

Pavages de Penrose, programme de dessin en python et traductions d'extraits du livre *Noncommutative geometry* d'Alain Connes, Denise Vella-Chemla, mai 2025

1) Programme en python de dessin d'un pavage de Penrose (à base de triangles isocèles à certains angles aigus ou obtus) et son résultat.

Il faut être rigoureux pour ne pas se mélanger les pinceaux, quant à l'ordre des opérations à effectuer (sens des vecteurs, etc.) car $AB \neq BA$ et une étourderie est vite arrivée qui rend le résultat inesthétique, et mal équilibré au niveau des couleurs ¹.

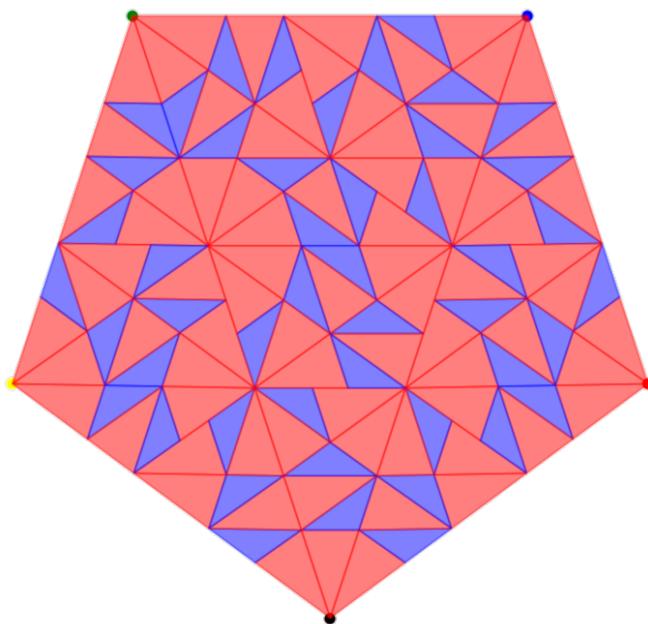
```
import matplotlib.pyplot as plt
import math
from math import sqrt,cos,sin,pi

def penrosea(n,ax,ay,bx,by,cx,cy,couleur):
    if n == 0:
        listetriangles.append([ax,ay,bx,by,cx,cy,couleur])
    else:
        n = n-1
        abx,aby = (1-invphi)*ax+invphi*bx,(1-invphi)*ay+invphi*by
        cax,cay = invphi*cx+(1-invphi)*ax,invphi*cy+(1-invphi)*ay
        penrosea(n,ax,ay,abx,aby,cax,cay,couleur)
        penroseb(n,abx,aby,bx,by,cax,cay,-couleur)
        penrosea(n,bx,by,cx,cy,cax,cay,couleur)

def penroseb(n,ax,ay,bx,by,cx,cy,couleur):
    if n == 0:
        listetriangles.append([ax,ay,bx,by,cx,cy,couleur])
    else:
        n = n-1
        bcx,bcy = (1-invphi)*bx+invphi*cx,(1-invphi)*by+invphi*cy
        penrosea(n,bx,by,bcx,bcy,ax,ay,-couleur)
        penroseb(n,bcx,bcy,cx,cy,ax,ay,couleur)

listetriangles = []
invphi = 2/(1+sqrt(5))
fig, _ = plt.subplots()
ax,ay = 10,0 ; bx,by = 3,9.5 ; cx,cy = -8,5.9 ; dx,dy = -8,-5.9 ; ex,ey = 3,-9.5
penroseb(4,bx,by,cx,cy,ax,ay,1)
penrosea(4,ax,ay,cx,cy,dx,dy,-1)
penroseb(4,ex,ey,ax,ay,dx,dy,1)
plt.scatter([ax],[ay],color='black') ; plt.scatter([bx],[by],color='red') ; ...
for t in listetriangles:
    if t[6] == 1:
        couleur = 'blue'
    else:
        couleur = 'red'
    polygon = plt.Polygon([[t[0],t[1]],[t[2],t[3]],[t[4],t[5]]],color=couleur)
    plt.gca().add_patch(polygon)
plt.axis('equal')
plt.show()
```

¹On espère que les programmes à base de “kites” (cerfs-volants) et “darts” (fléchettes), ainsi qu’à base de rhombus (losanges, à certains angles aigus ou obtus) suivront bientôt.



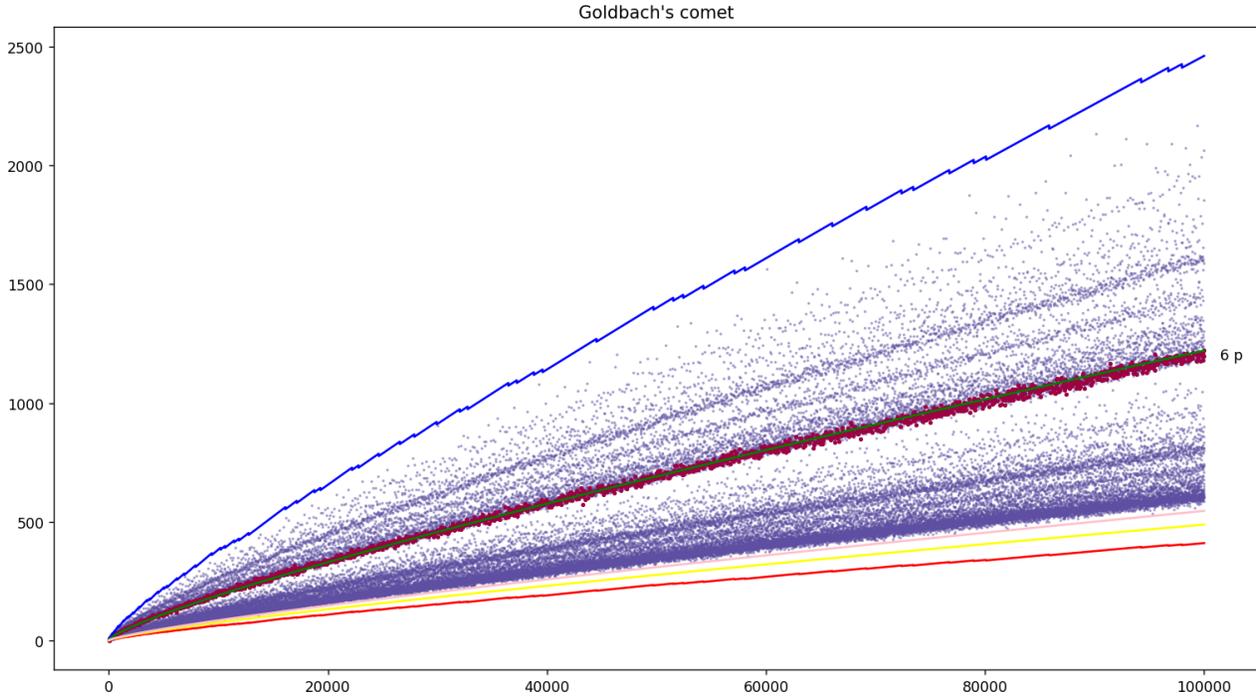
On aimerait faire le lien entre la présentation ci-dessous des pavages de Penrose dans le livre *Noncommutative geometry* d'Alain Connes, et des idées qu'on avait eues au sujet des représentations des entiers sous forme de sommes, par ce que Donald Ervin Knuth appelle des compositions², et les mots aperiodiques (voir les notes compositions1, compositions2, compositions3, compositions4 et compositions5).

On a d'autre part constaté par programme que la courbe

$$f : x \mapsto \frac{\varphi x}{\sqrt{5} \ln x \ln x}$$

avec $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ semblait minorer la comète qui compte les décompositions de Goldbach, voir le graphique ci-dessous, la fonction f est représentée en rose pâle et est quasiment accolée à la comète par le dessous :

²Voir [https://fr.wikipedia.org/wiki/Composition_\(combinatoire\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Composition_(combinatoire)).



