Paquets (Denise Vella-Chemla, 22.7.2020)

On voudrait utiliser une caractérisation simple, puérile, des nombres premiers. On utilise la fonction

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor .$$

On caractérise alors les nombres premiers par

$$n \text{ est premier } \iff F(n) - F(n-1) = 2.$$

Voyons cette caractérisation élémentaire dans un tableau contenant les $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ pour n de 1 à 13.

n	$k=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Σ	Δ	1^{er}
1	1													1	1	
2	2	1												3	2	$*$
3	3	1	1											5	2	$*$
4	4	2	1	1										8	3	
5	5	2	1	1	1									10	2	$*$
6	6	3	2	1	1	1								14	4	
7	7	3	2	1	1	1	1							16	2	$*$
8	8	4	2	2	1	1	1	1						20	4	
9	9	4	3	2	1	1	1	1	1					23	3	
10	10	5	3	2	2	1	1	1	1	1				27	4	
11	11	5	3	2	2	1	1	1	1	1	1			29	2	$*$
12	12	6	4	3	2	2	1	1	1	1	1	1		35	6	
13	13	6	4	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	37	2	$*$

Il faudrait alors utiliser la fonction suivante

$$g(n) = n - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(2k\pi n)}{k\pi}$$

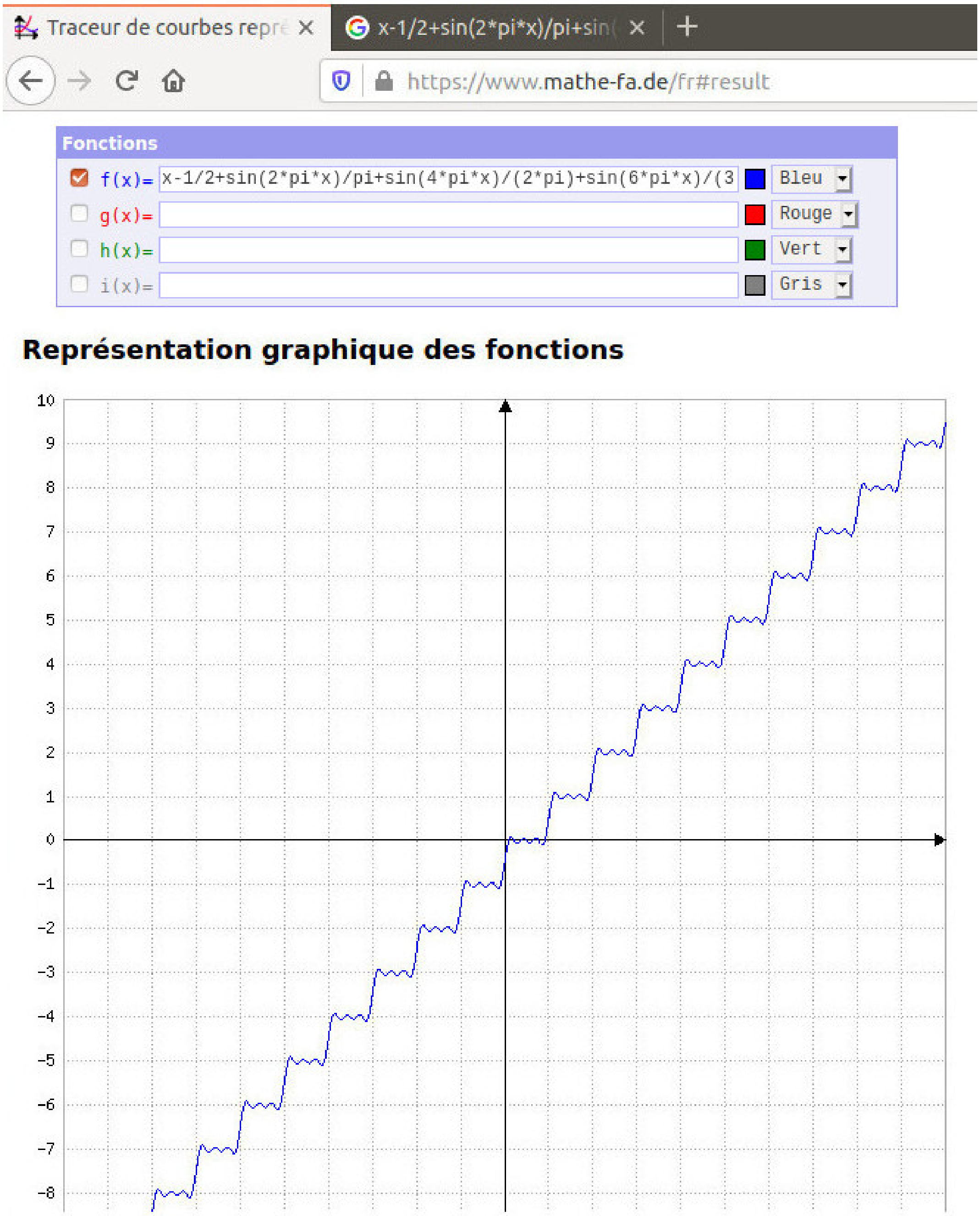
pour approximer la fonction *floor* (notée $\lfloor x \rfloor$).

En prenant seulement les 3 premières valeurs de k, en calculant plutôt que $g(n)$ la fonction

$$g_3(n) = n - \frac{1}{2} + \frac{sin(2\pi n)}{\pi} + \frac{sin(4\pi n)}{2\pi} + \frac{sin(6\pi n)}{3\pi},$$

on a déjà une fonction assez “ressemblante” de la fonction *floor*.

Utilisons un logiciel de visualisation en ligne de fonctions https://www.mathe-fa.de/frresult [1] :



1. Elle passe par les points intermédiaires médians pour les entiers, comme la fonction zeta de Riemann.

Si on appelle d le nombre de termes de la somme de sinus, on a :

$$\begin{aligned}
F(n) &= \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{d} \frac{sin(2\pi l \frac{n}{k})}{l} \right] \\
&= n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{n}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{d} \frac{sin(2\pi l \frac{n}{k})}{l} \\
&= n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{n}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{d} \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{n} sin \left(\frac{2\pi l n}{k} \right)
\end{aligned}$$

De toute façon, comme indiqué dans l'article wikipedia concernant la fonction *floor*, la formule d'approximayion n'est pas valide lorsque k divise n et cette idée s'avère être une très mauvaise idée, un nouveau coup d'épée dans l'eau.