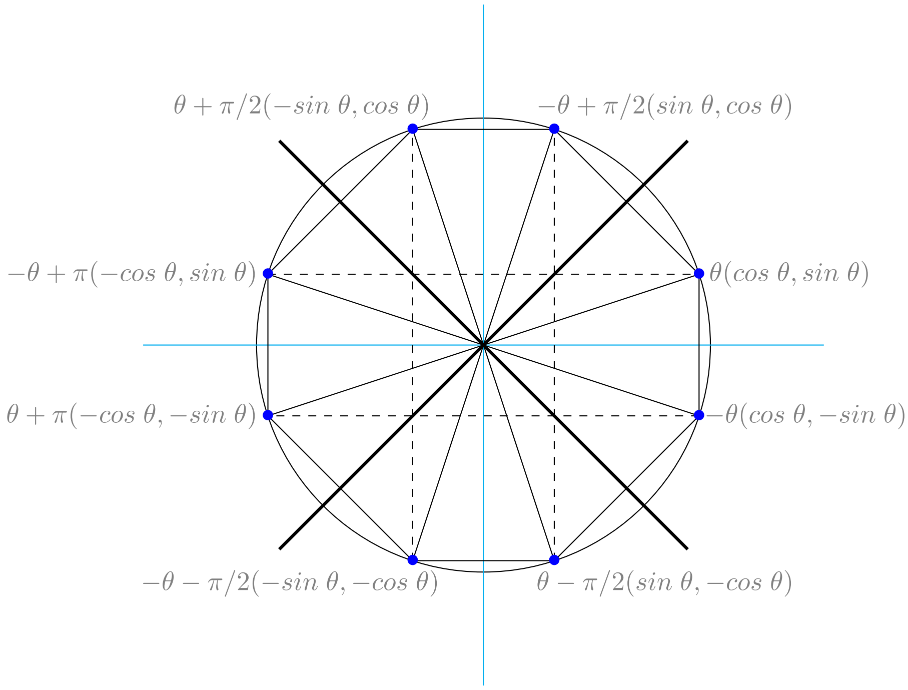
Images *(Denise Vella-Chemla, 22.6.2016)*

On s'interroge sur deux transformations, qui semblent en lien avec nos recherches : celle consistant à échanger des coordonnées et celle consistant à inverser[1] l'orientation (qu'on a appelée "mettre tête-bêche"). Voyons ces transformations opérer sur un angle.



On aimerait bien comprendre comment se combinent ces 2 transformations parce qu'on s'est un peu familiarisée avec la somme des diviseurs, en programmant la récurrence d'Euler ; or la somme des diviseurs caractérise parfaitement les nombres premiers (p nombre premier a sa somme de diviseurs qui vaut $p+1$). Une autre récurrence existe pour la somme des diviseurs, plus simple à programmer mais d'origine moins claire, dont il semblerait qu'elle provienne d'une équation de Chazy, qui fait peut-être partie des équations de Painlevé VI ; tout ça est inaccessible, mais on a cependant lu que de telles équations sont liées au groupe diédral D_4 qui contient 8 éléments. Et comme le mot diédral fait penser à inversion et que la modélisation qu'on propose utilise 2 booléens, 4 lettres, 16 règles de réécriture, des échanges de coordonnées et/ou des orientations à opposer, peut-être y aurait-il moyen de relier tout ça, même si pour l'instant, c'est tout flou.

La composition des deux opérations qui consistent à échanger les coordonnées et à "opposer" l'abscisse, par exemple, est non-commutative :

Si on applique d'abord l'échange de coordonnées, puis le fait de prendre l'opposé de l'abscisse au point $\begin{pmatrix} cos\ \theta \\ sin\ \theta \end{pmatrix}$, on obtient d'abord $\begin{pmatrix} sin\ \theta \\ cos\ \theta \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} -sin\ \theta \\ cos\ \theta \end{pmatrix}$ alors que si on effectue ces transformations dans l'ordre inverse, on obtient d'abord $\begin{pmatrix} -cos\ \theta \\ sin\ \theta \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} sin\ \theta \\ -cos\ \theta \end{pmatrix}$.

Si on note $r_0, r_{1,2}\ , r_3$ les rotations de 0 tour, 1/4 de tour, 1/2 tour, 3/4 de tour, et s_1, s_2 les symétries par rapport aux diagonales, s_3 la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et s_4 la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, alors la table de Cayley du groupe D_4 est :

[1] Le verbe opposer conviendrait mieux que le verbe inverser, au sens de prendre la direction opposée.

	r_0	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	s_4
r_0	r_0	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	s_4
r_1	r_1	r_2	r_3	r_0	s_4	s_3	s_1	s_2
r_2	r_2	r_3	r_0	r_1	s_2	s_1	s_4	s_3
r_3	r_3	r_0	r_1	r_2	s_3	s_4	s_2	s_1
s_1	s_1	s_3	s_2	s_4	r_0	r_2	r_1	r_3
s_2	s_2	s_4	s_1	s_3	r_2	r_0	r_3	r_1
s_3	s_3	s_2	s_4	s_1	r_3	r_1	r_0	r_2
s_4	s_4	s_1	s_3	s_2	r_1	r_3	r_2	r_0

On constate que par exemple $r_1 s_2 \neq s_2 r_1$.