Cela serait-il lié à la façon dont le nombre d'or apparaît dans les explications d'Alain Connes ci-après.

Enfin, cette relation pourrait-elle être motivée par le fait qu'il y a une forte ressemblance, du point de vue de l'écriture, entre l'algorithme d'Euclide d'obtention du pgcd de deux nombres, qui s'écrit:

```
def pgcd(m,n):
    while (m != 0):
        r = n mod m
        n = m
        m = r
    return(n)
```

et les règles de réécriture des pavages de la forme

$$(L, S) \longrightarrow (LS, L).$$

Cette idée peut venir à l'esprit lorsqu'on regarde l'image ci-dessous :

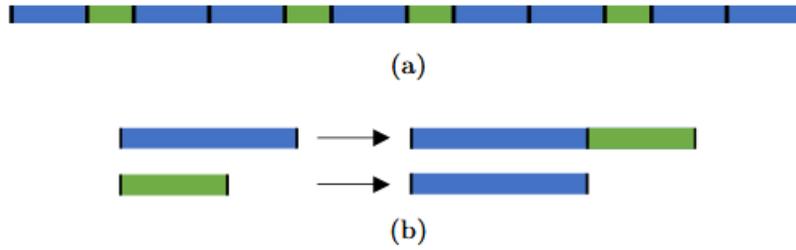


FIG. 4. (a) A finite piece of a 1D Fibonacci quasicrystal (scaled to fit), also represented as $LSLLSLSLLSLL$ or 101101011011 . (b) Inflation rule $(L, S) \rightarrow (LS, L)$.

extraite de l'article *The Penrose Tiling is a Quantum Error-Correcting Code*, de Zhi Li et Latham Boyle³.

Lorsqu'on programme le dessin d'un pavage, on se heurte à la difficulté récurrente de "se tromper dans le sens de l'écriture" : on parcourt les vecteurs à l'envers. Cela se produisait d'ailleurs également, lorsqu'on parcourait les arêtes du dodécaèdre dans la recherche des chemins du jeu de l'icosion (voir jeu de l'icosion, recherche de cycles eulériens sur les sommets du dodécaèdre). Les rotations dans les espaces géométriques parcourus, et les lettres, des mots écrits, ne commutent pas. Hamilton, pour trouver des cycles eulériens, a constaté (géométriquement) sur le dodécaèdre que (algébriquement) $d^5 = 1, g^5 = 1, d^2 = gd^3g$, puis il a "développé les mots" par ces règles de réécriture (comme on le fait dans la théorie des langages), jusqu'à obtenir des mots de longueur 20, pour que tous les 20 sommets de son icosion⁴ soient visités (ci-dessous, application systématique de la règle de réécriture $d^2 = gd^3g$ pour augmenter le nombre de lettres de 3 lettres en 3 lettres jusqu'à 20).

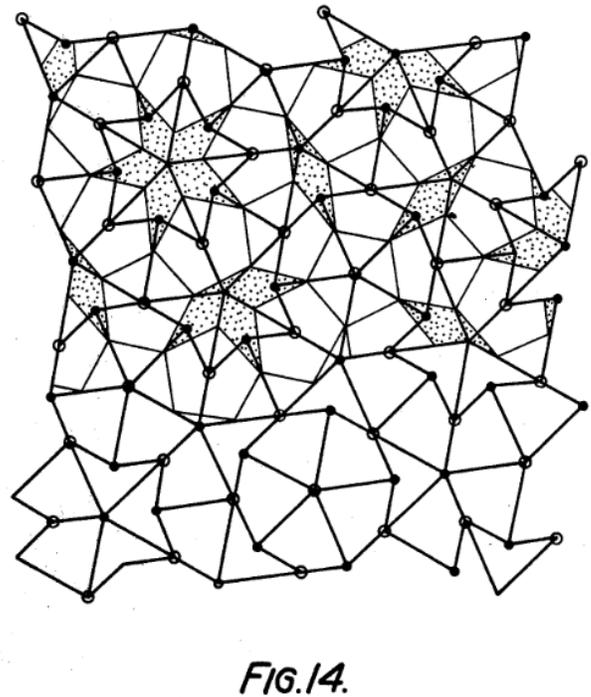
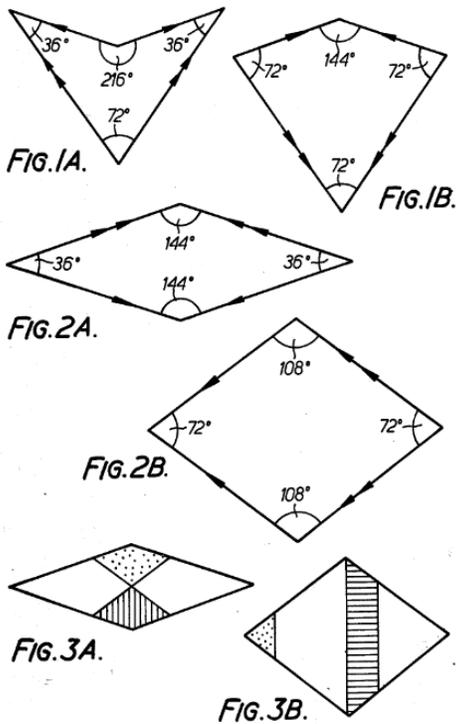
$$\begin{aligned}
 dd &= g\underline{ddd}g \\
 &= gg\underline{ddd}gdg \\
 &= ggg\underline{ddd}gdgdg \\
 &= gggg\underline{ddd}gdgdgdg \\
 &= ggggg\underline{ddd}gdgdgdgdg \\
 &= gggggg\underline{ddd}gdgdgdgdgdg
 \end{aligned}$$

Dans son article original, Roger Penrose appose des flèches sur les arêtes de ses tuiles pour les pavages apériodiques, et il colorie en noir et blanc les sommets (sur le graphique à droite, bien que

³Voir <https://arxiv.org/pdf/2311.13040v2>.

⁴dont le patron contient 12 pentagones

cela ne se voit pas trop, les sommets noirs sont plus petits que les blancs), pour bien montrer les éléments qui sont à mettre en correspondance.



2) II.3. L'espace X des pavages de Penrose (traduction d'un extrait du livre d'Alain Connes *Noncommutative geometry*⁵) (p. 94 et suiv.).

J'ai eu la chance d'assister à la conférence de R. Penrose sur les pavages quasi-périodiques du plan (Figure 3)⁶. Penrose a construit de tels pavages en utilisant deux tuiles simples A et B . Le pavage T dépend des choix successifs effectués au cours de la construction. Plus précisément, pour construire un tel pavage, on doit choisir une suite $(z_n)_{n=0,1,2,\dots}$ de 0 et 1 qui satisfont la contrainte de cohérence suivante :

$$z_n = 1 \implies z_{n+1} = 0. \tag{1}$$

⁵Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994, ISBN: 0-12-185860-X. 1994.
Consultable sur le site d'Alain Connes

<https://alainconnes.org/wp-content/uploads/book94bigpdf.pdf>.

⁶Note de la traductrice : on pourra se reporter à une autre vidéo de Roger Penrose et aux 3 parties de la traduction de sa transcription ici : lien vers la vidéo de Roger Penrose, transcription : partie 1, partie 2 et partie 3.

