Pensées impulsées (Denise Vella-Chemla, juin 2023)

On voudrait noter ici une toute petite idée suite à la traduction de la dernière note d'Alain Connes et Caterina Consani intitulée *Riemann-Roch pour l'anneau* $\mathbb{Z}$[1] et de la retranscription du texte d'André Weil en référence de l'article en question, et intitulé *Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques* ([3])[2] .

On retrouve deux extraits de textes d'André Weil.

Un extrait de *De la métaphysique aux mathématiques* ([1])

> Heureusement pour les chercheurs, à mesure que les brouillards se dissipent sur un point, c'est pour se reformer sur un autre. Une grande partie du colloque de Tokyo s'est déroulée sous le signe des analogies entre la théorie des nombres et la théorie des fonctions algébriques. Là, nous sommes encore en pleine métaphysique. C'est de ces analogies, parce que j'en ai quelque expérience personnelle, que je voudrais parler ici, avec l'espoir, vain peut-être, de donner aux lecteurs “honnêtes gens” de cette revue quelque idée des méthodes de travail en mathématique.
>
> Dès l'enseignement élémentaire, on fait voir aux élèves que la division des polynômes (à une variable) ressemble beaucoup à la division des entiers et conduit à des lois toutes semblables. Pour les uns comme pour les autres, il y a un plus grand commun diviseur, dont la détermination se fait par division successive. À la décomposition des nombres entiers en facteurs premiers correspond la décomposition des polynômes en facteurs irréductibles ; aux nombres rationnels correspondent les fonctions rationnelles, qui, elles aussi, peuvent toujours se mettre sous forme de fractions irréductibles ; celles-ci s'ajoutent par réduction au plus petit commun dénominateur, etc. Il est donc tout naturel de penser qu'il y a analogie entre les nombres algébriques (racines d'équations dont les coefficients sont des nombres entiers) et les fonctions algébriques d'une variable (racines d'équations dont les coefficients sont des polynômes à une variable).
>
> Le fondateur de la théorie des fonctions algébriques d'une variable aurait sans doute été Galois s'il avait vécu ; c'est ce que permettent de penser les indications qu'on trouve sur ce sujet dans sa célèbre lettre-testament, écrite à la veille de sa mort, d'où on peut conclure qu'il touchait déjà à quelques-unes des principales découvertes de Riemann. Peut-être aurait-il donné à cette théorie une allure algébrique, conforme à l'esprit des travaux contemporains d'Abel et de ses propres recherches d'algèbre pure.
>
> Au contraire, Riemann, l'un des moins algébristes sans doute parmi les grands mathématiciens du XIXème siècle, mit la théorie sous le signe du “transcendant” (mot qui, pour le mathématicien, s'oppose à “algébrique”, et désigne tout ce qui appartient en propre au continu). Les méthodes très puissantes mises en œuvre par Riemann

[1] traduction de l'article arxiv du 2 juin 2023 https://arxiv.org/pdf/2306.00456.pdf à l'adresse http://denise.vella.chemla.free.fr/trad-2306-00456-fr.pdf.

[2] à l'adresse http://denise.vella.chemla.free.fr/transc-Weil-analogie.pdf.

amenèrent presque du premier coup la théorie à un degré d'achèvement qui n'a guère été dépassé. Mais elles ne tiennent aucun compte des analogies avec les nombres algébriques, et ne peuvent être transposées telles quelles en vue de l'étude de ceux-ci, étude qui relève traditionnellement de l'arithmétique ou de la théorie des nombres, et qui, du vivant déjà de Riemann, était, en voie de développement rapide.

C'est Dedekind, ami intime de Riemann, mais algébriste consommé, qui devait le premier tirer parti des analogies en question et en faire un instrument de recherche. Il appliqua avec succès, aux problèmes traités par Riemann par voie transcendante, les méthodes qu'il avait lui-même créées et mises au point en vue de l'étude arithmétique des nombres algébriques ; et il fit voir qu'on peut retrouver ainsi la partie proprement algébrique de l'œuvre de Riemann.

