

1 Une tentative de minoration probabiliste

Si on utilise les inégalités de Bonferroni, qui généralisent l'inégalité de Boole, et qui fournissent des majorants et des minorants de la probabilité d'unions finies d'événements, on voit que l'on peut minorer le nombre de décompositions de Goldbach pour les doubles de nombres premiers (de la forme $2p$) par :

$$\frac{2}{2} \frac{p}{2} \prod_{\substack{p_k=3, \\ p_k \text{ premier} \\ p_k \leq \lfloor \sqrt{2p} \rfloor}} \left(1 - \frac{2}{p_k}\right)$$

Cependant, par programme, la minoration n'a pas lieu avant même le double de nombre premier 200 006 comme attesté dans le tableau suivant :

n	$NbDG(n)$	<i>minoration proposée</i>
202	9	4,99451
2 018	28	26,8755
20 014	174	164,054
200 006	1 071	1 101,84
2 000 006	7 336	7 885,59
20 000 038	53 269	58 711,6

Si l'on poursuit le raisonnement, la minoration du nombre de décompositions de Goldbach pour les doubles de nombres composés (de la forme $2c$) devrait être quant à elle :

$$\frac{2}{2} \frac{c}{2} \prod_{\substack{p_k=3, \\ p_k \text{ premier}, \\ p_k \nmid c}}^{p_k \leq \lfloor \sqrt{2p} \rfloor} \left(1 - \frac{2}{p_k}\right) \prod_{\substack{p_k=3, \\ p_k \text{ premier}, \\ p_k | c}}^{p_k \leq \lfloor \sqrt{2p} \rfloor} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Dans la mesure où $1 - \frac{2}{p_k} < 1 - \frac{1}{p_k}$, un double de nombre composé devrait toujours avoir davantage de décompositions de Goldbach qu'un double de nombre premier le divisant. Le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair de la forme $6p$ devrait être approximativement le double de celle du nombre pair double de nombre premier de la forme $2p$ correspondant. Le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair de la forme $10p$ devrait être approximativement plus grande dans un rapport de $\frac{4}{3}$ que celle du nombre pair double de nombre premier de la forme $2p$ correspondant. Le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair de la forme $14p$ devrait être approximativement plus grande dans un rapport de $\frac{6}{5}$ que celle du nombre pair double de nombre premier de la forme $2p$ correspondant. Le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair de la forme $30p$ devrait être approximativement plus grande dans un rapport de $\frac{8}{3}$ que celle du nombre pair double de nombre premier de la forme $2p$ correspondant. Cependant, le tableau suivant montre qu'il y a beaucoup plus de décompositions de Goldbach que les minorations proposées :

$2p$	$6p$	$10p$	$14p$	$30p$
202	606	1 010	1 414	3 030
2 018	6 054	10 090	14 126	30 270
20 014	60 042	100 070	140 098	300 210
200 006	600 018	1 000 030	1 400 042	3 000 090
2 000 006	6 000 018	10 000 030	14 000 042	30 000 090
20 000 038	60 000 114	100 000 190	140 000 266	300 000 570

$NbDg(2p)$	$NbDg(6p)$	$NbDg(10p)$	$NbDg(14p)$	$NbDg(30p)$
9	27	25	30	110
28	140	136	157	629
174	809	806	957	3 951
1 071	5 306	5 421	6 405	27 311
7 336	37 319	38 805	46 681	201 989
53 269	278 690			