On utilise la valeur de z_n comme indiqué dans la construction de T en Appendice D. Pourtant, il peut se produire que deux suites différentes $z = (z_n)$ et $z' = (z'_n)$ amènent au même pavage ; en fait,

$$T \text{ est identique à } T' \iff \exists n \text{ tel que } z_j = z'_j \ (\forall j \geq n).$$

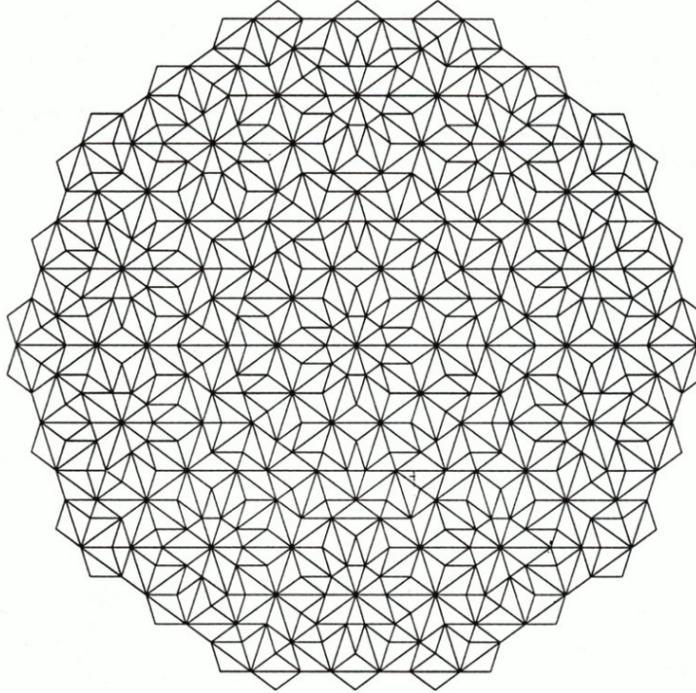


FIGURE 3. Un pavage de Penrose

Ainsi, l'espace X des pavages obtenus est l'ensemble quotient K/\mathcal{R} d'un espace compact K par une relation d'équivalence \mathcal{R} . L'espace compact K , homéomorphe à l'ensemble de Cantor, est l'ensemble des suites $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de 0 et 1 qui satisfont la contrainte (1) ; c'est par construction un sous-ensemble fermé du produit d'un nombre infini d'ensembles à deux éléments. La relation d'équivalence \mathcal{R} est donnée par

$$z \sim z' \iff \exists n \text{ tel que } z_j = z'_j \ (\forall j \geq n). \quad (2)$$

Ainsi X est l'espace quotient K/\mathcal{R} . C'est exactement sous cette forme que Penrose a présenté l'ensemble des pavages lors de son exposé. Si on essaie de comprendre l'espace X comme un espace ordinaire, on voit très vite que les outils classiques ne marchent pas, et ne distinguent pas X de l'espace consistant en un unique point. Par exemple, étant donnés deux pavages T_1 et T_2 et une portion finie P de T_1 , on peut trouver exactement la même configuration P quelque part dans T_2 ; ainsi, aucune portion finie ne nous permet de distinguer T_1 de T_2 ([246]). Par conséquent, n'importe quelle configuration qui apparaît dans un certain pavage T , comme celles de la Figure 3, apparaîtra (et infiniment souvent) dans n'importe quel autre pavage T' . Cette propriété géométrique se traduit par la trivialité de la topologie de X . La topologie naturelle sur X a pour ensembles fermés $F \subset X$ les ensembles fermés de K qui sont saturés pour \mathcal{R} . Mais, toute classe d'équivalence pour \mathcal{R} est dense dans K , et il découle de cela que les seuls ensembles fermés $F \subset X$ sont $F = \emptyset$

et $F = X$. Ainsi, la topologie de X est triviale et ne distingue pas X d'un point ; elle n'est bien sûr pas de Hausdorff et elle ne contient pas d'information intéressante.

Une attitude possible face à un tel exemple serait de dire que, à fluctuations près, il n'existe qu'une seule pavage T du plan et de ne pas être perturbé par l'indiscernabilité entre X et un point. Pourtant, on peut voir que X est un espace "non commutatif" très intéressant ou espace "quantique", et que l'un de ses invariants topologiques, le groupe de dimension, est le sous-groupe de \mathbb{R} engendré par \mathbb{Z} et le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ceci montrera, en particulier, pourquoi la densité, ou fréquence d'apparition, d'un motif dans le pavage doit, entièrement en fonction de la topologie de l'ensemble de tous les pavages, être un élément du groupe $\mathbb{Z} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\mathbb{Z}$.

Donnons maintenant la construction de la C^* -algèbre A de l'espace $X = K/\mathcal{R}$ des pavages de Penrose (voir également [154]). Un élément général $a \in A$ est donné par une matrice $(a_{z,z'})$ de nombres complexes, indexée par les couples $(z, z') \in \mathbb{R}$. Le produit de deux éléments de A est donné par la matrice produit $(ab)_{z,z''} = \sum_{z'} a_{z,z'} b_{z',z''}$. À chaque élément z de X correspond une classe d'équivalence pour \mathcal{R} , qui est un sous-ensemble dénombrable de K . On peut par conséquent associer à x l'espace de Hilbert ℓ_x^2 ayant cet ensemble dénombrable comme base orthonormale. Tout élément a de A définit un opérateur sur ℓ_x^2 par l'équation

$$(a(x)\zeta)_z = \sum_{z'} a_{z,z'} \zeta_{z'} \quad \forall \zeta \in \ell_x^2$$

Pour $a \in A$, la norme $\|a(x)\|$ de l'opérateur $a(x)$ est finie et ne dépend pas de $x \in X$; c'est la norme de la C^* -algèbre. Bien sûr, pour être plus technique, on doit donner la définition précise de la classe des matrices a que l'on considère. Faisons-le. La relation $\mathcal{R} \subset K \times K$ est l'union croissante des relations $\mathcal{R}_n = \{(z, z') ; z_j = z'_j \ (\forall j \geq n)\}$, et de ce fait, \mathcal{R} hérite d'une topologie localement compacte naturelle (non égale à sa topologie comme sous-ensemble de $K \times K$). Alors, A est par définition la fermeture par la norme de $C_c(\mathcal{R})$ pour la norme ci-dessus. On peut montrer que tout élément $a \in A$ de cette fermeture de norme vient d'une matrice $(a_{z,z'})$, $(z, z') \in \mathcal{R}$.

On peut résumer la construction ci-dessus en disant que, alors que l'espace X ne peut pas être décrit de façon non triviale au moyen de fonctions à valeurs dans \mathbb{C} , il existe une classe très riche de fonctions à valeurs d'opérateurs sur X :

$$a(x) \in \mathcal{L}(\ell_x^2) \quad (\forall x \in X).$$

La structure algébrique de A est dictée par ce point de vue, parce qu'on a

$$\begin{aligned} (\lambda a + \mu b)(x) &= \lambda a(x) + \mu b(x) \\ (ab)(x) &= a(x)b(x) \end{aligned}$$

pour tout $a, b \in A, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $x \in X$.

Pour montrer clairement la richesse de la C^* -algèbre A , je vais maintenant donner la description équivalente de cette C^* -algèbre, comme limite inductive d'algèbres de dimension finie. L'ensemble de Cantor K est par construction la limite projective des ensembles finis K_n , où K_n est l'ensemble des suites de $n + 1$ éléments $(z_j)_{j=0,1,\dots,n}$ de 0 et 1, satisfaisant la contrainte $z_j = 1 \implies z_{j+1} = 0$.