À première vue, les analogies ainsi mises en évidence restaient superficielles, et ne paraissaient pas pouvoir porter sur les problèmes les plus profonds de l'une ni de l'autre théorie. Hilbert alla plus loin dans cette voie, à ce qu'il semble ; mais, s'il est probable que ses élèves subirent l'influence de ses idées sur ce sujet, il n'en est resté quelque trace que dans un compte rendu obscur qui n'a même pas été reproduit dans ses Œuvres complètes. Les lois non écrites de la mathématique moderne interdisent, en effet, de publier des vues métaphysiques de cette espèce. Sans doute est-ce mieux ainsi ; autrement on serait accablé d'articles encore plus stupides, sinon plus inutiles, que tous ceux qui encombrent à présent nos périodiques. Mais il est dommage que les idées de Hilbert n'aient été développées par lui nulle part. Il y avait loin encore, cependant, de l'arithmétique, où règne le discontinu, à la théorie des fonctions au sens classique. Or, en disant que les fonctions algébriques sont racines d'équations dont les coefficients sont des polynômes, j'ai volontairement omis un point important: ces polynômes eux-mêmes ont des coefficients mais ceux-ci, quels sont-ils ? Lorsqu'on traite de la division des polynômes dans l'enseignement élémentaire, il va sans dire que les coefficients sont des "nombres" : nombres "réels" (rationnels ou non, mais donnés en tout cas, si on veut, par un développement décimal), ou, à un niveau un peu plus élevé, nombres "réels ou imaginaires", ou, comme on dit, "nombres complexes". C'est exclusivement de nombres complexes qu'il s'agit dans la théorie riemannienne.

Mais, du point de vue de l'algébriste pur, tout ce qu'on demande aux "nombres" en question, c'est qu'ils se laissent combiner entre eux au moyen des quatre opérations (ce que l'algébriste exprime en disant qu'ils forment un "corps"). Si on n'en suppose pas plus sur leur compte, on obtient une théorie des fonctions algébriques, fort riche déjà (comme en témoigne le volume récent et déjà classique qu'a publié Chevalley sur ce sujet), mais qui ne l'est pas assez, pour que les analogies avec les nombres algébriques puissent être poursuivies jusqu'au bout.

Heureusement il s'est trouvé un domaine intermédiaire entre l'arithmétique et la théorie riemannienne, et qui possède, avec chacune de ces deux dernières théories, des ressemblances beaucoup plus étroites qu'elles n'en ont entre elles ; il s'agit des fonctions algébriques "sur un corps fini".

Comme on le savait depuis Gauss, s'il ne s'agit que de pouvoir faire les quatre opérations, il suffit d'un nombre fini d'éléments. Il suffit par exemple d'en avoir deux, qu'on nommera 0 et 1, et pour lesquels on posera par convention la table d'addition et la table de multiplication que voici[a] :

$$\begin{array}{lll} 0+0=0 & 0+1=1+0=1 & 1+1=0 \\ 0\times 0=0 & 0\times 1=1\times 0=0 & 1\times 1=1 \end{array}$$

Quelque paradoxale que puisse paraître au profane la règle $1+1=0$, quelque tentant qu'il soit de dire que c'est là un pur jeu de l'esprit qui ne répond à aucune "réalité", un tel système est monnaie courante pour le mathématicien ; et Galois en étendit beaucoup l'usage en construisant les "imaginaires de Galois".

Prenant donc les coefficients de nos polynômes dans un "corps de Galois", on construit des fonctions algébriques dont la théorie remonte à Dedekind mais s'est particulièrement développée depuis la thèse d'Artin. Pour dire en quoi elle consiste, il faudrait entrer dans des détails beaucoup trop techniques qui n'auraient pas leur place ici. Mais on peut, je crois, en donner une idée imagée en disant que le mathématicien qui étudie ces problèmes a l'impression de déchiffrer une inscription trilingue. Dans la première colonne se trouve la théorie riemannienne des fonctions algébriques au sens classique. La troisième colonne, c'est la théorie arithmétique des nombres algébriques. La colonne du milieu est celle dont la découverte est la plus récente ; elle contient la théorie des fonctions algébriques sur un corps de Galois.

