*Primalité de nombres, comptage de lettres, régularités (Denise Vella-Chemla, 1.1.2016)*

Il s'agit d'étudier si certains comptages de lettres, codant certaines propriétés de nombres, permettraient de mettre au jour des régularités, qui amèneraient la possibilité d'effectuer certaines déductions.

On rappelle que deux nombres premiers jumeaux ont pour différence 2. Par exemple, 3 et 5 sont des nombres premiers jumeaux, 41 et 43 en sont également.

On définit deux fonctions $pp(n)$ ($pp$ pour *prec_premier*) et $sp(n)$ ($sp$ pour *succ_premier*) qui associent à un nombre pair $n$ deux booléens de primalité selon que $n-1$ et $n+1$ sont premiers ou non. Par convention, le booléen 0 signifie *premier* et le booléen 1 signifie *composé*. Par exemple, $pp(8) = 0$ car $8 - 1 = 7$ est premier tandis que $sp(8) = 1$ car $8 + 1 = 9$ est composé.

On définit $l(n)$ la lettre associée à un nombre pair $n$ qui vaut :

- $a$ si $pp(n) = 0$ et $sp(n) = 0$ (*ex* : $l(4) = l(18) = a$) ;
- $b$ si $pp(n) = 0$ et $sp(n) = 1$ (*ex* : $l(8) = l(24) = b$) ;
- $c$ si $pp(n) = 1$ et $sp(n) = 0$ (*ex* : $l(10) = l(22) = c$) ;
- $d$ si $pp(n) = 1$ et $sp(n) = 1$ (*ex* : $l(26) = l(34) = d$).

On définit 4 variables $X_a(n), X_b(n), X_c(n)$ et $X_d(n)$ de la façon suivante :

- $X_a(n) = \#\{x \text{ pair et } 3 \leq x \leq n \text{ et } l(x) = a\}$
  ($X_a(n)$ compte le nombre de couples de nombres premiers jumeaux inférieurs ou égaux à $n + 1$) ;
- $X_b(n) = \#\{x \text{ pair et } 3 \leq x \leq n \text{ et } l(x) = b\}$ ;
- $X_c(n) = \#\{x \text{ pair et } 3 \leq x \leq n \text{ et } l(x) = c\}$ ;
- $X_d(n) = \#\{x \text{ pair et } 3 \leq x \leq n \text{ et } l(x) = d\}$.

On introduit la notation $pi(n)$ qui compte le nombre de nombres premiers impairs inférieurs à $n$.

Sont fournies dans un tableau en fin de note les valeurs des variables pour les nombres de 4 à 100.

On constate les régularités suivantes :

1) pour les nombres $n$ de lettre $a$ ou $b$, $pi(n) = pi(n - 2) + 1$ (en effet, pour ces nombres $n$, $pp(n) = 0$, i.e. $n - 1$ est premier mais $n - 1$ n'a pas été compté comme nombre premier par $pi(n - 2)$, il faut donc ajouter 1 à $pi(n - 2)$ pour obtenir $pi(n)$) ;
2) pour les nombres $n$ de lettre $c$ ou $d$, $pi(n) = pi(n - 2)$ (pour la raison opposée à celle fournie dans la parenthèse ci-dessus) ;
3) pour les nombres $n$ de lettre $a$ ou $c$, $pi(n) = X_a(n) + X_c(n)$ et $X_b(n) = X_c(n)$ (et donc $pi(n) = X_a(n) + X_b(n)$) ; l'égalité $pi(n) = X_a(n) + X_c(n)$ se comprend aisément en montrant sur deux exemples qu'il y a autant de nombres premiers que de lettres qui se trouvent à leur gauche et qui sont des lettres $a$ ou des lettres $c$ (moyennant le passage imaginaire de la lettre $c$ à gauche de $n + 1$ devant le nombre 3 qui n'a pas de lettre à sa gauche - on a coloré les nombres premiers en rouge et les lettres qui se trouvent à leur gauche en bleu).

   *Illustration de* $pi(18) = 6 = X_a(18) + X_c(18) = 4 + 2$ :

   3 $a$ 5 $a$ 7 $b$ 9 $c$ 11 $a$ 13 $b$ 15 $c$ 17 $a$ (19)

   *Illustration de* $pi(28) = 8 = X_a(28) + X_c(28) = 4 + 4$ :

   3 $a$ 5 $a$ 7 $b$ 9 $c$ 11 $a$ 13 $b$ 15 $c$ 17 $a$ 19 $b$ 21 $c$ 23 $b$ 25 $d$ 27 $c$ (29)

Pour comprendre pourquoi $X_b(n) = X_c(n)$ pour les nombres de lettre $a$ ou $c$, il s'agit de voir chaque lettre $b$ comme signalant en quelque sorte l'entrée dans une séquence de nombres composés impairs successifs et chaque lettre $c$ comme signalant la sortie d'une telle séquence (des sortes de parenthèses ouvrantes et fermantes se correspondant). Notons d'une même couleur les deux lettres $b$ et $c$ se correspondant sur l'exemple de 28 vu plus haut.