Il y a une projection évidente $K_{n+1} \rightarrow K_n$ qui consiste à “oublier” le z_{n+1} final. Sur l’ensemble K_n , considérons la relation

$$\mathcal{R}^n = \{(z, z') \in K_n \times K_n ; z_n = z'_n\}.$$

Toute fonction sur \mathcal{R}^n , $a = a_{z,z'}$ définit un élément $\tilde{a}_{z,z'}$ sur la C^* -algèbre A par les équations

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{z,z'} &= a_{(z_0, \dots, z_n), (z'_0, \dots, z'_n)} & \text{si } (z, z') \in \mathcal{R}^n \\ \tilde{a}_{z,z'} &= 0 & \text{si } (z, z') \notin \mathcal{R}^n \end{aligned}$$

De plus, la sous-algèbre de A obtenue à partir des fonctions sur \mathcal{R}^n est facile à calculer : c’est la somme directe $A_n = M_{k_n}(\mathbb{C}) \oplus M_{k'_n}(\mathbb{C})$ de deux algèbres de matrices, où k_n (resp. k'_n) est le nombre d’éléments de K_n qui se terminent par un 0 (resp. par un 1). Finalement, l’inclusion $A_n \rightarrow A_{n+1}$ est déterminée de manière unique par les égalités $k_{n+1} = k_n + k'_n$ et $k'_{n+1} = k_n$ ce qui permet de plonger $M_{k_n} \oplus M_{k'_n}$ comme matrices par blocs dans $M_{k_{n+1}}$ par l’homomorphisme $(a, a') \rightarrow a$ dans $M_{k'_{n+1}}$.

La C^* -algèbre A est alors la limite inductive des algèbres de dimension finie A_n , et on peut calculer les invariants pour la classification de Bratteli, Elliott, Effros, Shen et Handelman ([65], [193], [194], [191]) de ces C^* -algèbres particulières. L’invariant à calculer, dû à G. Elliott, est un groupe ordonné, notamment le groupe $K_0(A)$, décrit précédemment, engendré par les classes d’isomorphismes stables des modules projectifs finis sur A . De façon équivalente, il est engendré par les classes d’équivalence des projections, comme dans le travail de Murray et von Neumann sur les facteurs.

Une projection $e \in M_k(A)$ est un élément de $M_k(A)$ tel que $e^2 = e$ et $e = e^*$. Les projections e et f sont équivalentes s’il existe $u \in M_k(A)$ tel que $u^*u = e$ et $uu^* = f$. Pour pouvoir ajouter les classes d’équivalence des projections, on utilise les matrices $M_n(A)$, avec n arbitraire ; cela permet de donner un sens à

$$e \oplus f = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

pour deux projections $e, f \in M_k(A)$. Le groupe ordonné $(K_0(A), K_0(A)^+)$ est obtenu canoniquement à partir du semi-groupe des classes d’équivalence des projections $e \in M_n(A)$ par l’opération habituelle de symétrisation par laquelle on passe du semi-groupe \mathbb{N} des entiers non négatifs au groupe ordonné $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+)$ des entiers.

Ce groupe ordonné est très facile à calculer pour les algèbres de dimension finie telles que les algèbres A_n , et pour l’algèbre $A = \overline{\bigcup A_n}$ rencontrée précédemment. Puisque A_n est la somme directe de deux algèbres de matrices, on a

$$K_0(A_n) = \mathbb{Z}^2, \quad K_0(A_n)^+ = \mathbb{Z}^+ \oplus \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Le groupe ordonné $(K_0(A), K_0(A)^+)$ est alors la limite inductive des groupes ordonnés $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+ \oplus \mathbb{Z}^+)$, l’inclusion de la $n^{\text{ième}}$ dans la $(n+1)^{\text{ième}}$ étant donnée par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

qui correspond à l'inclusion $A_n \subset A_{n+1}$ décrite précédemment.

Puisque cette matrice définit une bijection $(a, b) \rightarrow (a + b, a)$ de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{Z}^2 , la limite inductive souhaitée est le groupe $K_0(A) = \mathbb{Z}^2$. Pourtant, cette bijection n'est pas une bijection de $\mathbb{Z}^+ \oplus \mathbb{Z}^+$ dans $\mathbb{Z}^+ \oplus \mathbb{Z}^+$, et dans la limite, le semi-groupe $K_0(A)^+$ devient $K_0(A)^+ = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) a + b \geq 0\}$, comme on le voit en diagonalisant la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (Fig. 4).

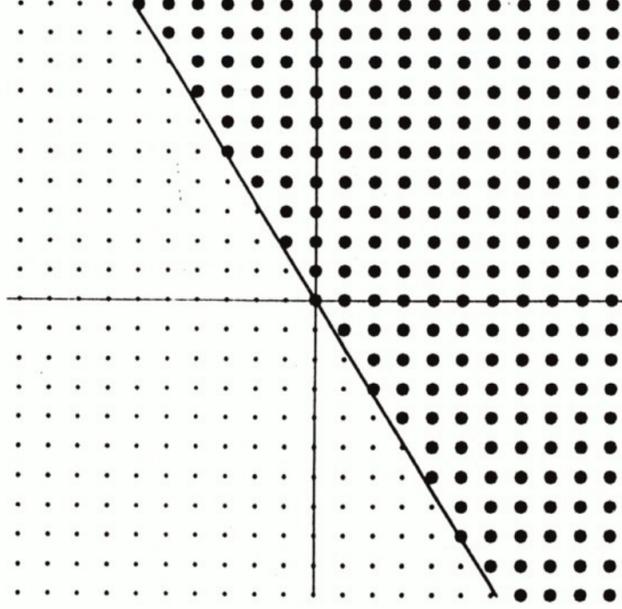


FIGURE 4. $K_0^+(A) = \left\{ (n, m) \in \mathbb{Z}^2 ; n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + m \geq 0 \right\}$.

Il découle de cela que, modulo le choix de la base de \mathbb{Z}^2 , i.e. modulo $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, le nombre d'or apparaît comme un invariant topologique de l'espace X à travers la C^* -algèbre A . Selon une autre formulation, on montre que cette C^* -algèbre a une trace unique τ . Ainsi, il existe une unique forme linéaire τ sur A telle que $\tau(xy) = \tau(yx)$ pour tout $x, y \in A$ et $\tau(1) = 1$. Les valeurs de τ sur les projections forment l'intersection $\left(\mathbb{Z} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \mathbb{Z} \right) \cap \mathbb{R}_+$. Cette trace τ est *positive*, i.e., satisfait

$$\tau(a^*a) \geq 0 \quad (\forall a \in A)$$

et elle peut être calculée pour $a = a_{(z, z)}$ directement comme l'intégrale des éléments diagonaux de la matrice a :

$$\tau(a) = \int_K a_{(z, z)} d\mu(z),$$

où la mesure de probabilité μ sur K est déterminée de manière unique par la condition $\tau(ab) = \tau(ba)$ ($\forall a, b \in A$). En théorie de la mesure classique, étant donnée une mesure de Radon ρ sur un espace compact Y , l'espace de Hilbert $L^2(Y, \rho)$ s'obtient comme la complétion de $C(Y)$ pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} d\rho$, et $L^\infty(Y, \rho)$ est la fermeture faible de l'algèbre $C(Y)$ agissant par multiplication sur $L^2(Y, \rho)$. Dans le cas qui nous intéresse, l'algèbre A remplace $C(Y)$, la trace positive τ remplace la mesure de Radon ρ , et la fermeture faible de l'action de A par multiplication

à gauche sur $L^2(A, \tau)$ (la complétion de A pour le produit scalaire $\langle a, b \rangle = \tau(a^*b)$) est le facteur hyperfini de type II_1 de Murray et von Neumann [Mur-N], que l'on dénotera par R .

