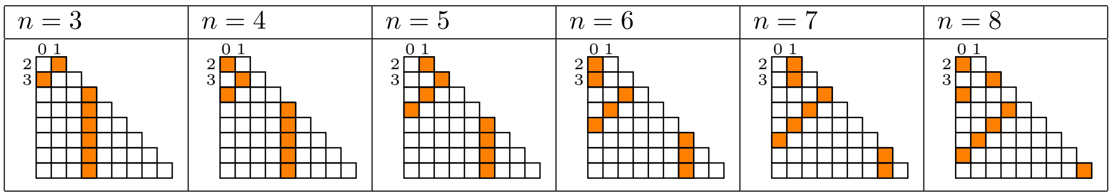
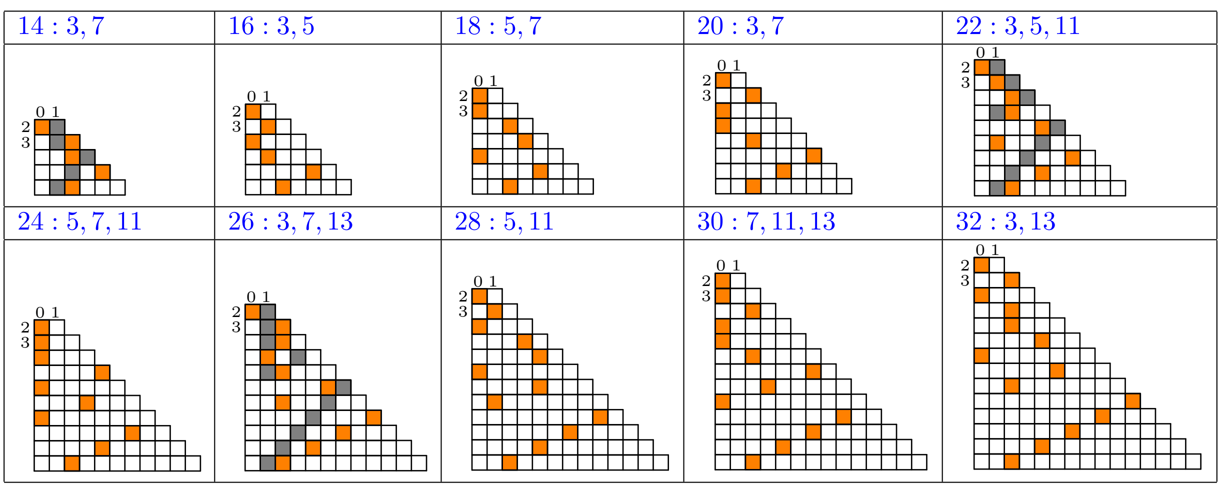
Tores trapézoïdaux (Denise Vella-Chemla, 9.6.2019)

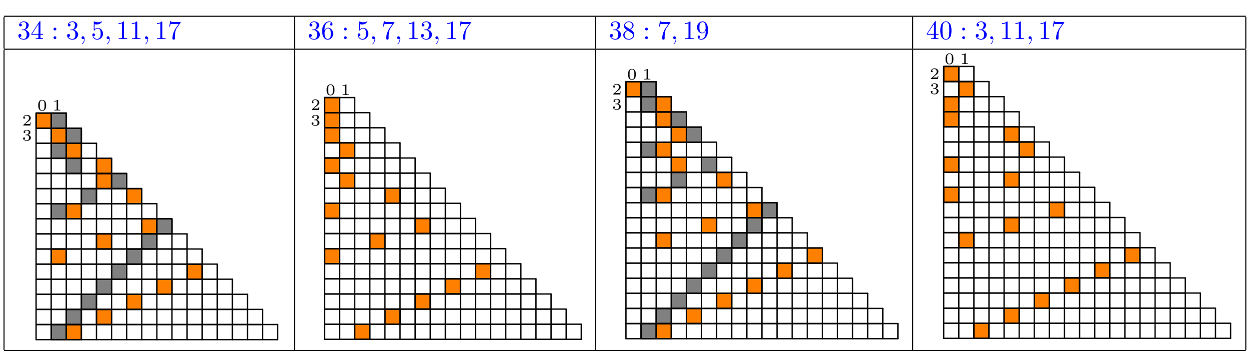
On observe d'abord des pixels qui avancent dans un tore trapézoïdal de taille donnée (utile par exemple si on cherche les décomposants de Goldbach de 20).
Les indices des colonnes de chaque tore trapézoïdal représenté par une matrice triangulaire basse de pixels sont égaux à 0, 1, 2, etc.
Les indices des lignes sont égaux à 2, 3, etc.
Le pixel $[i, j]$ de la matrice de n est orange si $n \equiv i \ (mod\ j)$.
Chaque pixel arrivant au bout d'une ligne à droite est ramené à l'extrémité gauche de la ligne et se remet à parcourir la ligne de gauche à droite.



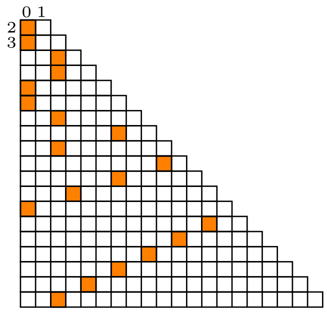
On fournit ci-dessous les tores associés aux seuls nombres pairs. Pour voir le mouvement d'un pixel d'un tore à l'autre, rappelons-nous qu'il saute une case de nombre pair en nombre pair. On montre pour les nombres pairs $2p$ (en orange) doubles d'un nombres premier p (en gris) ce dcomposant de Goldbach trivial puisque $2p = p + p$.

Sont décomposants de Goldbach d'un nombre pair n les nombres premiers dont le tore coupé à $n/2$ n'a aucun pixel commun avec celui de n. Un nombre premier est caractérisé par le fait que la colonne d'indice 0 de ses tores (quelle que soit leur taille) ne contient qu'un seul pixel à 1. Dans les trapèzes de pixels ci-dessous, on a également détaillé que 11 est décomposant de Goldbach de 54, que 47 est un décomposant trivial de 94 (pour montrer la diagonale de pixels d'un nombre premier, là 47, dans le bas du graphique).

