1 Exponentielles de nombres premiers

Au sujet de la question posée sur les exponentielles de nombres premiers, j'en ai d'abord calculé quelques unes sur une calculatrice scientifique.
Le nombre ayant pour Log 3 (du moins fourni par la calculatrice) est 20,08553692.
Celui qui a 5 pour Log est 148,4131591.
Pour 7, c'est 1096,633158.
Pour 11, 59874,14172, etc.
Pour 19 et 23, la calculatrice fournit des nombres entiers.
Pour 29, ça sort du cadre : $3,93133429710^{12}$.
Alors j'ai cherché sur la toile et trouvé deux extraits de livres qui pourraient vous intéresser en pièces jointes.
Enfin, dans le livre d'Aigner et Ziegler "Raisonnement divins", dans le chapitre 6, page 37, il y a une démonstration du fait que tous ces nombres sont irrationnels, indépendamment de la primarité :
Théorème : e^r est irrationnel pour tout $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.
Tout cela me dépasse totalement, je ne suis à peu près à l'aise que dans le discret, l'entier, la combinatoire. Tout le reste est trop loin. Je sais que c'est ridicule de ne pas apprécier à ce point-là de réfléchir dans le continu (cf Kronecker) mais comme je n'ai pas d'obligation, autant m'orienter vers ce qui m'attire davantage.

2 Décomposants de Goldbach et découverte extraordinaire d'Euler

Dans l'article "Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs", Euler fournit une récurrence surprenante qui lie entre elles les sommes des diviseurs des entiers successifs.

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) - ... \quad (1)$$

Monsieur Giard fournit sur la toile une autre récurrence, non moins surprenante, pour calculer la somme des diviseurs d'un entier.

$$\sigma(n) = \frac{12}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{k=n-1} (5k(n-k) - n^2)\sigma(k)\sigma(n-k) \quad (2)$$

Un nombre premier p a pour somme de diviseurs $p+1$. Donc p est premier si et seulement si :

$$\frac{12}{n^2(n^2-1)} \sum_{k=1}^{k=n-1} (5k(n-k) - n^2)\sigma(k)\sigma(n-k) = 1 \quad (3)$$

Cette récurrence fonctionne effectivement. Elle manipule deux triangles de nombres, qui rappellent le triangle de Pascal.
Voici le premier triangle :
1
1 1
-1 4 -1
-5 5 5 -5
-11 4 9 4 -11
-19 1 11 11 1 -19
-29 -4 11 16 11 -4 -29
-41 -11 9 19 19 9 -11 -41
-55 -20 5 20 25 20 5 -20 -55

Le triangle ci-dessus contient les coefficients multiplicatifs
$p(n,k) = -n^2 + 5kn - 5k^2$ pour n variant de 2 à 10 et pour k variant dans chaque ligne de 1 à $n-1$.

Et voici le deuxième triangle :
1
3 3
4 9 4
7 12 12 7
6 21 16 21 6
12 18 28 28 18 12
8 36 24 49 24 36 8
15 24 48 42 42 48 24 15
13 45 32 84 36 84 32 45 13

Pour trouver le premier élément de chaque ligne de ce deuxième triangle, on multiplie terme à terme les éléments des lignes précédentes dans les deux triangles et on multiplie le résultat par $\frac{12}{n^2(n-1)}$.
Pour trouver les autres éléments d'une ligne, on se sert des premiers éléments de chaque ligne, en les multipliant deux à deux.
Les premiers éléments des lignes de ce deuxième triangle sont les sommes des diviseurs des entiers successifs.

La conjecture de Goldbach est vérifiée par un nombre pair $2a$ s'il existe deux nombres premiers p et q tels que $\sigma(p) + \sigma(q) = 2a + 2$. La récurrence fournie ci-dessus permettrait-elle d'approcher la conjecture d'une autre manière ?...
Indépendamment d'une démonstration éventuelle, la formule $\sigma(p)+\sigma(q) = 2a+2$ permet d'imaginer une sorte de "paysage de Goldbach" en trois dimensions (inspiré par le paysage associé à la fonction zeta par Riemann tel que décrit dans les livres de vulgarisation "la symphonie des nombres premiers" ou "dans la jungle des nobmres premiers").
Dans un espace à trois dimensions, on relie les points à coordonnées entières (x, y, z) définis par $z = \sigma(x) + \sigma(y)$ par une surface bosselée. Quand on "se promène" sur une diagonale d'équation $x + y = 2a$, les "trous" dans lesquels on tombe (les points qui minimisent $\sigma(x) + \sigma(y)$) sont justement les solutions Goldbach de $2a$ (c'est à dire de deux premières coordonnées premières).

3 Cribles et coopératives agricoles

A chaque nombre, on a décidé d'associer ses restes selon les divisions par les nombres premiers inférieurs à sa racine. Ce tri des nombres par leur reste selon différents modules m'a fait retrouver un vieux souvenir, par analogie.
Quand j'étais petite, mon oncle travaillait dans une coopérative agricole de fruits en Provence. Un dimanche, il nous y a emmenés pour nous montrer le fonctionnement des "calibreuses".
C'est exactement comme cela que je vois les nombres maintenant, avec cette idée des restes selon les différentes divisions. Une calibreuse est une sorte de tapis roulant sur lequel on dépose au départ toutes les poires en vrac. Elles avancent sur le tapis roulant et au fur et à mesure, elles doivent traverser des espèces de disques en métal, qui tournent sur leur axe et qui contiennent différents trous de différentes tailles. Les poires ne peuvent pas passer par les petits trous mais peuvent passer par le premier trou de taille plus grande que leur taille. Alors, selon le disque qu'elles ont traversé, elles se retrouvent dans différents chemins et selon le même principe et par dichotomie, au bout des différents tapis, on retrouve des poires complètement triées selon un certain nombre de calibres.