Alors que la dimension continue de Murray et von Neumann peut prendre toutes les valeurs réelles positives pour les projections sur R (ou des anneaux de matrices $M_n(R)$) puisque $\dim(e) = \tau(e)$, pour les projections qui appartiennent à A , cette dimension ne peut prendre que des valeurs dans $\mathbb{Z} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\mathbb{Z}$, ce qui rend compte du rôle de ces nombres pour mesurer les densités des types de tuiles ou des types de motifs dans un pavage de Penrose générique, selon notre interprétation dans le chapitre I des dimensions continues comme densités. Pour résumer, on a montré dans cette exemple que la topologie de X est loin d'être triviale, qu'elle donne naissance à la C^* -algèbre A , qui est une C^* -algèbre *simple*, uniquement caractérisée comme C^* -algèbre (à équivalence de Morita près) par les propriétés

- 1) A est la limite inductive d'algèbres de dimension finie ; on dit qu'elle est approximativement finie (ou AF) ;
- 2) $(K_0(A), K_0(A)^+) = \left(\mathbb{Z}^2, \left\{ (a, b) ; \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) a + b \geq 0 \right\}\right)$.

Finalement, on note que la C^* -algèbre A est exactement celle qui intervient dans la construction par Vaughan Jones [Jones] des sous-facteurs d'indice inférieur à 4, pour un indice égal au nombre d'or (Chapitre 5, Section 10). Ceci peut être exploité pour décrire explicitement le facteur dans cette situation géométrique.

3) Appendice D : pavages de Penrose (extrait du livre d'Alain Connes *Noncommutative geometry*⁷, (p. 179 à 182).

Dans cette section, je revois pour faciliter la tâche de la lectrice, les résultats classiques ([246]) sur les pavages du plan de R. Robinson et R. Penrose.

On considère d'abord deux types de tuiles triangulaires, L_A et S_A , comme cela est représenté sur la figure 10. Les sommets sont colorés en blanc ou noir, et les arêtes entre deux sommets de la même couleur sont orientées. La tuile L_A a deux sommets noirs et un blanc, alors que la tuile S_A a deux sommets blancs et un noir.

Une tuile de type A du plan est définie par une triangulation du plan par des triangles isométriques à L_A ou S_A , de telle façon que les couleurs des sommets communs, et les orientations des arêtes communes, sont identiques.

La lectrice est renvoyée à [246] pour la preuve de l'existence de tels pavages du plan (voir Figure 3 dans la Section 3 de ce chapitre). On dira que deux pavages T et T' sont identiques s'ils peuvent être obtenus l'un à partir de l'autre par une isométrie du plan euclidien.

⁷Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994, ISBN: 0-12-185860-X. 1994.

Consultable sur le site d'Alain Connes

<https://alainconnes.org/wp-content/uploads/book94bigpdf.pdf> .

Soit X l'ensemble de tous les pavages du plan de type A (à isométrie près). Le résultat principal que nous utiliserons est la possibilité de paramétrer X par l'ensemble K des suites infinies $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \{0, 1\}$, de 0 et de 1, satisfaisant

$$a_n = 1 \implies a_{n+1} = 0$$

de telle façon que tout pavage T de type A provient d'une suite, $T = T(a)$, et que deux suites a et b amènent au même pavage si et seulement s'il existe un indice N tel que $a_n = b_n$, pour tout $n \geq N$. Comme ceci est un point important, je décrirai la correspondance $a \mapsto T(a)$ explicitement ([246], p. 568).

Si T est un pavage de type A , et si on efface de la triangulation T toutes les arêtes courtes qui joignent deux sommets de couleurs différentes et si l'on sépare une L_A -tuile d'une S_A -tuile (Figure 11), on obtient une nouvelle triangulation T_1 du plan dont les triangles sont isométriques à l'un des deux triangles L_B, S_B de la Figure 10. On obtient de cette manière un pavage du plan de type B , c'est-à-dire une triangulation du plan par des triangles isométriques à L_B ou à S_B , telle que les couleurs des sommets communs, et les orientations des arêtes communes, sont les mêmes. Si, dans la triangulation T_1 , on efface toutes les arêtes qui joignent deux sommets de la même couleur et si on sépare une L_B -tuile d'une S_B -tuile, on obtient une nouvelle triangulation T_2 dont les triangles sont isométriques à l'un des triangles $L_{\tau A'}, S_{\tau A'}$ de la Figure 10. En itérant cette procédure, on obtient de cette manière une suite T_n de triangulations du plan. À chacune d'elles correspondent des triangles L_n et S_n . Étant donné un pavage T de type A et un triangle α de la triangulation T (Figure 11), on associe à ce dernier la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où a_n est égal à 0 ou 1 selon que le triangle de T_n qui contient α est grand (i.e., isométrique à L_n) ou petit. Dénotons par $i(T, \alpha)$ la suite obtenue de cette façon.

On dénote alors par K l'ensemble des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \{0, 1\}$, telles que $a_n = 1 \implies a_{n+1} = 0$. Il est clair que toute suite de la forme $i(T, \alpha)$ appartient à K , parce que le triangle S_n n'est pas utilisé pour construire $S_{n+1} = L_n$. Inversement ([246], p. 568), on montre que tout élément a de K est de la forme $i(T, \alpha)$ pour un pavage adéquat de type A et un α adéquat.

Deux triangles α, β d'un pavage T apparaissent, pour n suffisamment grand, dans le même triangle de T_n . De cela, il découle que les suites $a = i(T, \alpha)$ et $b = i(T, \beta)$ satisfont la condition

$$a_m = b_m, \quad \forall m \geq n. \tag{*}$$

Inversement ([246], p. 568), on montre que si $a = i(T, \alpha)$ et $b \in K$ satisfont (*), alors il existe un triangle β de T tel que $b = i(T, \beta)$.

On obtient de cette manière une bijection entre l'ensemble X des pavages de Penrose et le quotient K/\mathcal{R} de l'ensemble K par la relation d'équivalence \mathcal{R} définie par la (*) ([246], p. 568).