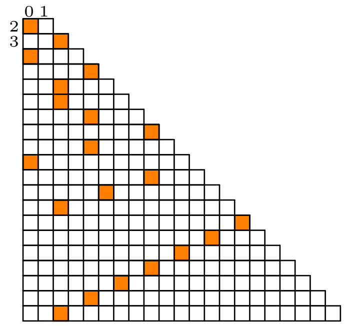




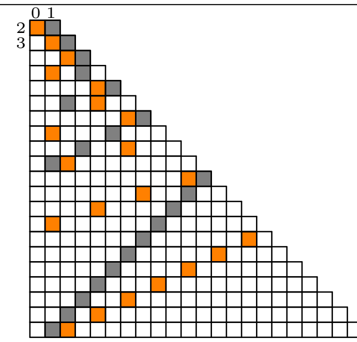
42 : 5, 11, 13, 19



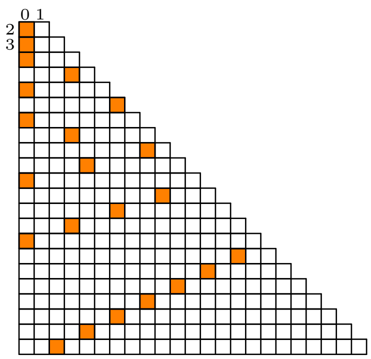
44 : 7, 13



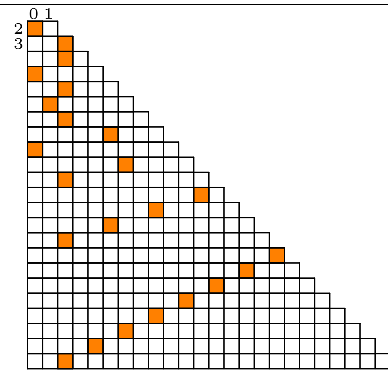
46 : 17, 23



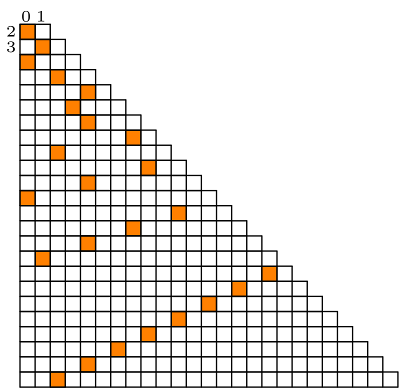
48 : 7, 11, 17, 19



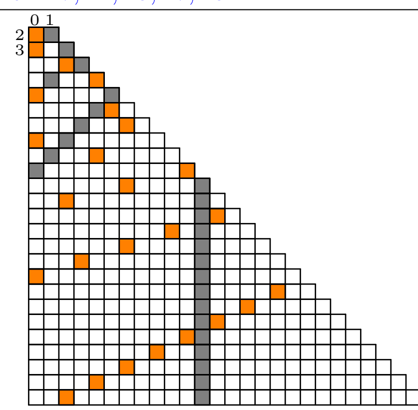
50 : 7, 13, 19



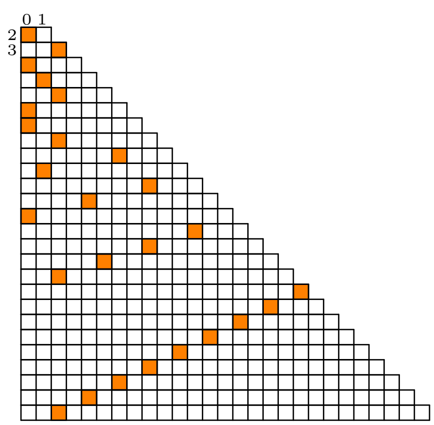
52 : 11, 23



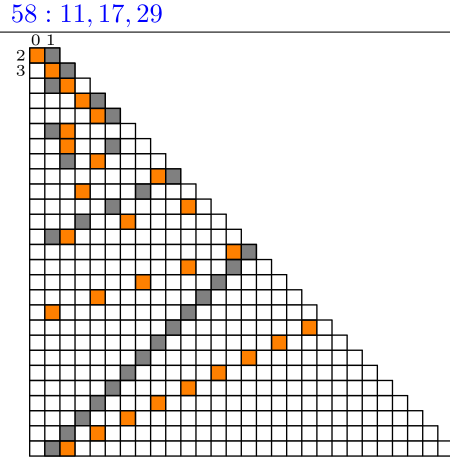
54 : 7, 11, 13, 17, 23

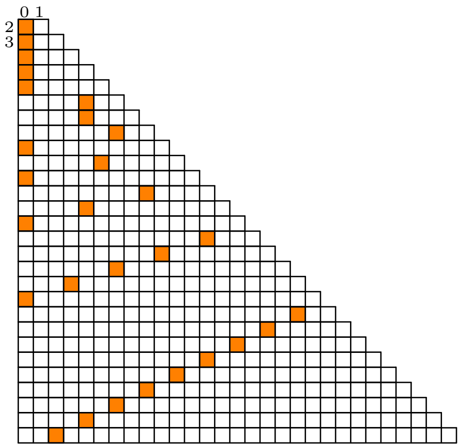
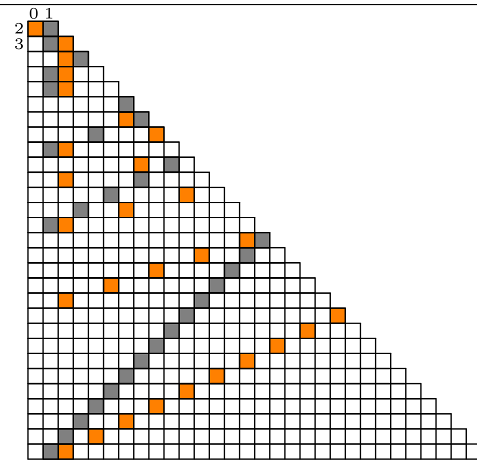
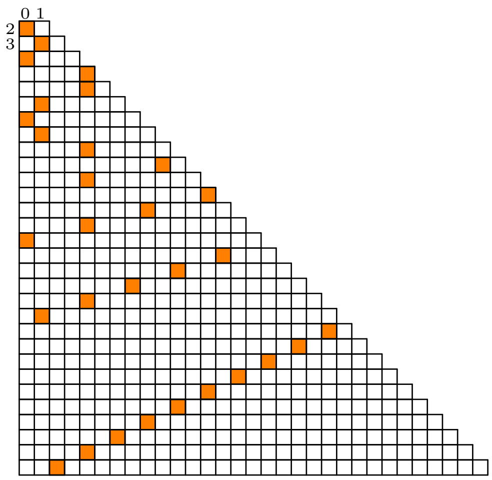
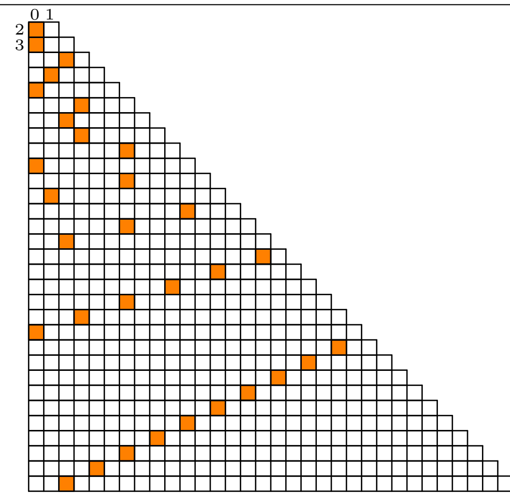
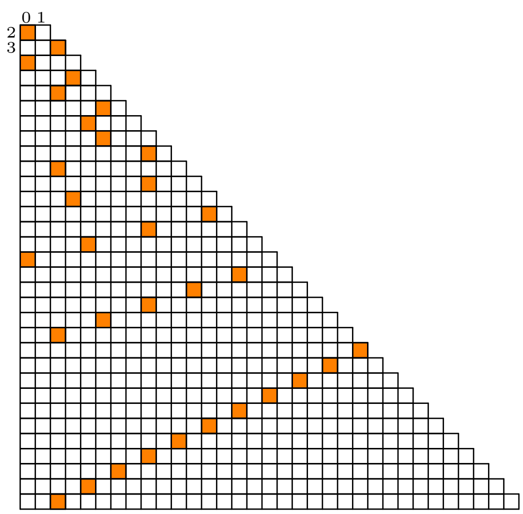
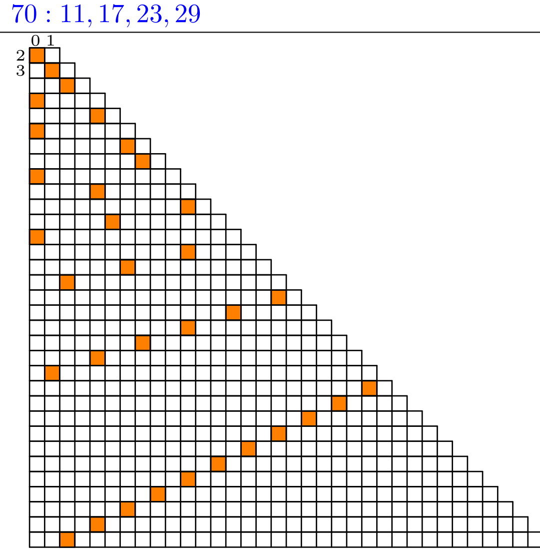


