Une approche enfantine des nombres premiers

Denise Vella

Janvier 2007

1 Introduction

On va présenter ici une dernière façon de caractériser les nombres premiers, qui repose sur la manière dont Gauss enfant a associé les entiers deux à deux pour découvrir la formule

$$\sum_{i=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$$

On avait pris pour habitude de considérer comme premier un nombre qui entretenait une certaine relation (être divisible par) avec d'autres nombres. Mais ce qui est également extraordinaire, c'est de voir la primarité d'un nombre comme le fait que ce nombre établit des relations d'indivisibilité entre des nombres inférieurs à lui pris deux à deux.

Dans un premier temps, illustrons cela par des exemples. Chacun des tableaux suivants est associé à un nombre entier, qui se trouve toujours être la somme des deux nombres d'une même colonne. Ce nombre est premier lorsque dans chaque colonne du tableau, le nombre de la première ligne ne divise pas celui de la deuxième ligne. Si au contraire, dans une colonne au moins, le nombre de la première ligne divise celui de la deuxième, alors on a affaire au tableau d'un nombre composé.

Tableau du nombre premier 5 :

2	3	4
3	2	1

Tableau du nombre premier 7 :

2	3	4	5	6
5	4	3	2	1

Tableau du nombre premier 11 :

2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	8	7	6	5	4	3	2	1

Tableau du nombre premier 13 :

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Tableau du nombre composé 12 :

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Tableau du nombre composé 15 :

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Si on adopte une approche basée sur les fractions rationnelles (dont le numérateur appartient à la liste d'entiers croissants de la première ligne des tableaux et dont le dénominateur appartient à la liste d'entiers décroissants de la deuxième ligne des tableaux), alors dans l'ensemble de fractions rationnelles associé à un entier impair, toute fraction dont le numérateur est un diviseur de ce nombre est entière.

Il résulte de tout cela une nouvelle caractérisation des nombres premiers qui est :

$$\begin{aligned} p \textit{ impair est premier} \quad & \Leftrightarrow \forall\, i,\ 2 \leq i \leq \frac{p-1}{2},\ i \nmid p-i \\ & \Leftrightarrow \forall\, i,\ 2 \leq i \leq \frac{p-1}{2},\ \frac{i}{p-i} \notin \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Voyons les différentes décompositions du nombre pair 40 comme somme de deux nombres impairs pour étudier, grâce à cette nouvelle manière de considérer la primarité des nombres, les décompositions qui sont des décompositions Goldbach (mettant en jeu deux nombres premiers).

décomposition 3 premier et 37 premier :

2																		
1																		
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17

décomposition 5 premier et 35 composé :

2	3	4																
3	2	1																
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15

décomposition 7 premier et 33 composé :

2	3	4	5	6														
5	4	3	2	1														
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13

décomposition 9 composé et 31 premier :

2	3	4	5	6	7	8												
7	6	5	4	3	2	1												
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11

décomposition 11 premier et 29 premier :

2	3	4	5	6	7	8	9	10										
9	8	7	6	5	4	3	2	1										
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9

décomposition 13 premier et 27 composé :

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12								
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1								
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7

décomposition 15 composé et 25 composé :

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14						
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1						
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5

décomposition 17 premier et 23 premier :

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16				
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1				
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3

décomposition 19 premier et 21 composé :

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		
17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

La formule d'existence de décomposants Goldbach pour un nombre pair qui résulte de cette approche devient :

$$
\begin{aligned}
&Goldbach(2a, i, j) \ \Leftrightarrow \\
&\quad \exists\, i, (\ i\ impair)\ \wedge (\ 3\ \leq\ i\ \leq\ a)\ tel\ que \\
&\qquad \forall\, y, (\ 2\ \leq\ y\ \leq\ a), \\
&\qquad\quad (2x\ =\ 2y\ +\ (2x-i-y)\ +\ (i-y))\ \Rightarrow\ (y\ \nmid\ 2x-i-y)\ \wedge\ (y\ \nmid\ i-y).
\end{aligned}
$$