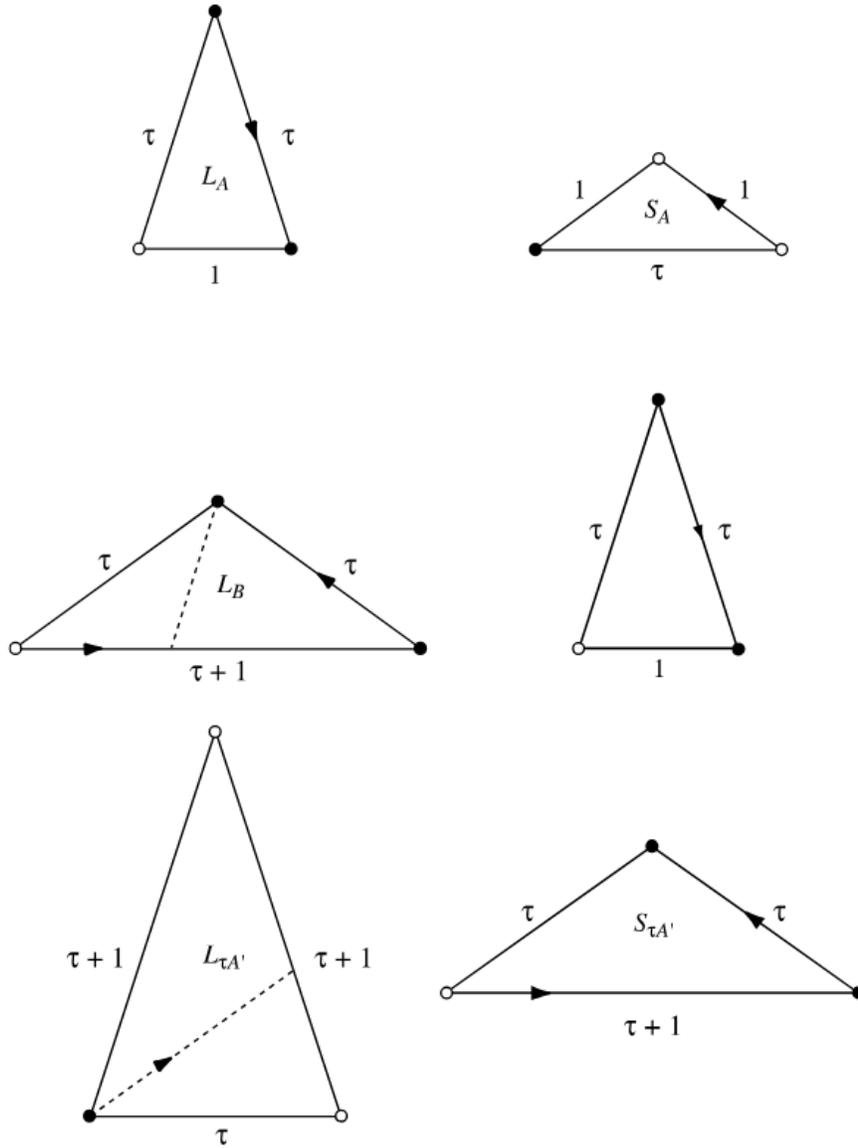
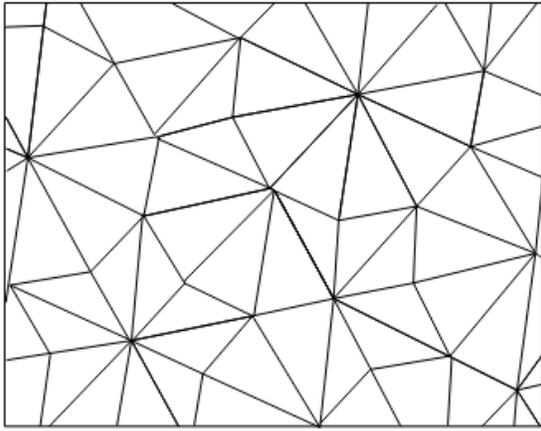
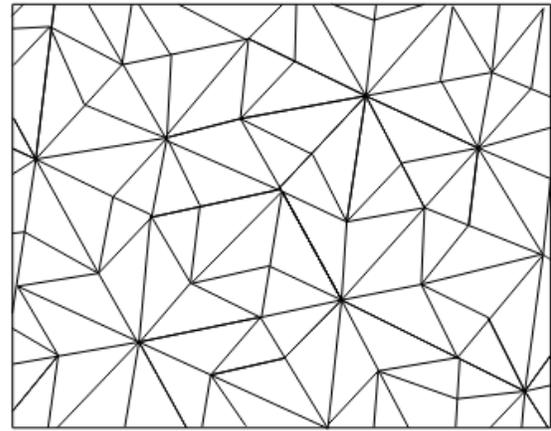


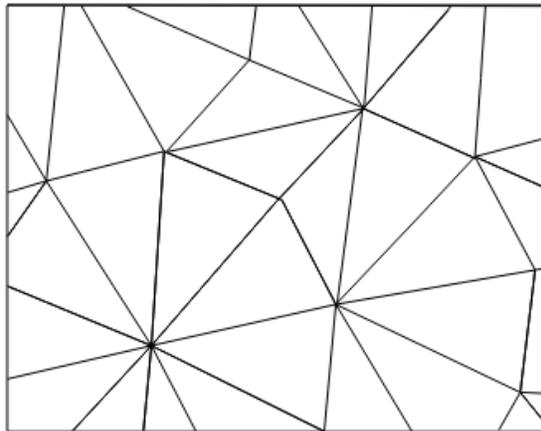
FIGURE 10. Tuiles élémentaires (voir [246])



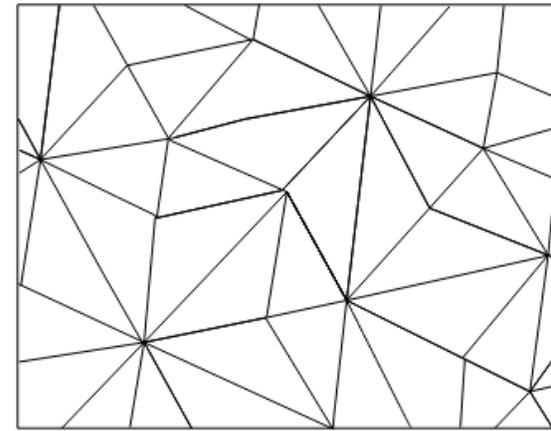
2



1



4



3

FIGURE 11. Une suite de motifs de triangulation (voir [246]).⁸

⁸Note de la traductrice : noter la numérotation de droite à gauche des graphiques.

4) 3. L'espace X des pavages de Penrose ^{9 10}

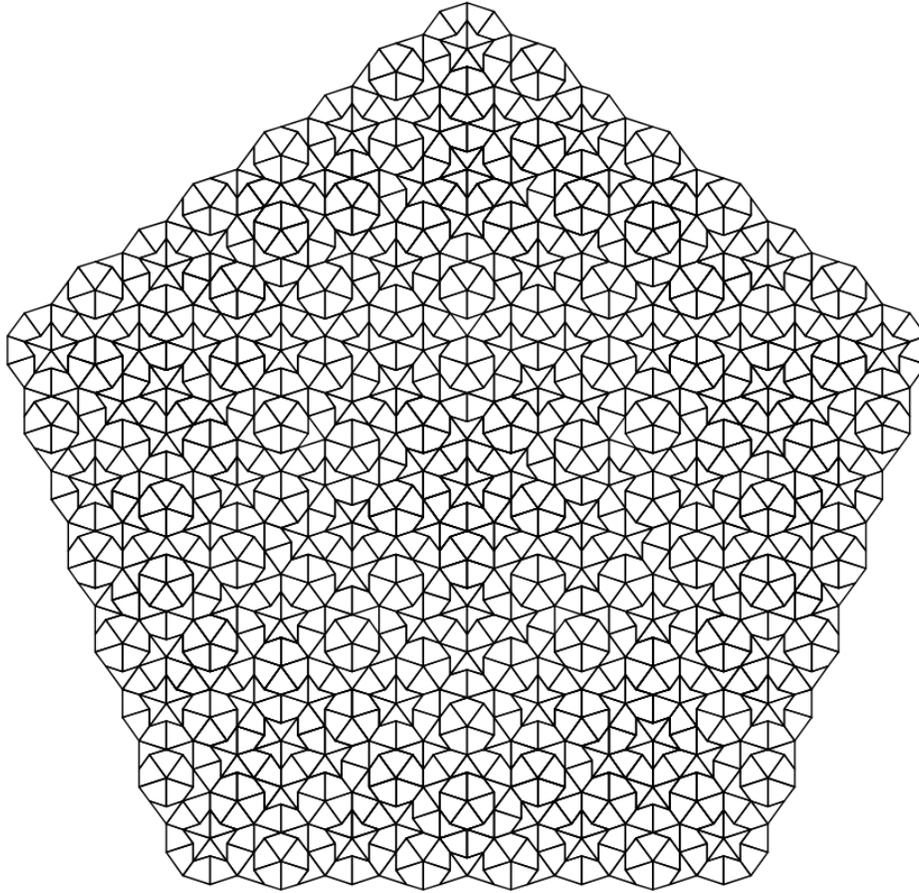


FIGURE 3. Un pavage de Penrose

J'ai eu la chance d'assister à une conférence de R. Penrose au sujet des pavages quasi-périodiques du plan (Figure 3). Penrose a construit de tels pavages en utilisant deux tuiles simples A et B . Le pavage T dépend des choix successifs effectués au cours de la construction. Plus précisément, pour construire un tel pavage, on doit choisir une suite $(z_n)_{n=0,1,2,\dots}$ de 0 et 1 qui satisfait la contrainte de cohérence suivante :

$$z_n = 1 \implies z_{n+1} = 0. \quad (3)$$

On utilise la valeur de z_n dans la construction de T comme indiqué dans l'appendice D. Pourtant, il peut arriver que deux suites différentes $z = (z_n)$ et $z' = (z'_n)$ amènent au même pavage ; en fait,

$$T \text{ est identique à } T' \iff \exists n \text{ tel que } z_j = z'_j, \forall j \geq n. \quad (4)$$

⁹Cette traduction correspond à l'extrait p. 95 de la version du livre d'Alain Connes qu'on peut trouver sur le site d'Andrew Ranicki ici <https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/connes.pdf>.