56 : 13, 19

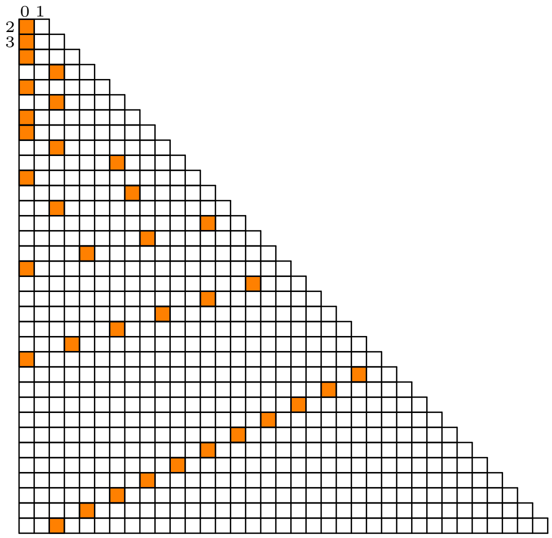


58 : 11, 17, 29

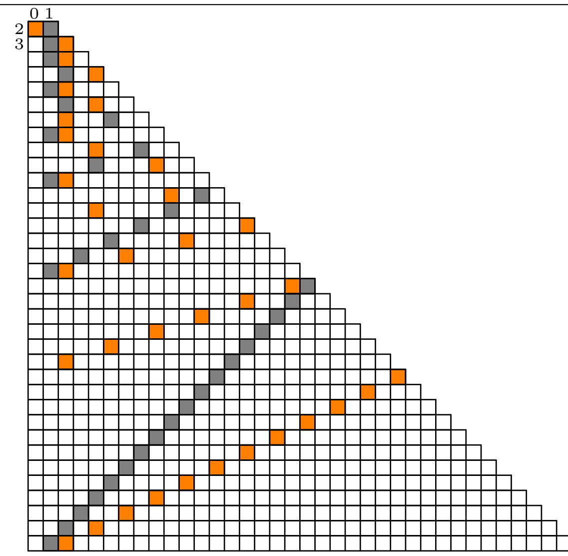


$60 : 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$	$62 : 13, 19, 31$
	
$64 : 11, 17, 23$	$66 : 13, 19, 23, 29$
	
$68 : 31$	$70 : 11, 17, 23, 29$
	

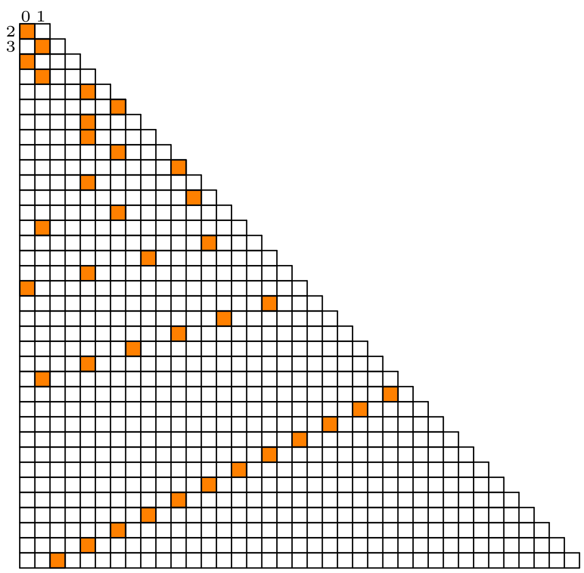