Ces textes sont l'unique source de nos connaissances sur les langues dans lesquels ils sont écrits ; de chaque colonne, nous n'avons bien entendu que des fragments ; la plus complète et celle que nous lisons le mieux, encore à présent, c'est la première. Nous savons qu'il y a de grandes différences de sens d'une colonne à l'autre, mais rien ne nous en avertit à l'avance. À l'usage, on se fait des bouts de dictionnaire, qui permettent de passer assez souvent d'une colonne à la colonne voisine.

C'est ainsi qu'on avait déchiffré depuis longtemps, dans la dernière colonne, le début d'un paragraphe intitulé "fonction zéta". Vers la fin de ce paragraphe, on croit lire une phrase très mystérieuse ; elle dit que tous les zéros de la fonction se trouvent sur une certaine droite. Jamais on n'a pu savoir s'il en est bien ainsi, ou s'il y a eu erreur de lecture. C'est le célèbre problème de l'"hypothèse de Riemann", qui dans quelques mois sera tout juste centenaire.

La principale découverte d'Artin, dans sa thèse, c'est qu'il y a, dans la seconde colonne, un paragraphe intitulé aussi "fonction zéta", et qui est à peu de chose près une traduction de celui qu'on connaissait déjà ; notre dictionnaire s'en est trouvé beaucoup enrichi. Artin aperçut aussi, dans cette colonne, la phrase sur l'hypothèse de Riemann ; elle lui parut tout aussi mystérieuse que l'autre. Ce nouveau problème, à première vue, ne semblait pas plus facile que le précédent. En réalité, nous savons maintenant que la première colonne contenait déjà tous les éléments de sa solution. Il n'était que de traduire, d'abord en

[a] Remarque de la scribe : dans l'algèbre booléenne qu'utilisent les informaticiens, $1+1=1$, ci-dessous, sont fournis les règles de l'addition et de la multiplication de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

théorie “abstraite” des fonctions algébriques, puis dans le langage “galoisien” de la seconde colonne, des résultats obtenus depuis longtemps par Hurwitz en “riemannien”, et que les géomètres italiens avaient ensuite traduits dans leur propre langage. Mais les meilleurs spécialistes des théories arithmétique et “galoisienne” ne savaient plus lire le riemannien, ni à plus forte raison l’italien ; et il fallut vingt ans de recherches avant que la traduction fut mise au point et que la démonstration de l’hypothèse de Riemann dans la seconde colonne fut complètement déchiffrée.

Si notre dictionnaire était suffisamment complet, nous passerions aussitôt de là à la troisième colonne, et l’hypothèse de Riemann, la vraie, se trouverait démontrée, elle aussi. Mais nos connaissances n’atteignent pas jusque là ; bien des déchiffrements patients seront encore nécessaires avant que la traduction puisse être faite. Au cours du colloque auquel il a été fait allusion plus haut, il a été beaucoup discuté de “métaphysique” à propos de ces problèmes ; un jour celle-ci fera place à une théorie mathématique dans le cadre de laquelle ils trouveront leur solution. Peut-être, comme c’était le cas pour Lagrange, ne nous manque-t-il, pour franchir ce pas décisif, qu’une notion, un concept, une “structure”. D’ingénieux philologues ont bien trouvé le secret des archives de Nestor et de celles de Minos. Combien de temps faudra-t-il encore pour que notre pierre de Rosette, à nous autres arithméticiens, rencontre son Champollion ?

Petit encart de la scribe : cette référence à la pierre de Rosette nous ramène à la lecture d’un ancien roman intitulé *Le Secret de Champollion*, de Jean-Michel Riou et qui raconte, sous une forme épistolaire, la quête de Champollion pour déchiffrer les hiéroglyphes. Il s’agit d’établir un dictionnaire vers un langage que l’on ne connaît pas. On peut considérer qu’on essaie par les recherches sur la conjecture de Goldbach ou l’hypothèse de Riemann d’établir un dictionnaire entre des espaces que l’on comprendrait déjà vers l’espace des nombres premiers, dont on ne connaît pas encore la véritable nature.

