importe quelle transformation.*

Un exemple extrêmement pédagogique de "racines qui tournent", fourni par Norbert Verdier, dans le magazine Pour la Science Les génies de la Science consacré à Galois