$72: 11, 13, 19, 29, 31$



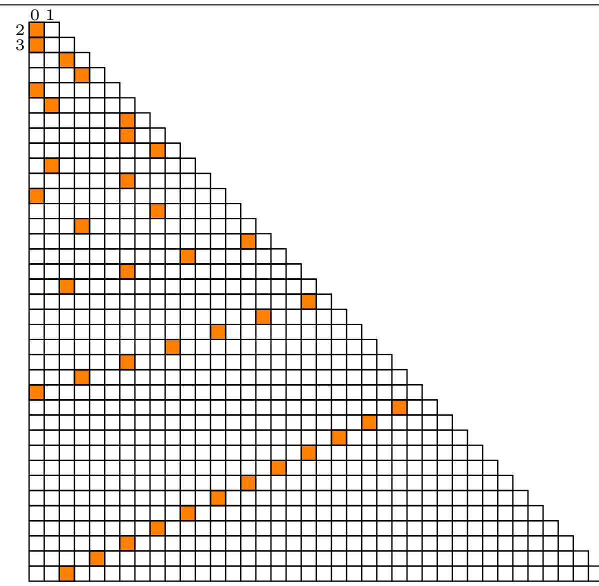
$74: 13, 31, 37$



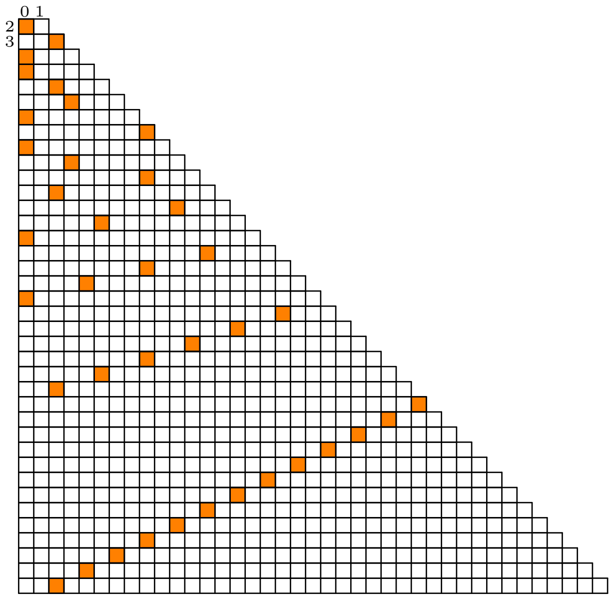
$76: 17, 23, 29$



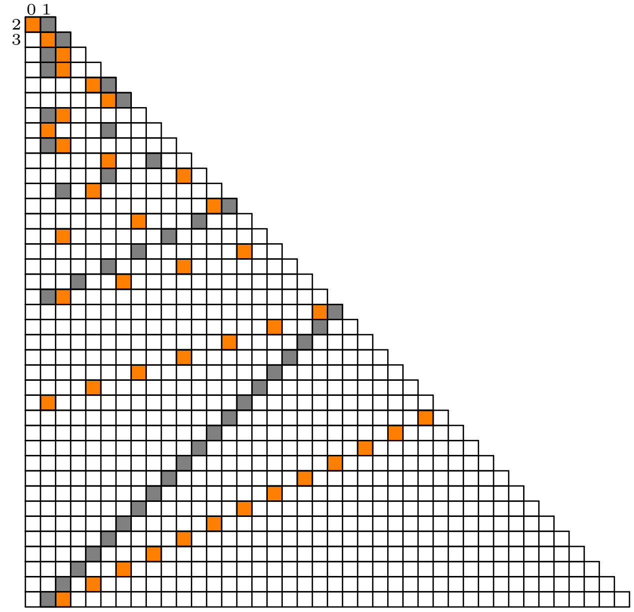
$78: 11, 17, 19, 31, 37$



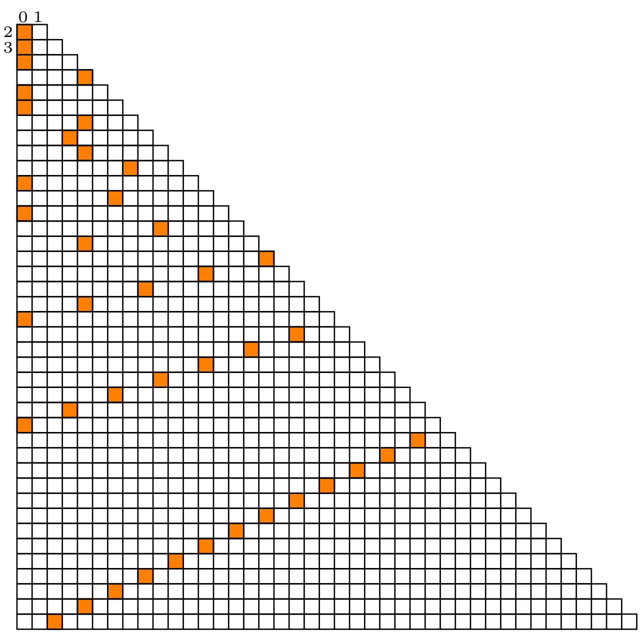
80 : 13, 19, 37



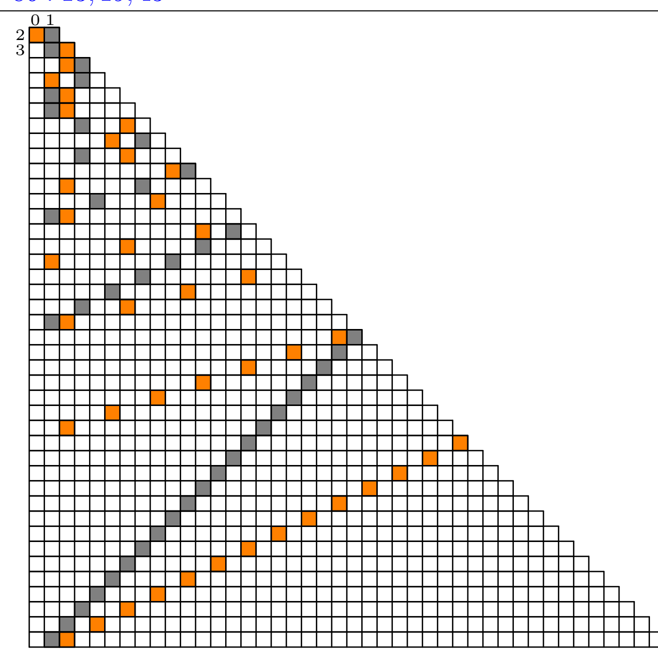