2 Conclusion

On peut peut-être désormais utiliser la formulation *"tout entier naturel supérieur à 2 est la moyenne arithmétique de deux nombres premiers"*. Concluons par deux citations d'Hilbert : *"Nous devons savoir et nous saurons ; il n'y a pas d'ignorabimus en mathématiques"* et puis un conseil qu'il donne à Klein : *"Il vous faut avoir un problème. Choisissez un objectif déterminé et marchez franchement vers lui. Vous pouvez ne jamais atteindre le but mais vous trouverez sûrement quelque chose d'intéressant en chemin"*. En mathématiques, il faut garder l'âme d'un *epsilon*[1] qui s'émerveille...

Bibliographie

F. Casiro. *La conjecture de Goldbach, un défi en or.* Éd. Tangente n°78, décembre 2000, janvier 2001.

A. Doxiadis. *Oncle Pétros et la conjecture de Goldbach.* Éd. Points Seuil 2003.

C.F. Gauss. *Recherches arithmétiques.* 1807. Éd. Jacques Gabay, 1989.

J. Hadamard. *Essai sur la psychologie de l'invention mathématique suivi de H. Poincaré, l'invention mathématique.* Éd. Jacques Gabay, 1959.

O. Kerléguer, D. Dumont. *Des images pour les nombres.* Éd. ACL du Kangourou, 2001.

D. Nordon. *Les obstinations d'un mathématicien.* Éd. Belin Pour la Science, 2003.

A. Sainte Laguë. *Avec des nombres et des lignes.* Éd. Vuibert, 1937.

A. Warusfel. *Les nombres et leurs mystères.* Éd. Points Sciences, 1961.

Annexe : Citations littéraires

Des citations tirées du livre *La symphonie des nombres premiers* de Marcus du Sautoy.

Poincaré : Le scientifique n'étudie pas la Nature parce qu'elle est utile ; il l'étudie parce qu'elle le réjouit. Et elle le réjouit parce qu'elle est belle. Si la nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, et si la Nature ne valait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue.

[1] C'est ainsi qu'Erdös désignait les enfants.

Hardy : Je pense que la réalité mathématique existe en dehors de nous, que notre fonction est de la découvrir ou de l'observer et que les théorèmes que nous démontrons et que nous décrivons avec grandiloquence comme nos créations sont simplement les notes de nos observations.

Gauss a coiffé Legendre sur le poteau au sujet du lien entre les nombres premiers et les logarithmes. Cela nous est révélé dans une lettre de Gauss à Encke, écrite le soir de Noël 1849[2].

Lagrange conseilla au père de Cauchy : Veillez à ce qu'il ne touche pas de livre de mathématiques avant ses 17 ans. Au lieu de cela, il suggéra de stimuler les talents littéraires de l'enfant si bien que, le jour où il reviendrait aux mathématiques, il serait capable de parler de sa propre voix mathématique, non en imitant ce qu'il aurait prélevé dans les ouvrages de l'époque.

Hardy à propos de Ramanujan : il était porteur d'un handicap insurmontable, pauvre hindou solitaire s'attaquant à la sagesse accumulée de l'Europe.

Ramanujan commençait à se dire que la priorité que Hardy accordait à la rigueur mathématique empêchait son esprit de parcourir librement le paysage mathématique.

Julia Robinson : Je souhaitais toujours à chacun de mes anniversaires et d'année en année que le dixième problème de Hilbert soit résolu. Pas par moi, mais simplement qu'il soit résolu. J'avais le sentiment que je ne pourrais accepter de mourir sans connaître la réponse.

Gauss : le problème de distinguer les nombres premiers des nombres composés et de décomposer ceux-ci en leurs facteurs premiers est connu comme un des plus importants et des plus utiles de toute l'Arithmétique. [...] En outre, la dignité de la Science semble demander que l'on recherche avec soin tous les secours nécessaires pour parvenir à la solution d'un problème si élégant et si célèbre.

[2]157 ans sépare Noel 1849 de Noël 2006. Déduisez-en la primarité de 157 !