Deux par classe (Denise Vella-Chemla, juillet 2022).

1. Caractérisation des décomposants de Goldbach de n supérieurs à $\sqrt{n}$[1]

Soit $n \in 2\mathbb{N}+6$ un entier pair supérieur à 6.

Pour tout $p \in \mathbb{P}^*$ premier impair inférieur à $\sqrt{n}$ (*i.e.* $3 \leq p \leq \sqrt{n}$), on définit l'ensemble :

$$F_n(p) = \{m \in 2\mathbb{N}+1 : 3 \leq m \leq n/2,\ m \not\equiv 0\ [p],\ m \not\equiv n\ [p]\}$$

L'intersection des ensembles $F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$ est notée :

$$D_n = \bigcap_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ 3 \leq p \leq \sqrt{n}}} F_n(p)$$

Nous allons montrer que D_n et son complémentaire $n-D_n$ ne contiennent que des nombres premiers.
Lemme 1 : Soit $m \in 2\mathbb{N}+1$ un entier impair. Si m n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$, alors il est premier.

Démonstration : Si m est composé, on a $m = pq$, où p est le plus petit nombre premier intervenant dans la factorisation de m en nombres premiers et où q est le produit de tous les autres facteurs. Puisque m est impair, $p \geq 3$, et puisque $q \geq p$ (q étant le produit d'entiers $\geq p$), $m = pq \geq pp = p^2$ et donc $\sqrt{m} \geq p$ (la fonction racine carrée étant croissante). On a ainsi montré que si m impair est composé, il est divisible par un premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$. Le lemme s'obtient par contraposition. $\square$

Lemme 2 : $D_n \subseteq \mathbb{P}$

Démonstration : Soit $m \in D_n$. Alors $m \in F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$. Par conséquent, m est impair et m n'est divisible par aucun nombre premier p compris entre 3 et $\sqrt{n}$ (puisque $m \not\equiv 0\ [p]$), et donc *a fortiori* par aucun premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$ (car $m \leq n/2 \implies m \leq n \implies \sqrt{m} \leq \sqrt{n}$). D'après le lemme 1, m est donc premier. $\square$

Lemme 3 : $n - D_n \subseteq \mathbb{P}$

Démonstration : Soit $m \in D_n$. Alors $m \in F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$. Par conséquent, $n-m$ est impair (car m est impair et n pair) et $n-m$ n'est divisible par aucun nombre premier p compris entre 3 et $\sqrt{n}$ (puisque $m \not\equiv n\ [p]$), et donc *a fortiori* par aucun premier compris entre 3 et $\sqrt{n-m}$ (car $n-m \leq n \implies \sqrt{n-m} \leq \sqrt{n}$). D'après le lemme 1, $n-m$ est donc premier. $\square$

Les ensembles D_n ne contiennent que des décomposants de Goldbach de n.

[1] Leila Schneps a démontré que la caractérisation de certains décomposants de Goldbach que je proposais était justifiée.

Lemme 4 : Soit $n \in 2\mathbb{N}+6$. Si $D_n \neq \varnothing$, alors n vérifie la conjecture de Goldbach.

Démonstration : Si $D_n \neq \varnothing$, il contient un entier p nécessairement premier (d'après le lemme 1), tel que $q = n-p$ est également premier (d'après le lemme 2), et donc $n = p+q$ vérifie la conjecture de Goldbach.

2. Minoration du nombre de décomposants de Goldbach

La caractérisation de la Section 1 suggère que $\dfrac{n}{2}\prod\limits_{2<p\leqslant n}\left(1-\dfrac{2}{p}\right)$ doit minorer le nombre de décomposants de Goldbach d'un nombre pair : les "pires" des cas (ou cas "très criblants") adviennent lorsque le nombre pair est de la forme $2^k p$ avec p un nombre premier, car alors on élimine deux classes de congruences selon tout module premier inférieur à $\sqrt{n}$, et les cas "moins criblants" adviennent lorsque le nombre pair considéré a de nombreux diviseurs (comme le nombre 60 par exemple) car alors on ne doit éliminer qu'une seule classe de congruence au lieu de 2 selon chaque module premier divisant n.

On peut utiliser la formule 2.6 de [1] qui fournit l'estimation :

"(2.6)
$$\begin{aligned}\prod_{\alpha<p\leq x}\left(1-\frac{\alpha}{p}\right) &= \exp\left\{\sum_{\alpha<p\leq x}\log\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\right\}\\ &\cong \exp\left\{c_1(\alpha)-\alpha\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}\right\}\cong\frac{c(\alpha)}{(\log x)^{\alpha}},\end{aligned}$$

où α est une constante réelle, habituellement prise comme étant égale à 1."

Il est expliqué dans le paragraphe suivant de l'article de Rosser et Schoenfeld qu'il est possible d'utiliser les constantes $c(\alpha)$ et $c_1(\alpha)$ parce que l'erreur absolue tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

Pour avoir une idée de la constante $c(2)$, il est possible[2] de démontrer que

$$\left(\prod_{2<p\leqslant n}1-\frac{2}{p}\right)^{-1} = \frac{1}{4}e^{2\gamma}\Pi_2^{-1}\log^2 n + O(e^{-c\sqrt{\log n}})$$

avec $e = 2.71828, \gamma = 0.5772156649, \Pi_2 = 0.6601618158$[3].

On choisit de minorer le nombre de décomposants de Goldbach de n en utilisant la minoration

$$\begin{gathered}\#\{3\leq dg\leq n/2 \mid n = dg+(n-dg) \text{ avec } dg \text{ et } n-dg \text{ premiers}\}\\ \geq \frac{n}{2}\frac{4\Pi_2}{e^{2\gamma}}\frac{1}{\log^2 n}\end{gathered}$$

[2] Se reporter à https://math.stackexchange.com/questions/22411/computing-the-product-of-p-p-2-over-the-odd-primes?rq=1.

[3] Voir https://mathworld.wolfram.com/TwinPrimesConstant.html).

3. Résultats numériques.

On utilise le programme suivant :

```python
import math

def prime(atester):
  k = 2 ;
  if (atester in [0,1]): return False ;
  if (atester in [2,3,5,7]): return True ;
  while (True):
    if ((k * k) > atester): return True
    else:
      if ((atester % k) == 0): return False
      else: k=k+1

for n in range(6,100002,2):
  moitie = int(n/2)
  #if prime(moitie):
  if True:
    print('')
    print(n)
    nbdg = 0
    for p in range(3, moitie+1,2):
      if prime(p) and prime(n-p):
        nbdg += 1
    print('nbdg ', nbdg)
    estimproddespmoinsdeuxsurp = 0.8324290656/(math.log(n)**2)
    print('produit des p moins 2 sur p',estimproddespmoinsdeuxsurp)
    res = n*estimproddespmoinsdeuxsurp/2
    print(' que multiplie n/2 ', res)
    if res < nbdg:
      print('min reussi')
    else:
      print('min rate')
```

FIGURE 1 : Programme de minoration du nombre de décomposants de Goldbach d'un nombre pair.

pour vérifier que la minoration est effective pour tout n un nombre pair compris entre 6 et 10^5.

Le résultat de ce programme est consultable à l'adresse http://denise.vella.chemla.free.fr/respgm-prod-un-moins-deux-sur-p.pdf.

Référence

[1] J. B. Rosser, L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math., 6 (1962) 64-94.