82 : 11, 23, 29, 41



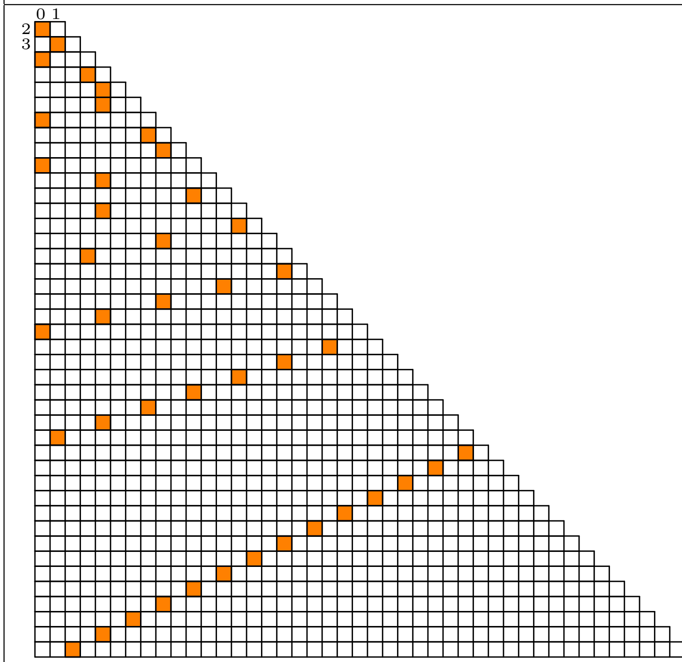
84 : 11, 13, 17, 23, 31, 37, 41



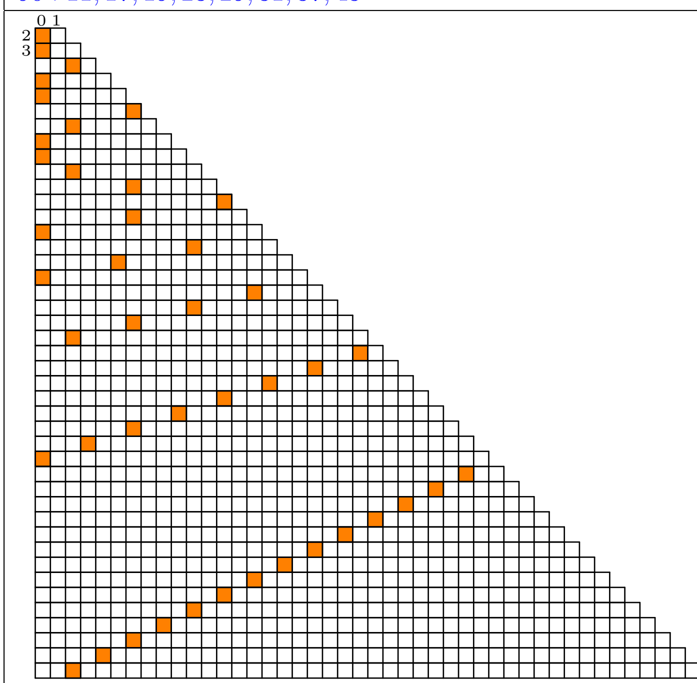
86 : 13, 19, 43



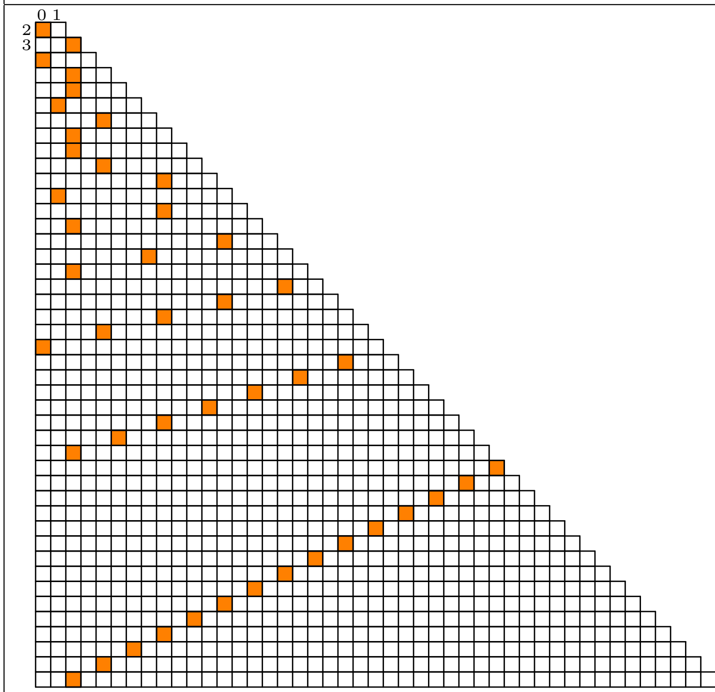
88 : 17, 29, 41



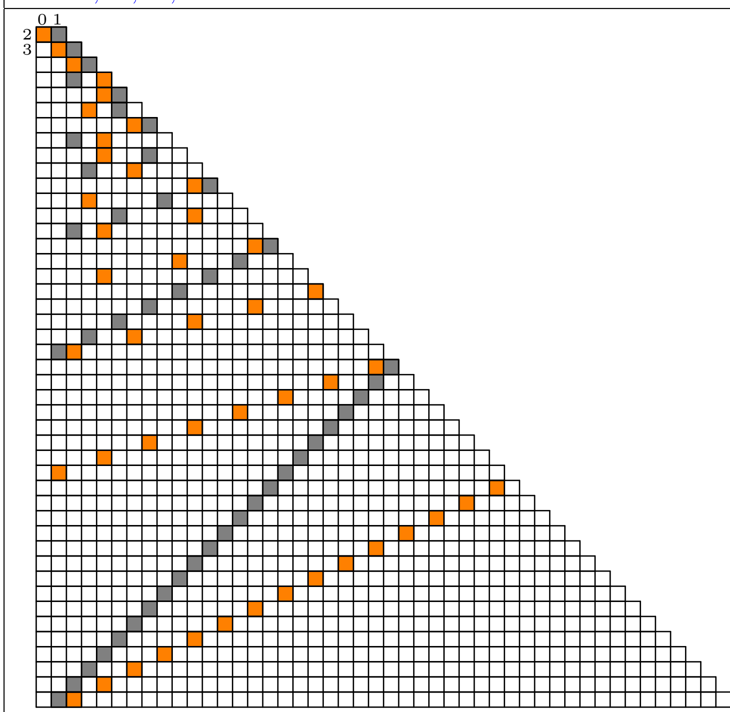
90 : 11, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 43