*Illustration de* $X_b(28) = X_c(28) = 4$ :

$$3\ a\ 5\ a\ 7\ b\ 9\ c\ 11\ a\ 13\ b\ 15\ c\ 17\ a\ 19\ b\ 21\ c\ 23\ b\ 25\ d\ 27\ c\ 29$$

Pour les nombres de lettre $b$ ou $d$, la compréhension est aisée en notant simplement qu'il manque la dernière parenthèse fermante, rendant le nombre $X_b(n)$ de $b$ supérieur de 1 au nombre $X_c(n)$ de $c$ ;

4) pour les nombres $n$ de lettre $b$ ou $d$, $pi(n) = X_a(n) + X_c(n) + 1$ et $X_b(n) = X_c(n) + 1$ (et donc $pi(n) = X_a(n) + X_b(n)$ ; le raisonnement est le même que ci-dessus, avec la nécessité d'ajouter 1 pour compter le fait que 3 est premier) ;

5) $X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \dfrac{n-2}{2}$ (il s'agit simplement ici de compter le nombre total de lettres, qui augmente de 1 à chaque nouveau nombre pair).

| $n$ | $l(n)$ | $X_a(n)$ | $X_b(n)$ | $X_c(n)$ | $X_d(n)$ | $pi(n)$ | $pi_{jum}(n)$ | $\frac{n-2}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | $a$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | $a$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 8 | $b$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | 3 |
| 10 | $c$ | 2 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 4 |
| 12 | $a$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 4 | 3 | 5 |
| 14 | $b$ | 3 | 2 | 1 | 0 | 5 | 3 | 6 |
| 16 | $c$ | 3 | 2 | 2 | 0 | 5 | 3 | 7 |
| 18 | $a$ | 4 | 2 | 2 | 0 | 6 | 4 | 8 |
| 20 | $b$ | 4 | 3 | 2 | 0 | 7 | 4 | 9 |
| 22 | $c$ | 4 | 3 | 3 | 0 | 7 | 4 | 10 |
| 24 | $b$ | 4 | 4 | 3 | 0 | 8 | 4 | 11 |
| 26 | $d$ | 4 | 4 | 3 | 1 | 8 | 4 | 12 |
| 28 | $c$ | 4 | 4 | 4 | 1 | 8 | 4 | 13 |
| 30 | $a$ | 5 | 4 | 4 | 1 | 9 | 5 | 14 |
| 32 | $b$ | 5 | 5 | 4 | 1 | 10 | 5 | 15 |
| 34 | $d$ | 5 | 5 | 4 | 2 | 10 | 5 | 16 |
| 36 | $c$ | 5 | 5 | 5 | 2 | 10 | 5 | 17 |
| 38 | $b$ | 5 | 6 | 5 | 2 | 11 | 5 | 18 |
| 40 | $c$ | 5 | 6 | 6 | 2 | 11 | 5 | 19 |
| 42 | $a$ | 6 | 6 | 6 | 2 | 12 | 6 | 20 |
| 44 | $b$ | 6 | 7 | 6 | 2 | 13 | 6 | 21 |
| 46 | $c$ | 6 | 7 | 7 | 2 | 13 | 6 | 22 |
| 48 | $b$ | 6 | 8 | 7 | 2 | 14 | 6 | 23 |
| 50 | $d$ | 6 | 8 | 7 | 3 | 14 | 6 | 24 |
| 52 | $c$ | 6 | 8 | 8 | 3 | 14 | 6 | 25 |
| 54 | $b$ | 6 | 9 | 8 | 3 | 15 | 6 | 26 |
| 56 | $d$ | 6 | 9 | 8 | 4 | 15 | 6 | 27 |
| 58 | $c$ | 6 | 9 | 9 | 4 | 15 | 6 | 28 |
| 60 | $a$ | 7 | 9 | 9 | 4 | 16 | 7 | 29 |
| 62 | $b$ | 7 | 10 | 9 | 4 | 17 | 7 | 30 |
| 64 | $d$ | 7 | 10 | 9 | 5 | 17 | 7 | 31 |
| 66 | $c$ | 7 | 10 | 10 | 5 | 17 | 7 | 32 |
| 68 | $b$ | 7 | 11 | 10 | 5 | 18 | 7 | 33 |
| 70 | $c$ | 7 | 11 | 11 | 5 | 18 | 7 | 34 |
| 72 | $a$ | 8 | 11 | 11 | 5 | 19 | 8 | 35 |
| 74 | $b$ | 8 | 12 | 11 | 5 | 20 | 8 | 36 |
| 76 | $d$ | 8 | 12 | 11 | 6 | 20 | 8 | 37 |
| 78 | $c$ | 8 | 12 | 12 | 6 | 20 | 8 | 38 |
| 80 | $b$ | 8 | 13 | 12 | 6 | 21 | 8 | 39 |
| 82 | $c$ | 8 | 13 | 13 | 6 | 21 | 8 | 40 |
| 84 | $b$ | 8 | 14 | 13 | 6 | 22 | 8 | 41 |
| 86 | $d$ | 8 | 14 | 13 | 7 | 22 | 8 | 42 |
| 88 | $c$ | 8 | 14 | 14 | 7 | 22 | 8 | 43 |
| 90 | $b$ | 8 | 15 | 14 | 7 | 23 | 8 | 44 |
| 92 | $d$ | 8 | 15 | 14 | 8 | 23 | 8 | 45 |
| 94 | $d$ | 8 | 15 | 14 | 9 | 23 | 8 | 46 |
| 96 | $c$ | 8 | 15 | 15 | 9 | 23 | 8 | 47 |
| 98 | $b$ | 8 | 16 | 15 | 9 | 24 | 8 | 48 |
| 100 | $c$ | 8 | 16 | 16 | 9 | 24 | 8 | 49 |