Un extrait de *L’avenir des mathématiques* ([2])

Ce qui précède met déjà en évidence, non seulement la vitalité de l’arithmétique moderne, mais aussi les liens étroits qui, aujourd’hui, comme au temps d’Euler et au temps de Jacobi, l’unissent aux parties les plus profondes de la théorie des groupes et de la théorie des fonctions. Cette unité essentielle, dont les manifestations sont si diverses et multiples, se retrouve sur bien d’autres points. L’introduction par Hermite des variables continues dans la théorie des nombres a abouti à l’étude systématique des groupes discontinus de nature arithmétique au moyen des groupes continus dans lesquels ils se laissent plonger, des espaces riemanniens symétriques associés à ces groupes, des propriétés différentielles et topologiques de leurs domaines fondamentaux (ou plutôt, dans le langage moderne, de leurs espaces quotients), et des fonctions automorphes qui y appartiennent. L’œuvre de Siegel, continuant la grande tradition de Dirichlet, d’Hermite, de Minkowski, nous a ouvert ici des voies toutes nouvelles. D’un côté, nous rejoignons par là Fermat, Lagrange et Gauss, la représentation des nombres par les formes, et les genres de formes quadratiques. En même temps commence à se préciser à nos yeux le principe si fécond d'après lequel l'aspect global d'un problème arithmétique peut, en certaines circonstances, se reconstituer à partir de ses aspects locaux. Par exemple, nous voyons à maintes reprises, chez Siegel, le nombre de solutions de tel problème arithmétique dans le corps des nombres rationnels exprimé au moyen des nombres définis par les problèmes locaux correspondants, densités de solutions dans le corps réel et dans les corps p-adiques pour toutes les valeurs du nombre premier p c'est là un principe, analogue au théorème des résidus sur la surface de Riemann d'une courbe algébrique, auquel il y a lieu de rattacher aussi les célèbres "séries singulières" qui apparaissent dans l'application de la méthode de Hardy-Littlewood aux problèmes de la théorie analytique des nombres. Est-il possible d'en donner un énoncé général, qui permette d'un seul coup d'obtenir tous les résultats de cette nature, de même que la découverte du théorème des résidus a permis de calculer par une méthode uniforme tant d'intégrales et de séries qu'on ne traitait auparavant que par des procédés disparates ? Ce n'est pas là encore, semble-t-il, un problème pour l'avenir immédiat ; il n'en est que plus important d'en préparer la solution par l'examen de cas particuliers bien choisis. C'est le même principe qui fournira peut-être un jour la raison profonde de l'existence des produits eulériens, dont les recherches de Hecke viennent seulement de nous révéler l'extrême importance en théorie des nombres et en théorie des fonctions ; ici, ce sont les classes mêmes des formes quadratiques, et non pas seulement comme avec Siegel leurs genres, que nous commençons à atteindre ; en même temps, nous nous trouvons au cœur de la théorie des fonctions modulaires, que ces travaux ont renouvelée entièrement, et de la théorie des fonctions thêta. Ce domaine est encore pour nous si mystérieux, les questions qui s'y posent sont si nombreuses et si fascinantes, que toute tentative pour les classer par ordre d'importance serait prématuré.

On a différents ensembles (celui des réels, celui des complexes, celui des entiers p-adiques de Hensel, celui des polynômes du second degré, celui des polynômes de degré 3 munis de certaines fonctions et on essaie de trouver un ensemble "prototypal"[3] dont les trois ensembles sus-cités (et potentiellement d'autres) seraient autant d'instances différentes.

On doit aussi trouver une (ou des) fonction entre chacun des ensembles et le prototype qui préserve les structures.

Références

[1] André Weil, Œuvres scientifiques / Collected papers, vol. 2, (1951-1964), De la métaphysique aux mathématiques, Springer-Verlag, 1960 (a), p. 408.

[2] ________, Œuvres scientifiques / Collected papers, vol. 1, (1926-1951), L'avenir des mathématiques, Springer-Verlag, 1947 (a), p. 359.

[3] ________, Œuvres scientifiques / Collected papers, vol. 1, (1926-1951), Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques, Springer-Verlag, 1939 (a), p. 236.

[3]Pour les informaticiens, la notion de prototype correspondrait peut-être à la notion d'objet des *langages orientés objet* ou bien à la notion de type, auxquels sont associées les fonctions pouvant agir en leur sein.