¹⁰Note de la traductrice : cette traduction ressemble beaucoup à la première traduction, mais il y a quelques éléments qui diffèrent, d'où notre volonté de la traduire également.

Ainsi, l'espace X des pavages obtenus est l'ensemble quotient K/\mathcal{R} d'un espace compact K par une relation d'équivalence \mathcal{R} . L'espace compact K , homéomorphe à l'ensemble de Cantor, est l'ensemble des suites $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de 0 et 1 qui satisfait la contrainte (1) ; c'est par construction un sous-ensemble fermé du produit d'un nombre infini d'ensembles à deux éléments. La relation d'équivalence \mathcal{R} est donnée par

$$z \sim z' \iff \exists n \text{ tel que } z_j = z'_j, \forall j \geq n. \quad (5)$$

Ainsi, X est l'espace quotient K/\mathcal{R} . C'est exactement sous cette forme que Penrose a présenté son ensemble de pavages dans son exposé. Si on essaye de comprendre l'espace X comme un espace ordinaire, on voit très vite que les outils classiques ne fonctionnent pas, et ne permettent pas de distinguer X de l'espace constitué d'un point unique. Par exemple, étant donnés deux pavages T_1 et T_2 et une portion finie P de T_1 , on peut trouver exactement la même P apparaissant dans T_2 ; ainsi, aucune portion finie ne permet de distinguer T_1 de T_2 ([246]). Par conséquent, toute configuration qui apparaît dans un certain pavage T , telles que celles présentées sur la Figure 3, apparaîtra (et un nombre infini de fois) dans n'importe quel autre pavage T' . La propriété géométrique se traduit par une trivialité de la topologie de X . La topologie naturelle sur X a pour ensembles fermés $F \subset X$ les ensembles fermés de K qui sont saturés pour \mathcal{R} . Mais, toute classe d'équivalence pour \mathcal{R} est dense dans K , et il en découle que les seuls ensembles fermés $F \subset X$ sont $F = \emptyset$ et $F = X$. Par conséquent, la topologie de X est triviale et ne permet pas de distinguer X d'un point ; elle n'est, bien sûr, pas de Hausdorff et elle ne contient pas d'information intéressante.

Une attitude possible face à un tel exemple pourrait être de dire que, à variation près, il y a *seulement un* pavage T du plan et de ne pas être perturbé par l'indiscernabilité entre X et un point. Pourtant, nous verrons que X est un espace "non commutatif" très intéressant ou espace "quantique", et que l'un de ses invariants topologiques, le groupe de dimension, est le sous-groupe de \mathbb{R} engendré par \mathbb{Z} et le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Cela montrera, en particulier, pourquoi la densité, ou la fréquence d'apparition, d'un motif dans le pavage doit, complètement en fonction de la topologie de l'ensemble de tous les pavages, être un élément du groupe $\mathbb{Z} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\mathbb{Z}$.

Donnons maintenant la construction de la C^* -algèbre A de l'espace $X = K/\mathcal{R}$ des pavages de Penrose (voir aussi [154]). Un élément général $a \in A$ est donné par une matrice $(a_{z,z'})$ de nombres complexes, indicée par les couples $(z, z') \in \mathcal{R}$. Le produit de deux éléments de A est donné par la matrice produit $(ab)_{z,z''} = \sum_{z'} a_{z,z'} b_{z',z''}$. À chaque élément x de X correspond une classe d'équivalence pour \mathcal{R} , qui est un sous-ensemble dénombrable de K . On peut par conséquent associer à x l'espace de Hilbert ℓ_x^2 ayant cet ensemble dénombrable pour base orthonormale. Tout élément a de A définit un opérateur sur ℓ_x^2 par l'équation

$$(a(x)\zeta)_z = \sum_{z'} a_{z,z'} \zeta_{z'} \quad \forall \zeta \in \ell_x^2.$$

Pour $a \in A$, la norme $\|a(x)\|$ de l'opérateur $a(x)$ est finie et ne dépend pas de $x \in X$; c'est la norme de la C^* -algèbre. Bien sûr, pour être plus technique, on doit donner une définition précise de la classe des matrices a que l'on considère. Faisons-le. La relation $\mathcal{R} \subset K \times K$ est l'union croissante des relations $\mathcal{R}_n = \{(z, z') ; z_j = z'_j \ (\forall j \geq n)\}$, et en tant que telle, \mathcal{R} hérite d'une topologie localement compacte naturelle (non égale à sa topologie comme sous-ensemble de $K \times K$). Alors,

A est par définition la fermeture pour la norme de $C_c(\mathcal{R})$ dans la norme ci-dessus. On peut montrer que tout élément $a \in A$ de cette norme provient d'une matrice $(a_{z,z'})$, $(z, z') \in \mathcal{R}$.

On peut résumer la construction ci-dessus en disant que, alors que l'espace X ne peut pas être décrit de façon non triviale au moyen des fonctions à valeurs dans \mathbb{C} , il existe une classe très riche de fonctions à valeurs d'opérateurs sur X :

$$a(x) \in \mathcal{L}(\ell_x^2) \quad (\forall x \in X).$$

La structure algébrique de A est dictée par cette façon de voir, parce qu'on a

$$\begin{aligned} (\lambda a + \mu b)(x) &= \lambda a(x) + \mu b(x) \\ (ab)(x) &= a(x)b(x) \end{aligned}$$

pour tous $a, b \in A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $x \in X$.

Pour montrer clairement la richesse de la C^* -algèbre A , je vais maintenant donner une description équivalente de cette C^* -algèbre, comme une limite inductive d'algèbres finie-dimensionnelles. L'ensemble de Cantor K est par construction la limite projective des ensembles finis K_n , où K_n est l'ensemble des suites de $n + 1$ éléments $(z_j)_{j=0,1,\dots,n}$ de 0 et 1, satisfaisant la contrainte $z_j = 1 \implies z_{j+1} = 0$. Il y a une application évidente $K_{n+1} \rightarrow K_n$ qui consiste à "oublier" le z_{n+1} final. Sur l'ensemble fini K_n , considérons la relation

$$\mathcal{R}^n = \{(z, z') \in K_n \times K_n ; z_n = z'_n\}.$$

Toute fonction $a = a_{z,z'}$ sur \mathcal{R}^n définit un élément $\tilde{a}_{z,z'}$ de la C^* -algèbre A par les équations

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{z,z'} &= a_{(z_0,\dots,z_n),(z'_0,\dots,z'_n)} \quad \text{si } (z, z') \in \mathcal{R}^n \\ \tilde{a}_{z,z'} &= 0 \quad \text{si } (z, z') \notin \mathcal{R}^n \end{aligned}$$

De plus, la sous-algèbre de A obtenue par les fonctions sur \mathcal{R}^n est facile à calculer : c'est la somme directe $A_n = M_{k_n}(\mathbb{C}) \oplus M_{k'_n}(\mathbb{C})$ de deux algèbres de matrices, où k_n (resp. k'_n) est le nombre d'éléments de K_n , qui se terminent par 0 (resp. par 1). Finalement, l'inclusion $A_n \rightarrow A_{n+1}$ est déterminée de manière unique par les égalités $k_{n+1} = k_n + k'_n$ et $k'_{n+1} = k_n$, ce qui permet de plonger les $M_{k_n} \oplus M_{k'_n}$ comme matrices par blocs dans $M_{k_{n+1}}$ par l'homomorphisme $(a, a') \rightarrow a$ dans $M_{k'_{n+1}}$.