Totalement indépendamment de cette anecdote, comparons maintenant le crible d'Eratosthène au "crible de Goldbach", le premier cherchant les nombres premiers inférieurs à 50 et le second cherchant les nombres premiers fournissant une décomposition de Goldbach de 100. 100 s'écrit (1,0,2) dans le triplet de référence (3,5,7) (on ne considèrera que les nombres impairs, les pairs n'étant jamais premiers).
Par la passe du crible d'Eratosthène d'élimination des multiples de 3, on élimine 9, 15, 21, 27, 33, 39 et 45.
Par la passe du crible de Goldbach d'élimination des "congrus à 1 mod 3", on élimine 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49.
Par la passe du crible d'Eratosthène d'élimination des multiples de 5, on élimine 25, 35 et 45 (15 a déjà été éliminé).
Par la passe du crible de Goldbach d'élimination des "congrus à 0 mod 5", on élimine 5, 15, 35, 45 (25 a déjà été éliminé).
Par la passe du crible d'Eratosthène d'élimination des multiples de 7, on élimine 49 (21 et 35 ont déjà été éliminés).
Par la passe du crible de Goldbach d'élimination des "congrus à 2 mod 7", on élimine 9 et 23 (37 a déjà été éliminé).
Il reste comme nombres premiers impairs inférieurs à 50 : 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
Il reste comme nombres premiers impairs fournissant une décomposition de 100 : 3, 11, 17, 29, 41 et 47.
Les processus sont très similaires.

4 Pourquoi la non-congruence selon les petits premiers implique-t-elle la non-congruence selon les premiers plus grands ?

Quand on prend des nombres espacés régulièrement (selon une progression arithmétique), on parcourt les différents restes modulo un autre nombre et cela selon une certaine périodicité. Si de plus les nombres sont premiers entre eux, on parcourt tous les restes. C'est le cas dans la note que vous m'avez aidé à écrire : en ne sélectionnant que les non-congrus selon les petits, parmi eux, il y en a toujours qui sont non-congrus selon les plus grands mais je ne sais pas le démontrer.
Il me semble qu'un texte de Legendre permettrait de répondre à une telle question mais je n'en suis pas sûre : il faudrait que je comprenne précisément ce texte.

5 Récurrence versus descente infinie

J'aurais aimé trouvé une récurrence à cause de ce fragment de texte de Poincaré qui exprime bien ce que l'on ressent en cherchant les décomposants de Goldbach : on se dit "ça ne peut pas ne pas marcher !" et Poincaré exprime extrêmement bien ce sentiment. Le fragment est extrait de la biographie "Poincaré : philosophe et mathématicien" d'Umberto Bottazzini aux éditions Belin Pour la Science.

Le raisonnement par récurrence : le terrain le plus naturel et le plus favorable pour cette étude est l'arithmétique élémentaire, c'est à dire les opérations mettant en jeu des nombres entiers. Quand nous analysons des opérations telles que l'addition et la multiplication, nous nous rendons compte qu'un type de raisonnement se "retrouve à chaque pas", c'est la démonstration "par récurrence" : "on établit d'abord un théorème pour n égal à 1 ; on montre ensuite que, s'il est vrai de $n-1$, il est vrai de n, et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers." C'est là le "raisonnement mathématique par excellence", déclare Poincaré. Sa particularité est "qu'il contient, sous une forme condensée, une infinité de syllogismes", et qu'il permet de passer du particulier au général, du fini à l'infini, concept qui apparaît dès les premiers pas de l'arithmétique élémentaire et sans lequel "il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général", mais uniquement des énoncés particuliers.
D'où nous vient ce "raisonnement pas récurrence", s'interroge Poincaré ? Certainement pas de l'expérience. Celle-ci peut nous suggérer que la règle est vraie pour les dix ou les cent premiers nombres, mais elle est désarmée face à l'infinité de tous les nombres naturels. Le principe de contradiction (on dirait aujourd'hui le raisonnement par l'absurde) est aussi impuissant : il nous permet d'obtenir certaines vérités, mais non d'en enfermer une infinité en une seule formule. "Cette règle (le raisonnement par récurrence), inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique *a priori*, conclut Poincaré. L'"irrésistible évidence" avec laquelle ce "principe" s'impose n'est autre que "l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible"...

6 Sharol Nau

Mon tableau préféré (parmi ceux que j'ai pu voir sur la toile) de Sharol Nau s'appelle "Goldbach Hexagon Tiling - 4", à cause du fait qu'il est "presque" symétrique, ce qui finalement ne veut rien dire mathématiquement parlant, mais qui est pourtant extrêmement compréhensible, humainement parlant... On peut le voir à l'adresse http://www.bridgesmathart.org/art-exhibits/bridges06/nau.html.