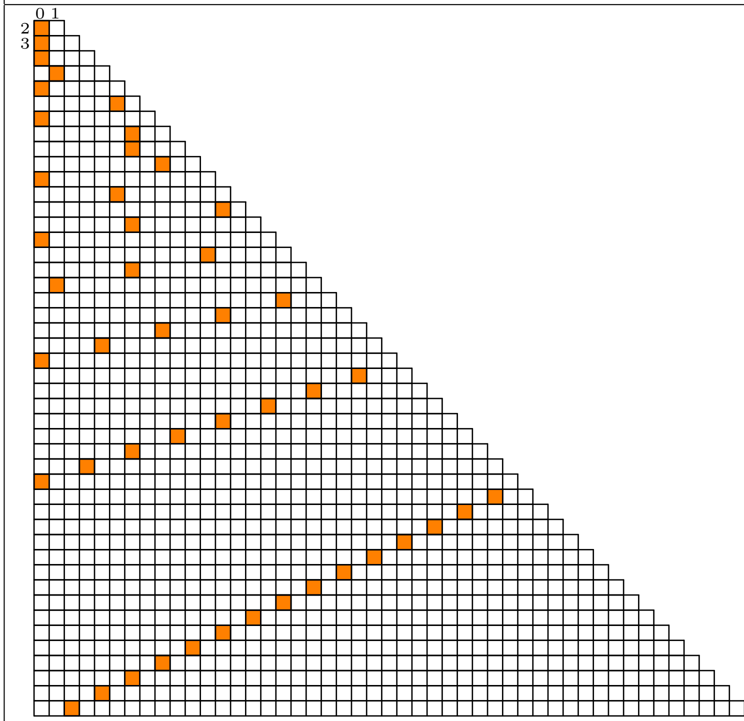
$92 : 13, 19, 31$



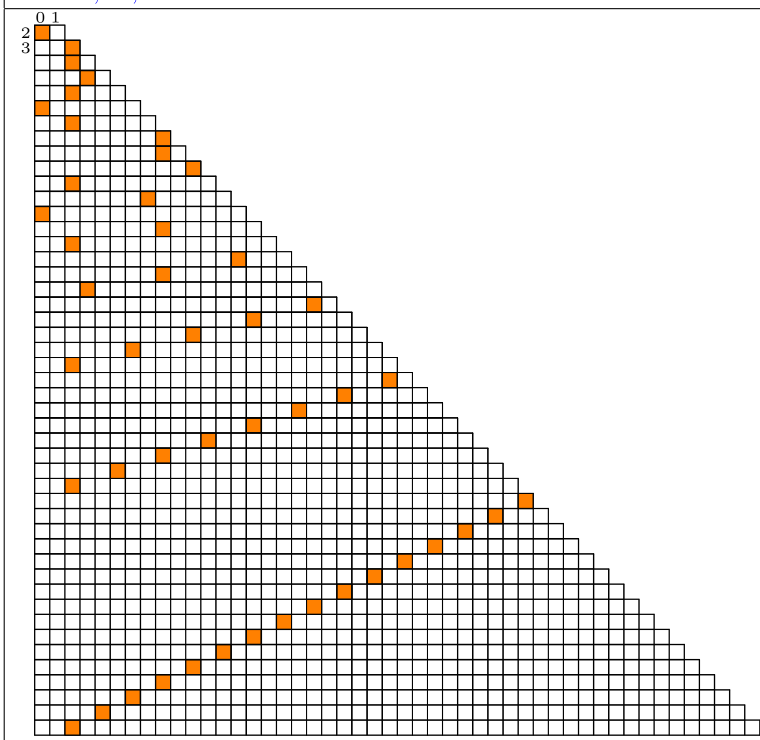
$94 : 11, 23, 41, 47$

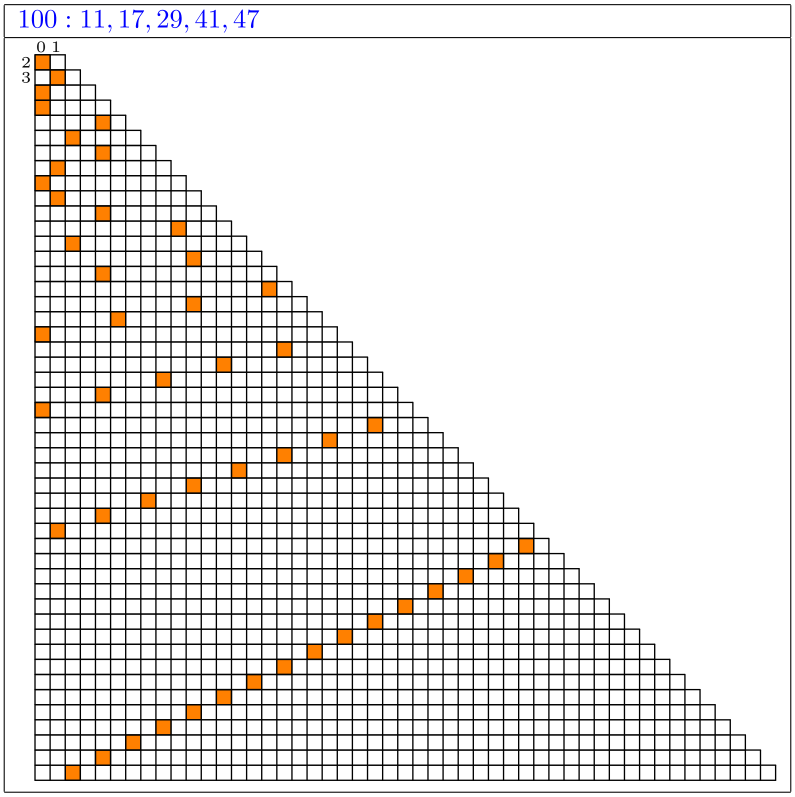


$96: 13, 17, 23, 29, 37, 43$

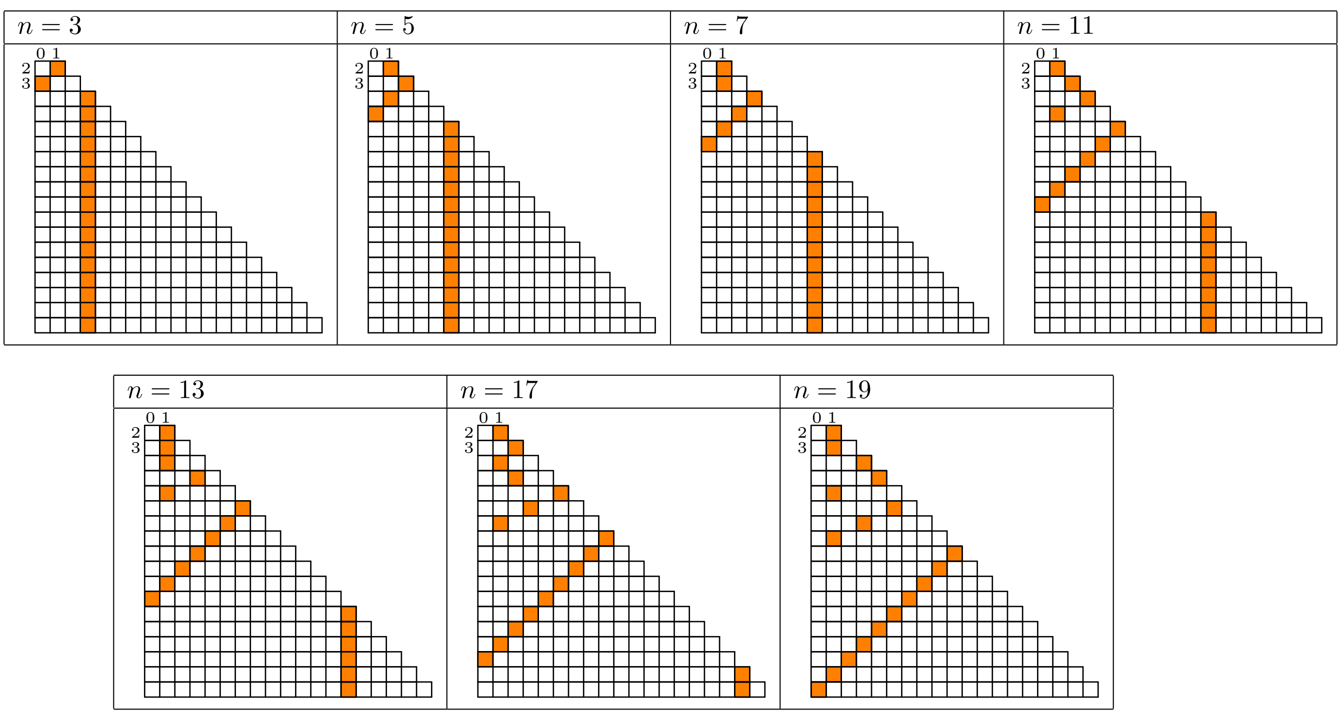


$98: 19, 31, 37$

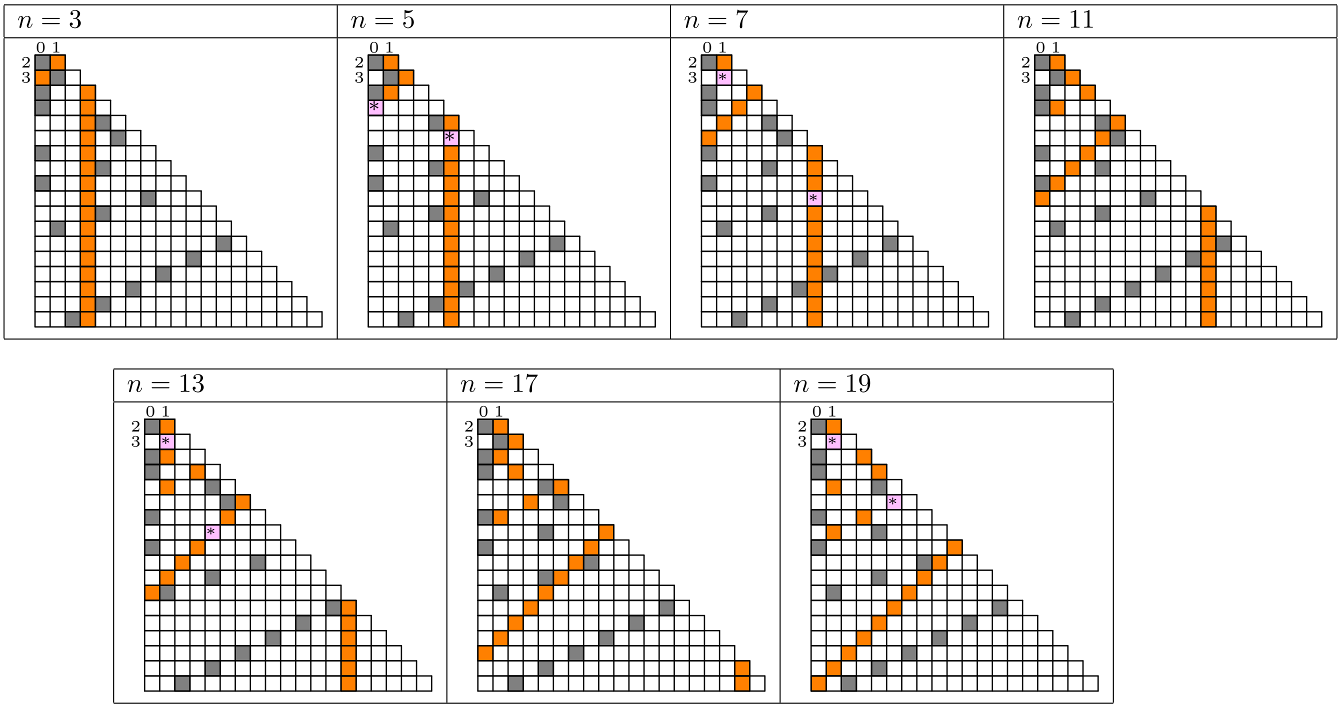




Ci-dessous, on peut observer les tores des nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 à la recherche des décomposants de Goldbach de 40.



Les mêmes tores des nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 avec en transparence (gris) le tore de 40 pour voir les conflits empêchant 5, 7, 13 et 19 d'être décomposants de Goldbach de 40.



Un nombre premier devant éviter les pixels colorés d'un nombre pair pour pouvoir le décomposer, on peut compter le nombre de pixels colorés à éviter : il y en a $\dfrac{n}{\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}-1}=\dfrac{2}{n+3}$.

Le nombre de pixels à éviter est ainsi de plus en plus petit au fur et à mesure de l'augmentation de n. Ceci est un argument supplémentaire en faveur du fait que la conjecture de Goldbach est en quelque sorte probabilistiquement de plus en plus vraie.