La C^* -algèbre A est alors la limite inductive des algèbres de dimension finie A_n , et on peut calculer ses invariants pour la classification de Bratteli, Elliott, Effros, Shen et Handelman ([65], [193], [194], [191]) de ces C^* -algèbres particulières. L'invariant à calculer, dû à G. Elliott, est un groupe ordonné, notamment le groupe $K_0(A)$, décrit précédemment, engendré par les classes d'isomorphismes stables des modules projectifs finis sur A . De façon équivalente, il est engendré par les classes d'équivalence de projections, comme dans le travail de Murray et von Neumann sur les facteurs.

Une projection $e \in M_k(A)$ est un élément de $M_k(A)$ tel que $e^2 = e$ et $e = e^*$. Les projections e, f sont équivalentes s'il existe $u \in M_k(A)$ tel que $u^*u = e$ et $uu^* = f$. Pour pouvoir ajouter les

classes d'équivalence des projections, on utilise les matrices $M_n(A)$, avec n arbitraire ; cela permet de donner du sens à

$$e \oplus f = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

pour deux projections $e, f \in M_k(A)$. Le groupe ordonné $(K_0(A), K_0(A)^+)$ s'obtient canoniquement à partir du semi-groupe des classes d'équivalence de projections $e \in M_n(A)$ par l'opération habituelle de symétrisation par laquelle on passe d'un semi-groupe \mathbb{N} des entiers non négatifs au groupe ordonné $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+)$ des entiers.

Ce groupe ordonné est très facile à calculer pour les algèbres de dimension finie telle que les algèbres A_n , et pour l'algèbre $A = \overline{\bigcup A_n}$ rencontrée précédemment. Puisque A_n est la somme directe de deux algèbres de matrices, on a

$$K_0(A_n) = \mathbb{Z}^2, \quad K_0(A_n)^+ = \mathbb{Z}^+ \oplus \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Le groupe ordonné $(K_0(A), K_0(A)^+)$ est alors la limite inductive des groupes ordonnés $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+ \oplus \mathbb{Z}^+)$, l'inclusion de la $n^{\text{ième}}$ dans la $(n+1)^{\text{ième}}$ étant donnée par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

qui correspond à l'inclusion $A_n \subset A_{n+1}$ décrite précédemment.

Puisque cette matrice définit une bijection $(a, b) \rightarrow (a+b, a)$ de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{Z}^2 , la limite inductive souhaitée est le groupe $K_0(A) = \mathbb{Z}^2$. Pourtant, cette bijection n'est pas une bijection de $\mathbb{Z}^+ \oplus \mathbb{Z}^+$ dans $\mathbb{Z}^+ \oplus \mathbb{Z}^+$, et dans la limite, le semi-groupe $K_0(A)^+$ devient

$$K_0(A)^+ = \left\{ (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) a + b \geq 0 \right\}$$

comme on le voit en diagonalisant la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Il découle de cela que, modulo le choix de la base de \mathbb{Z}^2 , i.e. modulo $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, le nombre d'or apparaît comme un invariant topologique de l'espace X via la C^* -algèbre A . Selon une autre formulation, on montre que cette C^* -algèbre a une trace unique τ . Ainsi, il existe une unique forme linéaire τ sur A telle que $\tau(xy) = \tau(yx)$ pour tous $x, y \in A$ et $\tau(1) = 1$. Les valeurs de τ sur les projections forment l'intersection $\left(\mathbb{Z} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathbb{Z} \right) \cap \mathbb{R}_+$. Cette trace τ est *positive*, i.e., elle satisfait

$$\tau(a^*a) \geq 0 \quad (\forall a \in A)$$

et elle peut être calculée pour $a = a_{(z, z')}$ directement comme l'intégrale des éléments diagonaux de la matrice a :

$$\tau(a) = \int_K a_{(z, z)} d\mu(z),$$

où la mesure de probabilité μ sur K est déterminée de manière unique par la condition $\tau(ab) = \tau(ba)$ ($\forall a, b \in A$). En théorie classique de la mesure, étant donnée une mesure de Radon ρ

sur un espace compact Y , l'espace de Hilbert $L^2(Y, \rho)$ s'obtient comme la complétion de $C(Y)$ pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} d\rho$, et $L^\infty(Y, \rho)$ est la fermeture faible de l'algèbre $C(Y)$ agissant par multiplication sur $L^2(Y, \rho)$. Dans le cas qui nous intéresse, l'algèbre A remplace $C(Y)$, la trace positive τ remplace la mesure de Radon ρ , et la fermeture faible de l'action de A par multiplication à gauche sur $L^2(A, \tau)$ (la complétion de A pour le produit scalaire $\langle a, b \rangle = \tau(a^*b)$) est le facteur hyperfini de type II_1 de Murray et von Neumann [Mur-N], que l'on dénotera par R .

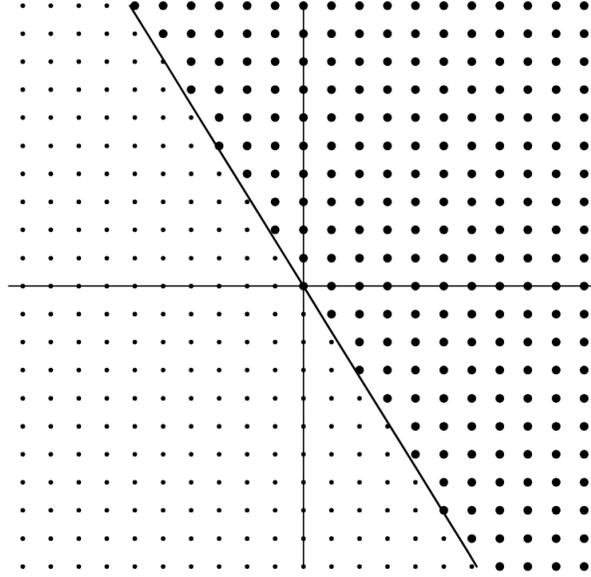


FIGURE 4. $K_0^+(A) = \left\{ (n, m) \in \mathbb{Z}^2 ; n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + m \geq 0 \right\}$.

Alors que la dimension continue de Murray et von Neumann peut prendre toutes les valeurs réelles positives pour les projections de R (ou sur les anneaux de matrices $M_n(R)$) puisque $\dim(e) = \tau(e)$, pour les projections qui appartiennent à A , cette dimension peut seulement prendre des valeurs dans $\mathbb{Z} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \mathbb{Z}$, ce qui rend compte du rôle de ces nombres pour mesurer les densités des types de tuiles ou des types de motifs dans un pavage de Penrose générique, selon notre interprétation dans le chapitre I des dimensions continues comme densités. Pour résumer, on a montré dans cet exemple que la topologie de X est loin d'être triviale, qu'elle donne naissance à la C^* -algèbre A , qui est une C^* -algèbre *simple*, caractérisée de manière unique comme C^* -algèbre (à équivalence de Morita près) par les propriétés

- 1) A est la limite inductive d'algèbres de dimension finie ; on la dit approximativement finie (ou AF) ;
- 2) $(K_0(A), K_0(A)^+) = \left(\mathbb{Z}^2, \left\{ (a, b) ; \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) a + b \geq 0 \right\} \right)$.

Finalement, on note que la C^* -algèbre A est exactement celle qui intervient dans la construction de Vaughan Jones [Jones] des sous-facteurs d'indice inférieur à 4, pour un indice égal au nombre d'or (Chapitre 5, Section 10). Cela peut être exploité pour décrire explicitement le facteur dans cette situation géométrique.