Cette connaissance un peu plus précise qu'on a du processus à l'œuvre, qui permet à un nombre d'être ou de ne pas être un décomposant de Goldbach d'un nombre pair, amène à des calculs différents de ceux qu'on a proposés dans http://denise.vella.chemla.free.fr/denitac.pdf.

Fournissons quelques exemples pour fixer les idées : plaçons nous dans la ligne de pixels d'un nombre premier p. On a vu que x a un reste valide pour être un décomposant de Goldbach de n si le pixel de x dans la ligne correspondant au nombre premier p est à la fois différent de 0 et différent du pixel de n.

Fixons $p=5$. Il y a 5^2 possibilités de restes, i.e. de pixels possibles pour x et n qui sont

$$\begin{array}{c}(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),\\(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),\\(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),\\(4,0),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4).\end{array}$$

Là, on a le choix entre deux possibilités :

- soit on a la connaissance que x est un nombre premier, auquel cas son pixel est différent de 0 et il a 16 possibililités sur les 20 possibilités restantes d'avoir son pixel différent de celui de n, c'est-à-dire qu'il a $\dfrac{(p-1)^2}{p(p-1)}=\dfrac{p-1}{p}$ chances que ça soit le cas et il faut faire le produit de tous ces $\dfrac{p-1}{p}$ pour avoir le nombre de chances total selon tous les nombres premiers ; on trouve une minoration du produit $\prod \frac{p-1}{p}$ dans [1]. Il faut multiplier cette minoration par la minoration de $\pi(\frac{n}{2})$, qui est $\frac{\frac{n}{2}}{ln\,\frac{n}{2}}$ (minoration fournie par la même référence).

- soit on n'a pas la connaissance que x est un nombre premier et x doit alors éviter deux pixels sur chaque ligne d'un nombre premier, et celui de n, et le pixel 0, de façon à assurer d'une part que x soit un nombre non divisible par tout nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$, ce qui le rendra premier quant à lui ; d'autre part, pour ne pas avoir son pixel identique à celui de n, il y a toujours 16 possibilités qui conviennent pour x mais elles sont à ramener aux 25 possibilités totales, selon la formule $\frac{(p-1)^2}{p^2} = \left(\frac{p-1}{p}\right)^2$. Dans ce cas-là, on n'arrive pas à raisonner plus avant car les nombres étant inférieurs à 1, la minoration du produit des $\frac{p-1}{p}$ ne permet pas d'obtenir une minoration pour le produit de leur carré.

Référence

[1] J. B. Rosser et L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, dedicated to Hans Rademacher for his seventieth birthday, Illinois J. Math., Volume 6, Issue 1 (1962), 64-94.